

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



ریاضی پایه نهم



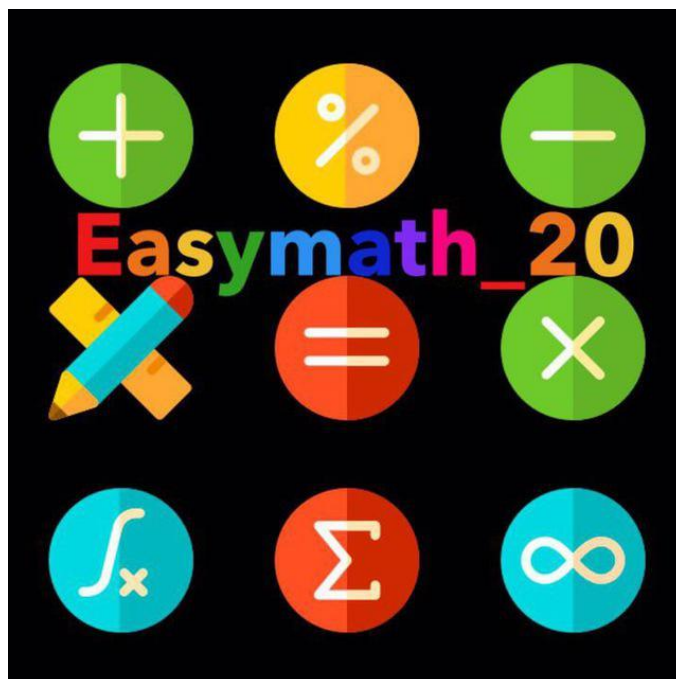
فصل سوم - استدلال و اثبات در هندسه

در سنامه جامع، مثال هار بیعضر، نکته و نمونه سوالات امتحانر

مؤلف و مدرس : مهندس گنجی مقدم



پایه نهم - متوسطه اول



فصل سوم ، استدلال و اثبات در هندسه

درسی اول : استدلال

استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی ، برای معلوم کردن موضوعی که مجهول است . برای استدلال کردن می توان از روش های مختلفی استفاده کرد که میزان اعتبار هر کدام با دیگری متفاوت است . به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد ، اثبات می گویند .

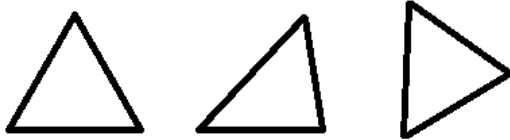
برای استدلال کردن از روش های مختلفی می توان استفاده کرد، مانند :

الف) استفاده از اطلاعات و رابطه هایی که قبلا آنها را اثبات کرده ایم و درستی آن ها اثبات شده است.

ب) کنار هم قرار دادن اطلاعاتی که مسئله در اختیار ما قرار می دهد.

نکته : برای اثبات یک موضوع نمی توانیم از مثال استفاده کنیم ، اما اگر بخواهیم یک موضوع را رد کنیم می توانیم از مثال استفاده کنیم، به این مثال ، مثال نقض می گویند.

مثال ۱ : دو ارتفاع هر کدام از مثلث های زیر را رسم کنید و محل برخورد ارتفاع ها را تعیین کنید . آیا می توان گفت محل برخورد دو ارتفاع هر مثلثی داخل مثلث است ؟ سعی کنید یک مثال نقض بیابید .



نکته : استفاده از حواس پنج گانه به دلیل امکان وجود خطا ، روش مناسبی برای استدلال و نتیجه گیری نیست .

نکته : استفاده از شکل ، ترسیم و شهود کمک زیادی به تشخیص راه حل درست می کند ، اما یک تشخیص قابل اطمینان نمی باشد .

مثال ۲ : مشخص کنید کدام یک از استدلال های زیر قابل قبول اند .

الف) چون برخی چهارضلعی ها مربع اند ، پس همه ی چهارضلعی هایی که زاویه قائمه دارند ، مربع اند .

ب) چون تیم فوتبال ایران در چند سال اخیر قهرمان آسیا نشده است ، پس دیگر هیچ گاه قهرمان نمی شود .

ج) چون در سال های اخیر بارش باران کم بوده است ، احتمال این که دچار بحران آب شویم وجود دارد .



درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

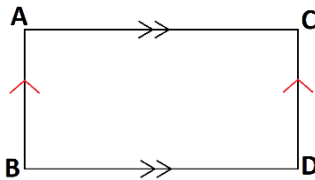
برای اثبات درستی یک موضوع باید از دلایل منطقی و قانع کننده کمک گرفت و با استدلال، موضوع مورد نظر را اثبات کرد. برای این کار ابتدا باید با قسمتهای تشکیل دهنده هر مسئله آشنا شویم؛

هر مسئله را می توان به دو بخش اصلی تقسیم کرد:

۱- اطلاعاتی که مسئله در اختیار ما قرار می دهد و به آن **فرض** مسئله می گویند.

۲- دستور یا خواسته مسئله که به آنها **حکم** مسئله گفته می شود.

نکته: گاهی فرض های مسئله روی یک شکل مشخص می شوند، یعنی به جای اینکه اطلاعات به صورت یک جمله به ما گفته شوند، روی شکل نوشته می شوند.



مثال ۳: فرض و حکم مسئله های زیر را مشخص کنید.

الف) در شکل مقابل ثابت کنید پاره خط های AB و CD برابرند.

ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نا برابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچکتر.

ج) در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است.

گام هایی برای حل مسئله هندسی:

۱- درک و فهم مسئله: که با خواندن دقیق صورت مسئله حاصل می شود.

۲- رسم شکل: رسم شکل مناسب به ادامه حل مسئله کمک شایانی می کند.

۳- تعیین فرض و حکم مسئله: داده ها (فرض) و خواسته های مسئله (حکم) را تعیین کنید.

۴- راهبرد حل مسئله: روش مناسب برای رسیدن به حکم مسئله را بیابید، ار کنار هم قرار دادن اطلاعات مسئله و آنچه خود می دانیم، استدلال های منطقی انجام دهید تا به حکم مسئله برسید.



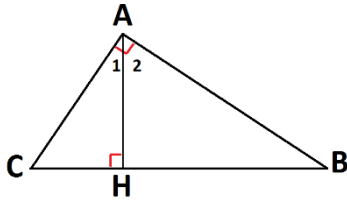
میانه: میانه پاره خطی است که ضلع مقابل به زاویه را نصف می کند .

عمود منصف: پاره خطی است که بر ضلع عمود می شود و آن را نصف می کند.

ارتفاع: پاره خطی است که از یک رأس به ضلع روبه رو عمود می شود.

نیم ساز: پاره خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

نکته: در مثلث متساوی الساقین ، نیمساز وارد بر قاعده ، میانه نیز هست .



مثال ۴: در شکل مقابل ثابت کنید $\hat{A}_2 = \hat{C}$.

نکته: وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم ، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم ، در سایر عضو های آن مجموعه نیز باشد ، می توان درستی نتیجه را به همه ی عضو های آن مجموعه تعمیم داد .

مثال ۵: ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط ، از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

مثال ۶: ثابت کنید مجموع زوایای هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است.

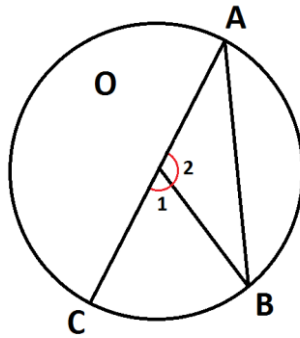


نکته: هرگاه به روش علمی یک موضوع را اثبات کردیم (مانند مثال قبل)، می توانیم آن را در همه موارد مشابه به کار ببریم، به این کار تعمیم دادن قضیه می گویند. یعنی در مسائلی که شرایط یکسان است می توان نتایج قبلی استفاده کرد.

مثال ۷: ثابت کنید در هر مثلث، هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است.

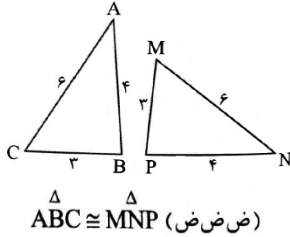
مثال ۸: ثابت کنید زوایای متقابل به راس باهم برابرند.

مثال ۹: ثابت کنید $\hat{A} = \frac{BC}{2}$. (می دانیم $\hat{O}_1 = BC$)

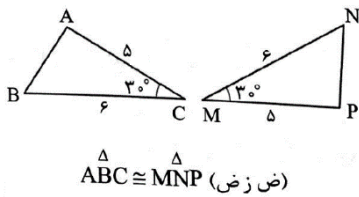


درس سوم : هم نهشتی مثلث ها

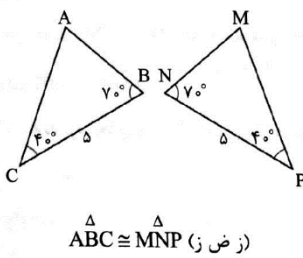
در سال گذشته با مفهوم هم نهشتی مثلث ها آشنا شدیم ؛ دو مثلث هنگامی هم نهشت اند که بتوان آن ها را با یک یا چند تبدیل کاملاً بر یکدیگر منطبق کرد. با توجه به آن چه در سال گذشته خواندید، پنج حالت هم نهشتی مثلث ها را بررسی می کنیم .



(۱) سه ضلع (ض ض ض)



(۲) دو ضلع و زاویه بین (ض ض ز)

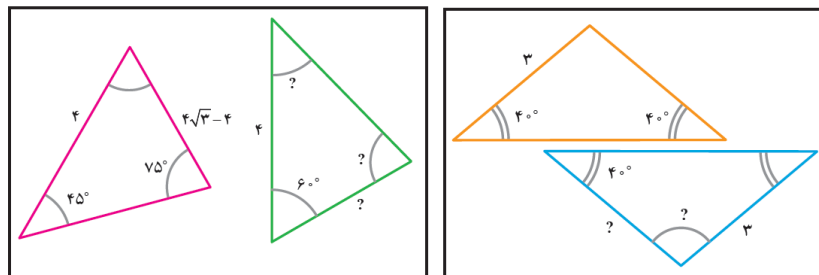


(۳) دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)

(۴) وتر و یک ضلع (مخصوص مثلث های قائم الزاویه)

(۵) وتر و یک زاویه (مخصوص مثلث های قائم الزاویه)

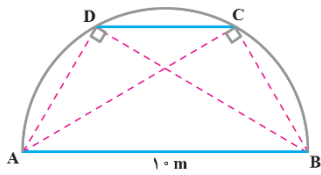
مثال ۱۰ : هر کدام از جفت مثلث های زیر هم نهشت اند ، مقدار مجهول را بیابید .



برای اثبات همنهشتی مثلث ها یا مسائل مربوط به آن مراحل زیر را طی می کنیم:

- ۱- برای مسئله شکل رسم می کنیم.
- ۲- با توجه به اطلاعات مسئله و دانسته های قبلی فرض و حکم را مشخص می کنیم.
- ۳- ضلع ها و زاویه های مساوی در مثلث ها را در صورت وجود مشخص می کنیم.
- ۴- با توجه به اطلاعات به دست آمده حالت هم نهشتی ایجاد شده را پیدا می کنیم.
- ۵- سپس به کمک اجزای متناظر در مثلث های همنهشت، مسئله را اثبات می کنیم و به حاکم می رسمیم.

مثال ۱۱: در شکل زیر ثابت کنید $AC=BD$. می دانیم $AD=CB=6$.



مثال ۱۲: ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، ضلع ها روبه رو مساوی اند.



درس چهارم : حل مسئله در هندسه

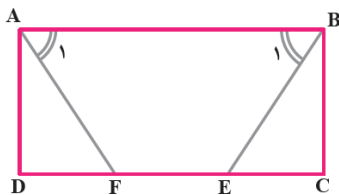
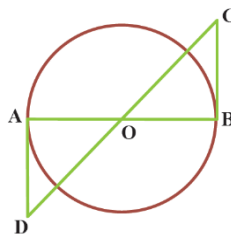
برای حل یک مسئله هندسی ، راه حل کلی وجود ندارد ؛ اما می توان با طی مراحل زیر راحت تر به جواب رسید .

- ۱- خواندن دقیق صورت مسئله و آشنایی با مفاهیم آن ،
- ۲- کشیدن شکل مناسب ،
- ۳- تشخیص و نوشتن فرض و حکم مسئله ،
- ۴- پیدا کردن راه حل مناسب برای رسیدن از فرض به حکم .

مثال ۱۳ : ثابت کنید اگر دو وتر از دایره ای مساوی باشند ، کمان های نظیر آن ها نیز مساوی اند .

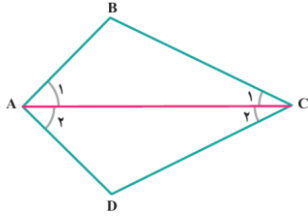
نکته : در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند ، وتر های نظیر آن ها نیز باهم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند ، کمان های نظیر آن ها نیز برابرند .

مثال ۱۴ : در شکل زیر O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس اند . نشان دهید که BC و AD مساوی اند .



مثال ۱۵ : در مستطیل ABCD ، پاره خط های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند . ثابت کنید AF و BE مساوی اند .





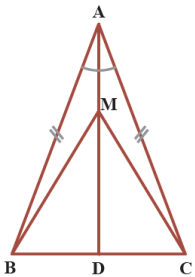
مثال ۱۶ : در شکل مقابل پاره خط AC نیمساز زاویه A است و اضلاع AD و AB برابرند. فرض و حکم را بنویسید و ثابت کنید مثلث های ABC و ADC هم نهشتند.

مثال ۱۷ : ثابت کنید در هر مربع ، هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است .

مثال ۱۸ : ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .

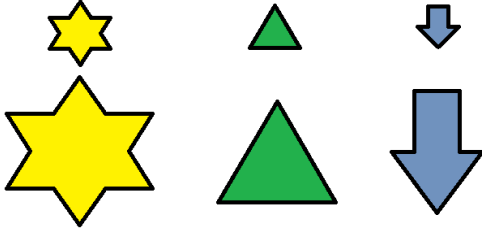
مثال ۱۹ : ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع قطر ها یکدیگر را نصف می کنند.

مثال ۲۰ : نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین ، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه راس از دو سر قاعده ، برابر است : $MB = MC$.



درس پنجم: شکل های متشابه

دو شکل را متشابه گویند هر گاه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده باشند یا تغییری نکرده باشند) و اندازه زوایا بدون تغییر مانده باشد.

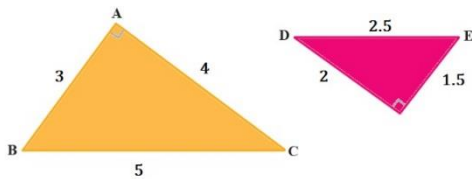


به عنوان مثال شکل های مقابل دو به دو متشابه اند؛

نکته: هر دو n ضلعی منتظم هموار متشابه اند، به عنوان مثال هر دو مربع دلخواه همواره متشابه اند.

نکته: در مثلث ها اگر دو زاویه برابر وجود داشته باشد، آن دو مثلث متشابه خواهند بود و نیاز نیست نسبت ضلع ها بررسی شود.

نکته: به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گویند.



مثال ۲۱: در شکل های مقابل نسبت تشابه را پیدا کنید.

نکته: دو شکل هم نهشت، متشابه نیز هستند و نسبت تشابه آن ها **یک** است.

مثال ۲۲: اگر مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلث DEF با اضلاع X و ۱۲ و Y متشابه باشد، X و Y را بیابید.



مقیاس: برای نمایش تصویر یک منطقه بر روی کاغذ نمی توان تصویر را با اندازه واقعی رسم کرد، به همین دلیل همیشه نقشه یک منطقه از اندازه واقعی آن کوچکتر است. در هنگام رسم نقشه دقیقاً باید همه چیز را به یک نسبت کوچک کنیم تا شکل از نظر هندسی مشابه باشد، به نسبتی که تصویر را کوچک می کنیم مقیاس نقشه گفته می شود و از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{\text{اندازه نقشه}}{\text{اندازه واقعی}} \quad (\text{واحد ها باید یکی باشند.})$$

مثال ۲۳: در یک نقشه مقیاس ۱:۶۰۰ است. فاصله دو نقطه روی نقشه ۴,۵ سانتی متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

مثال ۲۴: یک نقشه با مقیاس ۱:۲۰۰۰ موجود است.

الف) اگر فاصله دو نقطه در مقیاس واقعی ۱ کیلومتر باشد، فاصله این دو نقطه روی نقشه چند سانتی متر است؟

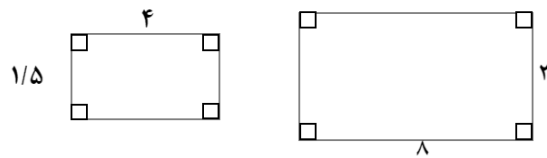
ب) اگر فاصله دو نقطه روی نقشه ۲,۵ سانتی متر باشد، فاصله واقعی چند متر است؟ چند سانتی متر؟

مثال ۲۵: نسبت تشابه دو چهار ضلعی ۳ است. اگر محیط و مساحت شکل کوچکتر به ترتیب ۸ و ۳ باشد، محیط و مساحت شکل بزرگ را به دست آورید.



نمونه سوالات امتحانی فصل سوم :

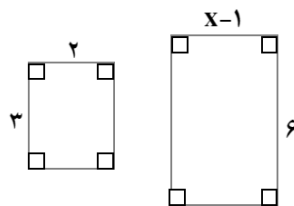
۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
 الف) اطلاعات داده شده و معلومات مسئله را فرض مسئله گوئیم.
 ب) با مشاهده کردن و حواس پنج گانه هم می توان به درستی یک موضوع اطمینان کرد.
 ج) اگر خاصیتی را برای یک عضو از مجموعه ثابت کردیم، آن خاصیت برای تمامی اعضای مجموعه درست است.
 د) برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی و کلاسیک وجود ندارد.



- ه) در هر مستطیل قطرها باهم برابرند.
 و) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه اند.
 ز) دو لوزی دلخواه همواره متشابه اند.
 ح) نسبت تشابه دو شکل مقابل $\frac{1}{2}$ است.
 و) هر دو مربع دلخواه متشابه اند.

۲. جملات زیر را کامل کنید.

- الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی را در هندسه گویند.
 ب) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، می گوئیم.
 ج) اطلاعات داده شده در مسئله را و خواسته ی مسئله را گویند.
 د) اولین گام در حل مسئله هندسی است.
 ه) گام دوم در حل مسائل هندسی این است که با توجه به مسئله
 و) در دو شکل متشابه اضلاع و زاویه های نظیر هستند.
 ز) نسبت اضلاع متناظر دو شکل را گویند.
 ح) دو لوزی در صورتی متشابه اند که نظیر باهم برابر باشند.
 ط) دو مستطیل در صورتی متشابه اند که متناظر باشند.
 ی) هر دو مربع دلخواه متشابه



- ک) هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه متشابه
 ل) مقدار x در شکل های متشابه زیر برابر است با

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبل برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده را چه می نامند؟

- (۱) فرض مسئله (۲) حکم مسئله (۳) استدلال (۴) شهود

ب) اگر $a < 0$ و $b > 0$ باشد، کدام گزینه را می توان نتیجه گرفت؟

- (۱) $ab > 0$ (۲) $ab < 0$ (۳) $ab = 0$ (۴) $(a-b) > 0$



ج) کدام گزینه از حالت های هم نهشتی دو مثلث محسوب نمی شود؟

- (۱) (ض ز ض) (۲) (ز ض ز) (۳) (ض ض ض) (۴) (ز ز ز)

د) کدام مورد زیر همواره معتبر نیست؟

- (۱) دو زاویه متقابل به رأس باهم مساوی اند.
 (۲) هر نقطه که روی نیم ساز یک زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
 (۳) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.
 (۴) محل برخورد ارتفاع های هر مثلث درون آن مثلث قرار می گیرد.

ه) در دو شکل متشابه :

- (۱) اضلاع مساوی و زاویه ها متناسب اند
 (۲) اضلاع متناسب و زاویه ها برابرند.
 (۳) اضلاع و زوایا نامساوی اند
 (۴) اضلاع و زاویه ها به یک نسبت تغییر می کنند.

و) کدام شکل همواره با خودش متشابه است؟

- (۱) مستطیل (۲) لوزی (۳) مربع (۴) مثلث متساوی الساقین

ز) طول های اضلاع یک مثلث ۷ و ۹ و ۱۴ است. محیط مثلثی که با این مثلث متشابه بوده و بزرگ ترین ضلع آن ۲۱ باشد، چند است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

ح) دو لوزی متشابه اند و نسبت تشابه آن ها $\frac{۳}{۵}$ است. اگر ضلع لوزی کوچک ۴۵ سانتی متر باشد، ضلع لوزی بزرگ تر برابر است با :

- (۱) ۱۳۵ (۲) ۹۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

و) در یک نقشه مقیاس $\frac{۱}{۵۰۰}$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه ۱۵ میلی متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟

- (۱) ۷۵۰۰ متر (۲) ۷۵۰ متر (۳) ۷۵ متر (۴) ۷/۵ متر

۴. همه ی اعداد طبیعی مثبت اند و چون اعداد طبیعی زیر مجموعه ای از اعداد گویا هستند، پس همه ی اعداد گویا نیز مثبت اند .
 آیا این استدلال معتبر است چرا؟

۵. در مسائل زیر فرض و حکم مسئله را مشخص کنید.

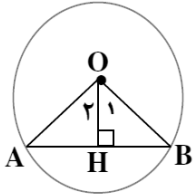
الف) ثابت کنید : در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.

ب) نشان دهید : هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.



۶. تساوی های زیر را کامل کرده تا نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن وتر را نصف می کند.

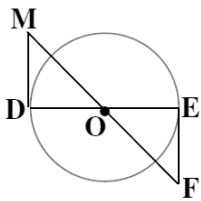
فرض	_____
حکم	_____



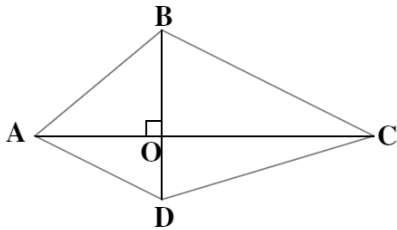
$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \dots\dots \text{دایره} \dots\dots \text{هر دو} \dots\dots \\ \overline{OH} = \dots\dots \dots\dots \text{چون} \dots\dots \end{array} \right\} \longrightarrow \text{حالت ()} \Rightarrow \dots\dots \cong \dots\dots$$

\Rightarrow از تساوی اجزای متناظر دو مثلث $\dots\dots = \dots\dots$

۷. در شکل زیر O مرکز دایره و خط های DM و EF بر دایره مماس اند. چرا $\overline{EF} = \overline{DM}$ ؟



۸. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی محذب برهم عمود باشند، مساحت چهارضلعی نصف حاصل ضرب طول های دو قطر آن است. (عبارتها را کامل کنید)

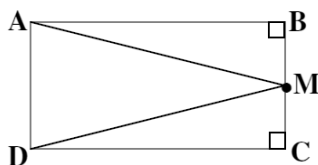


فرض	_____
حکم	_____

مساحت چهارضلعی ABCD = مساحت مثلث ABC +

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \dots \times \dots + \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \\ &= \frac{1}{2} AC (\dots + \dots) \\ &= \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \end{aligned}$$

۹. در مستطیل زیر M وسط \overline{BC} است ثابت کنید مثلث AMD متساوی الساقین است.



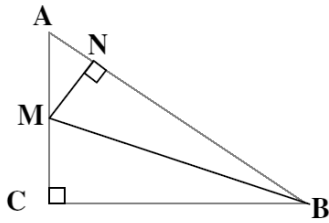
فرض	_____
حکم	_____

دلیل

$$\left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حالت ()} \Rightarrow \dots\dots \cong \dots\dots \Rightarrow \dots\dots$$

از تساوی اجزای متناظر دو مثلث نتیجه می گیریم که

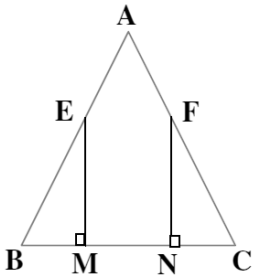




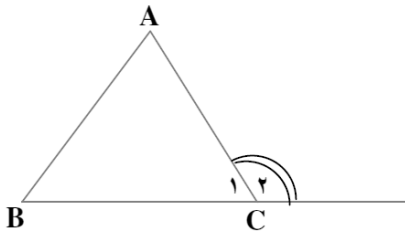
۱۰. در شکل زیر \overline{BM} نیم ساز زاویه B است چرا $\overline{BC} = \overline{BN}$ ؟

فرض	
حکم	

۱۱. مثلث ABC متساوی الساقین و E و F وسط ساق ها هستند چرا طول پاره خط های BM و CN برابر است؟



۱۲. نشان دهید در هر مثلث اندازه ی یک زاویه خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن برابر است. یادآوری: زاویه ی خارجی یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود.



۱۳. ثابت کنید اگر در یک متوازی الاضلاع قطر ها مساوی یکدیگر باشند آن چهارضلعی مستطیل است.

۱۴. نشان دهید طول دو مماس که از یک نقطه خارج از دایره بر آن دایره رسم می شوند، باهم برابرند.

۱۵. دو مستطیل به نسبت $\frac{3}{4}$ باهم متشابه اند اگر طول مستطیل بزرگ تر ۲۸ سانتی متر باشد، اندازه ی طول مستطیل کوچک تر چند سانتی متر است؟



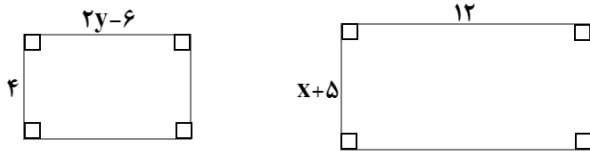
۱۶. مقیاس یک نقشه ۱:۱۰۰۰ است. اگر فاصله ی بین دو نقطه روی نقشه ۲/۵ سانتی متر باشد، فاصله ی این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟

۱۷. الف) آیا دو لوزی دلخواه همواره متشابه اند چرا؟

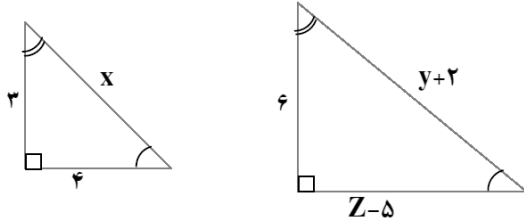
ب) آیا دو مستطیل دلخواه همواره متشابه اند؟ چرا؟

۱۸. الف) نسبت تشابه دو شکل هم نهشت را بنویسید.

ب) دو مستطیل زیر باهم مشابه اند. مقدار x, y را به دست آورید. (نسبت تشابه آن ها $\frac{2}{3}$ است).



۱۹. دو مثلث زیر باهم متشابه اند مقادیر Z, y, x را به دست آورید.



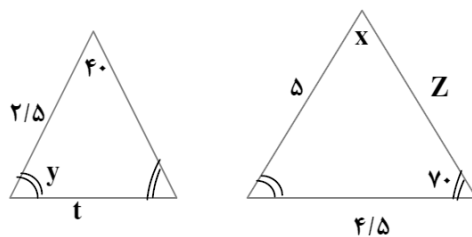
۲۰. مثلث ABC به ضلع ۴ و ۵ و ۶ با مثلث DEF به ضلع $\frac{1}{2}x + 9, 10, 8$ باهم متشابه اند:

الف) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

ب) مقدار X را به دست آورید.

۲۱. دو مثلث متساوی الساقین زیر باهم متشابه اند.

الف) مقادیر مجهول را روی شکل بنویسید.



ب) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

پایان فصل سوم

