
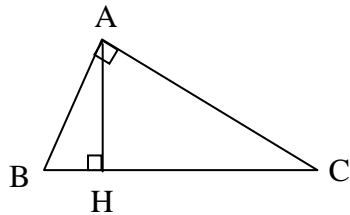


قسمت اول: هندسه

مثث قائم الزاویه: 



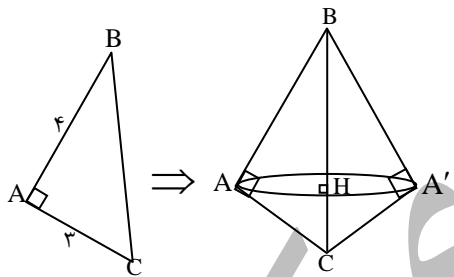
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{HB} \times \overline{HC}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{CH} \times \overline{BC} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{BH} \times \overline{BC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \right)^2 = \frac{\overline{HC}}{\overline{HB}}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AH} \times \overline{BC}$$

مثال: مثلث قائم الزاویه ABC ، $(\hat{A} = 90^\circ)$ را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه قدر است؟

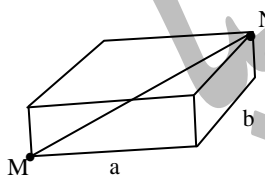


حجم $V = \frac{1}{3} \pi \times \overline{AH}^2 \times \overline{BC}$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$$

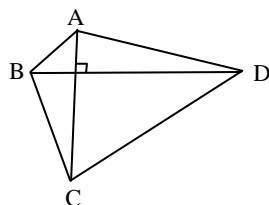
فیناغورس: 

اندازه‌ی قطر مکعب مستطیل:



$$\overline{MN} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

نکته: در هر چهارضلعی که قطرهایش برهم عموداند، داریم:

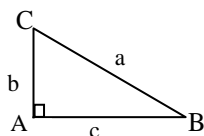


$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$$

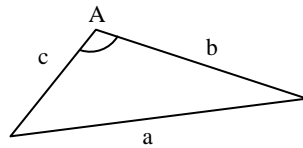
نکته: اگر ضلع مقابل به A را a ، و ضلع مقابل به B را b و ضلع مقابل به C را c نمایش دهیم،

داریم:

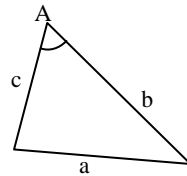
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$



$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

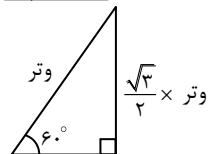
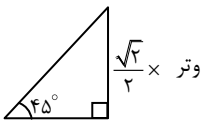
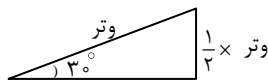


نکته: در هر مثلث قائم الزاویه :

- ضلع مقابل به زاویه 30° درجه، نصف وتر است.

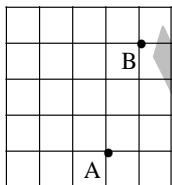
- ضلع مقابل به زاویه 45° درجه، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است.

- ضلع مقابل به زاویه 60° درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.



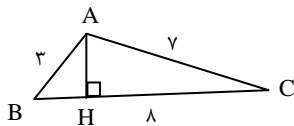
نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

سوال ۱: در صفحه شطرنجی زیر، یک مورچه می خواهد از نقطه A به نقطه B که در پشت این صفحه است، برود. اگر طول هر پاره خط کوچک، ۱ واحد باشد، طول کوتاه ترین مسیری که مورچه باید طی کند، چقدر است؟

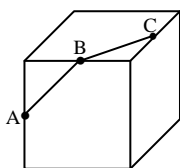


- (۱) $2\sqrt{3}$
- (۲) $3\sqrt{2}$
- (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- (۴) $\sqrt{20}$

سوال ۲: در مثلث ABC ، ارتفاع نظیر ضلع ۸ سانتی متری را رسم کردیم. در این صورت اندازه HC چه قدر است؟ اندازه زاویه B ، چند درجه است؟

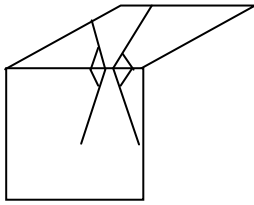


سوال ۳: در مکعب مقابل، اندازه زاویه B ، چند درجه است؟ نقاط A و B و C ، وسط اضلاع هستند.

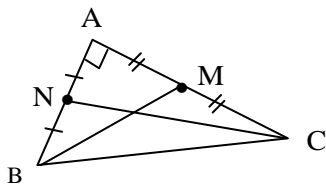


- (۱) 15°
- (۲) 135°
- (۳) 120°
- (۴) 90°

نکته: هرگاه ۲ صفحه برهم عمود باشند. هر دو خطی که روی یال مشترک با یکدیگر برخورد می کنند، برهم عمودند.



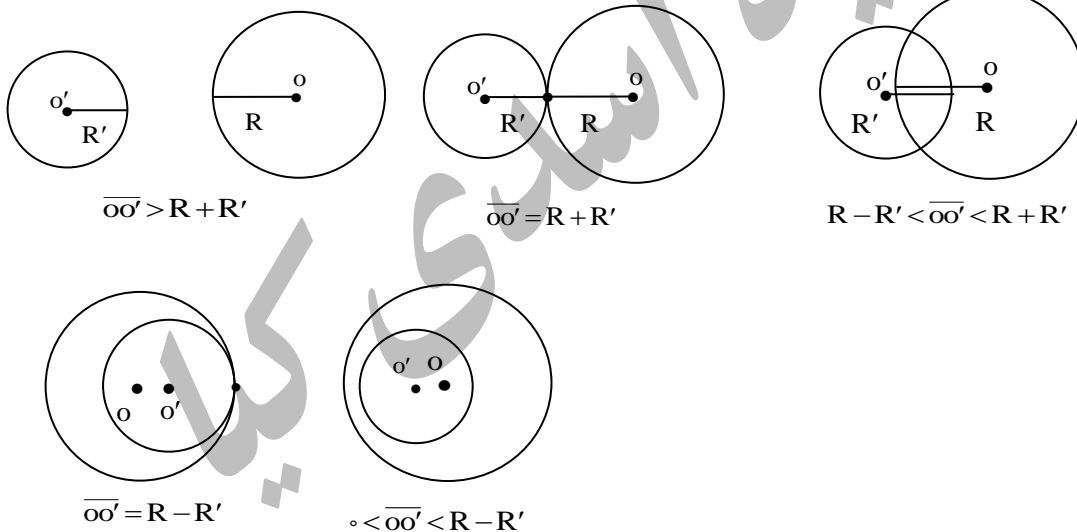
نکته: در هر مثلث قائم الزاویه، مجموع مربعات دو میانه‌ی نظیر ضلع‌های قائم، برابر است با $\frac{5}{4}$ مربع وتر است:



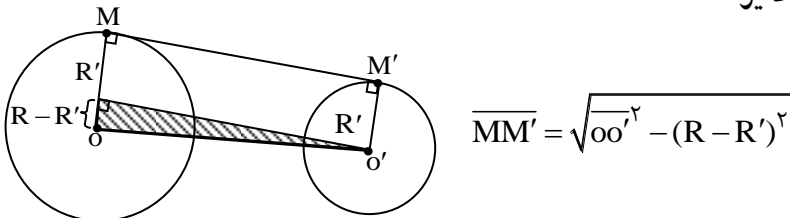
$$\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \frac{5}{4} \overline{BC}^2$$

دایره:

وضعیت ۲ دایره نسبت به هم:

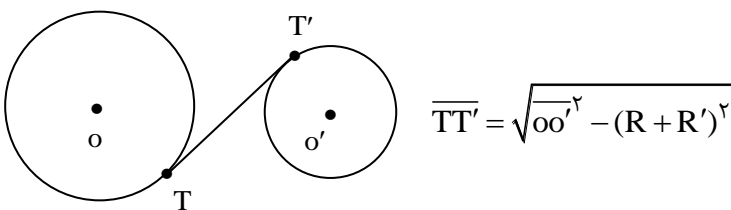


نکته: طول مماس مشترک خارجی دو دایره:



$$\overline{MM'} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - (R - R')^2}$$

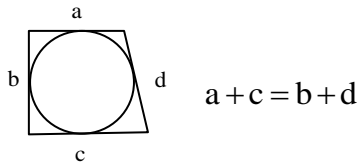
نکته: طول مماس مشترک داخلی دو دایره:



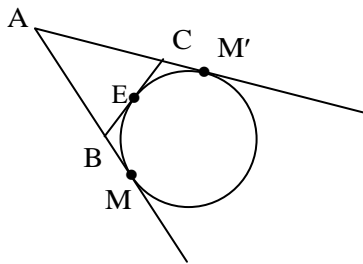
$$\overline{TT'} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - (R + R')^2}$$

نکته: هرگاه بر دایره‌ای ۲ مماس رسم کنیم، طول مماس‌ها باهم برابر است.

نتیجه: در چهارضلعی محیطی همواره داریم:



نتیجه: در شکل زیر، محیط مثلث ABC همواره ثابت است و مستقل از حالت قرار گرفتن مماس BC بر دایره است. زیرا $\overline{BE} = \overline{BM}$ و هم‌چنین $\overline{CE} = \overline{CM'}$ است.



رابطه‌های زیر را در دایره‌ها به خاطر بسپارید:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۱- زاویه ی ظلّی

$$\text{زاویه: } \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

$$\text{ضلع: } \overline{MA} \times \overline{MD} = \overline{MB} \times \overline{MC}$$

۲- زاویه ی داخلی

$$\text{زاویه: } \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$

$$\text{ضلع: } \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$$

۳- زاویه ی خارجی

$$\text{زاویه: } \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2}$$

$$\text{ضلع: } \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC}^2$$

۴- زاویه ی خارجی با یک ضلع مماس

$$\text{زاویه: } \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$

$$\text{زاویه: } \hat{M} + \widehat{AB} = 180^\circ$$

$$\text{ضلع: } \overline{MA} = \overline{MB}$$

۵- زاویه ی خارجی با دو ضلع مماس

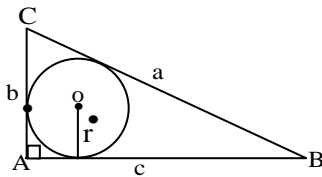
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

۶- چهارضلعی محاطی

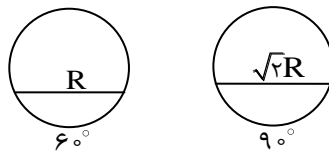
نکته: شعاع دایره‌ی محاطی در هر مثلث قائم‌الزاویه با وتر a و با ضلع‌های قائم b و c از رابطه‌ی

$$r = \frac{b+c-a}{2}$$

به دست می‌آید:



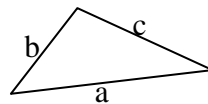
نکته: وترهای و نظیر کمان‌های 60° و 90° درجه بر حسب R برابرند با:



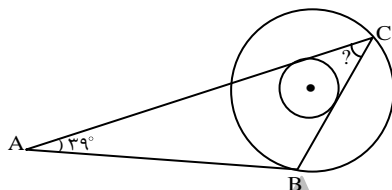
نکته: مساحت مثلث ABC با ضلع‌های a ، b و c برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2} \text{ نصف محیط}$$



سوال ۴: در شکل زیر دو دایره‌ی هم‌مرکز وجود دارد که در آن وتر BC بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس شده است. از A ، مماس AB را بر دایره‌ی بزرگ‌تر و مماس AC را بر دایره‌ی کوچک‌تر رسم می‌کنیم. اگر



$\hat{A} = 39^\circ$ باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی C چند درجه است؟

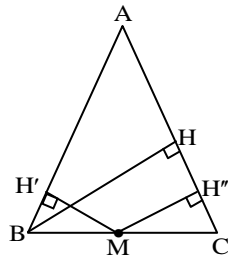
- | | |
|--------|--------|
| ۴۲ (۲) | ۳۴ (۱) |
| ۵۲ (۴) | ۴۵ (۳) |

هندسه‌ی نهم: همنهشتی

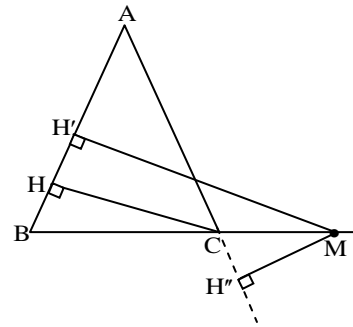
سوال ۵: کدام عبارت زیر درست است؟

- الف) اگر محیط دو مثلث باهم برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.
- ب) اگر مساحت دو مثلث باهم برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.
- ج) اگر هم محیط و هم مساحت دو مثلث با یک‌دیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشت‌اند.
- د) اگر محیط و یک زاویه از مثلثی با محیط و یک زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.
- ه) اگر محیط و دو زاویه از مثلثی با محیط و دو زاویه از مثلثی برابر باشند، دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.

نکته: در هر مثلث متساوی الساقین داریم:



$$\overline{MH'} + \overline{MH''} = \overline{BH}$$



$$\overline{MH'} - \overline{MH''} = \overline{CH}$$

نکته: در هر دوزنقه هرگاه وسط دو ساق را به هم وصل کنیم، داریم:



$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$$

تشابه:

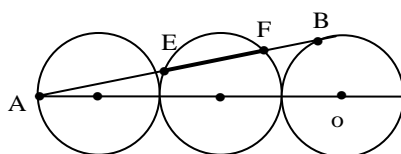
سوال ۶: کدام جمله درست است؟

- ۱- دو چند ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه هستند.
 - ۲- دو n ضلعی منتظم همواره باهم متشابه هستند.
- نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ضلع‌ها، نسبت نیم‌سازها، نسبت ارتفاع‌ها، نسبت میان‌ها و نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.
- نکته: در دو شکل متشابه، نسبت مساحت‌ها، با مجذور نسبت تشابه آن‌ها برابر است.

نکات تشابه در مثلث‌های قائم‌الزاویه:

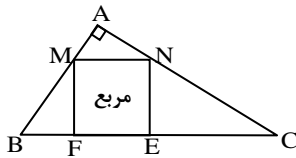
- برابر بودن یک زاویه ی تند.
- متناسب بودن ضلع‌های قائم.
- متناسب بودن وتر و یک ضلع.
- متناسب بودن وترها و ارتفاع‌های نظیر دو وتر.

سوال ۷: در شکل زیر، ۳ دایره‌ی مساوی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر برهم مماس‌اند و مرکز آن‌ها روی یک خط راست قرار دارد. اگر مماس AB را رسم کنیم، طول وتر EF چند سانتی‌متر است؟



- (۱) ۱۶
- (۲) ۱۲
- (۳) ۸
- (۴) ۶

سوال ۸: در شکل زیر چند جفت مثلث متشابه وجود دارد؟



- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

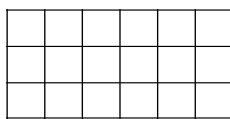
نکته: در شکل فوق، داریم:

$$\overline{BF} \times \overline{EC} = \text{مساحت مربع}$$

نکته: هر شکل با خودش همزهشت و متشابه است.

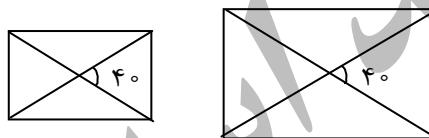
نکته: در دو مستطیل متشابه، نسبت عرض به طول آن‌ها باهم برابر است.

سوال ۹: در شکل زیر چند مستطیل متشابه با مستطیل بزرگ وجود دارد؟

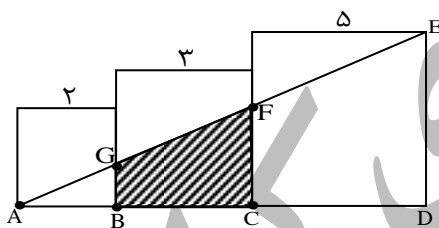


- ۲۶ (۱)
- ۲۸ (۲)
- ۳۴ (۳)
- ۴۰ (۴)

نکته: دو مستطیل که زاویه‌ی بین قطرهایشان باهم برابر باشد، با یکدیگر متشابه هستند.

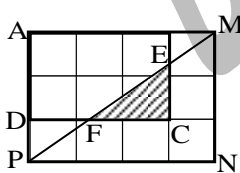


سوال ۱۰: مساحت قسمت رنگی چند واحد است؟



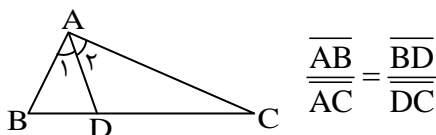
- ۴ (۱)
- ۴/۷۵ (۲)
- ۵/۲۵ (۳)
- ۵/۵ (۴)

سوال ۱۱: در شکل زیر، مساحت قسمت مشترک دو شکل چند واحد است؟



- ۲۵/۲۴ (۱)
- ۱۰/۹ (۲)
- ۵/۴ (۳)
- ۶/۵ (۴)

نکته: در هر مثلث با رسم نیم‌ساز داریم:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

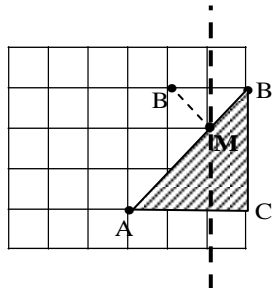
اثبات از طریق مساحت.

نکته: هرگاه مختصات رئوس شکل را a برابر کنیم، شکل به وجود آمده با شکل اولیه متشابه است. نسبت

محیط این دو شکل، a و نسبت مساحت این دو شکل، a^۲ است.

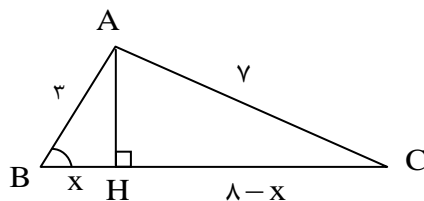
پاسخنامه تشریحی سؤالات قسمت اول (هندسه)

۱- گزینه‌ی (۲)



$$\begin{aligned} \overline{AB'}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2 \\ \Rightarrow \overline{AB'}^2 &= 3^2 + 3^2 = 18 \\ \overline{AB'} &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

-۲

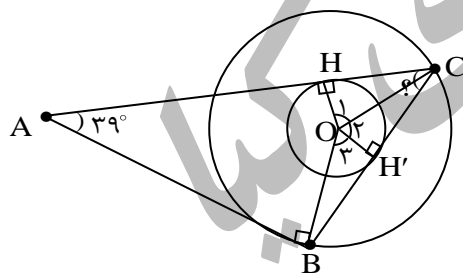


$$\begin{aligned} \overline{AH}^2 &= 3^2 - x^2 \\ \overline{AH}^2 &= 7^2 - (8-x)^2 \\ \Rightarrow 9 - x^2 &= 49 - 64 - x^2 + 16x \Rightarrow x = \frac{24}{16} = 1.5 \Rightarrow HC = 6.5 \end{aligned}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH، چون \overline{BH} نصف AB است، پس $\hat{BAH} = 30^\circ$ و در نتیجه $\hat{B} = 60^\circ$ درجه است.

۳- گزینه‌ی (۴) ۹۰ درجه

۴- گزینه‌ی (۱)



در چهار ضلعی AHOB، $\hat{A} + \hat{HOB} = 180^\circ$ پس $\hat{HOB} = 141^\circ$

از طرفی مثلث‌های OHC و OH'C و OH'B، با یکدیگر هم‌نهشت هستند پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3$ است. پس مجموع سه زاویه \hat{O}_1 و \hat{O}_2 و \hat{O}_3 برابر است با:

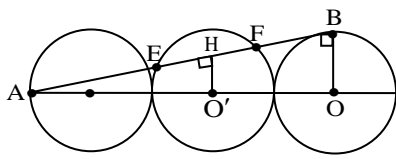
$$360 - 141 = 219$$

پس زاویه‌ی O_1 می‌شود $219 \div 3 = 73$ در نتیجه زاویه‌ی HOH' می‌شود، $146 = 73 \times 2$ و در نتیجه زاویه‌ی C، ۳۴ درجه است.

۵- گزینه‌ی (هـ)

۶- گزینه‌ی (۲)

۷- گزینه‌ی (۱)

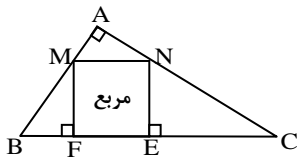


$$\begin{aligned} \triangle AO'H \sim \triangle AOB &\Rightarrow \frac{AO'}{AO} = \frac{O'H}{OB} \\ \text{تساوی ۲ زاویه} & \\ \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{O'H}{6} &\Rightarrow O'H = 3 \end{aligned}$$

رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث O'EH:

$$O'H^2 + EH^2 = O'E^2 \Rightarrow 3^2 + EH^2 = 6^2 \Rightarrow EH = 4 \Rightarrow EF = 8$$

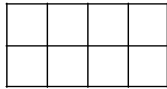
۸- گزینه‌ی (۴)



$$\begin{aligned} (\triangle AMN, \triangle BMF), (\triangle AMN, \triangle ENC) \\ (\triangle BMF, \triangle ENC), (\triangle AMN, \triangle ABC) \\ (\triangle BMF, \triangle ABC), (\triangle ENC, \triangle ABC) \end{aligned}$$



۱۵



۶

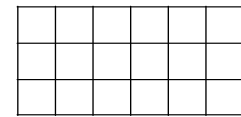
$$15 + 6 + 12 + 1 = 34$$



۱۲

مستطیل بزرگ

۱

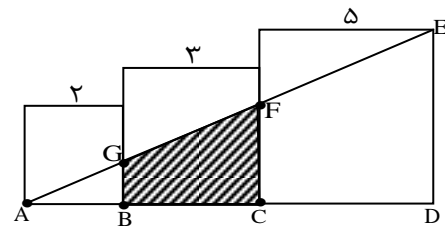


۹- گزینه‌ی (۳)

$$\triangle AFC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{FC}{ED} \Rightarrow FC = 2,5$$

$$\triangle ABG \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BG}{FC} \Rightarrow BG = 1$$

$$S_{BCFG} = \frac{(2,5 + 1) \times 3}{2} = 5,25$$



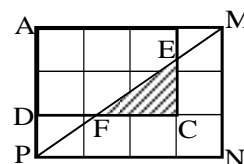
۱۰- گزینه‌ی (۳)

$$\triangle BME \sim \triangle MAP \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BE}{AP} \Rightarrow BE = \frac{3}{4}$$

$$EC = BC - BE = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\triangle PDF \sim \triangle PAM \Rightarrow \frac{FD}{AM} = \frac{PD}{AP} \Rightarrow FD = \frac{4}{3}$$

$$FC = DC - FD = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow S_{\triangle EFC} = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{24}$$



۱۱- گزینه‌ی (۱)