دبیرستان غیر دولتی نیک‌نام

فصل دوم ریاضی ۹

عددهای حقیقی

مدرس: جوان

۱- عددهای گویا:

قبل از معرفی عددهای گویا، چند مجموعهٔ عددی از جزوهٔ فصل قبل را یادآوری می‌کنیم.

❖ **مجموعهٔ اعداد طبیعی:** این مجموعه شامل تمام عددهای کامل و مثبت است:

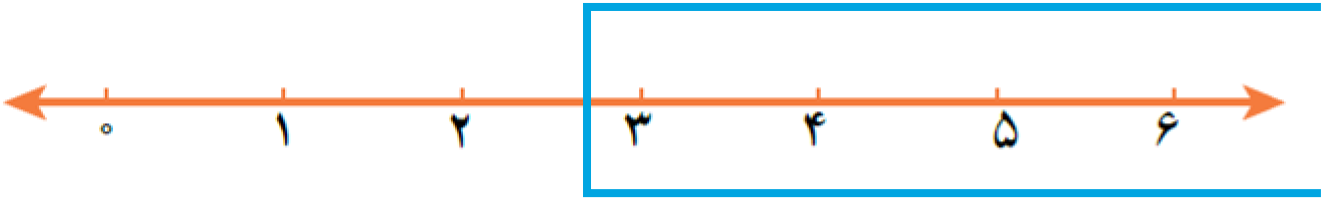
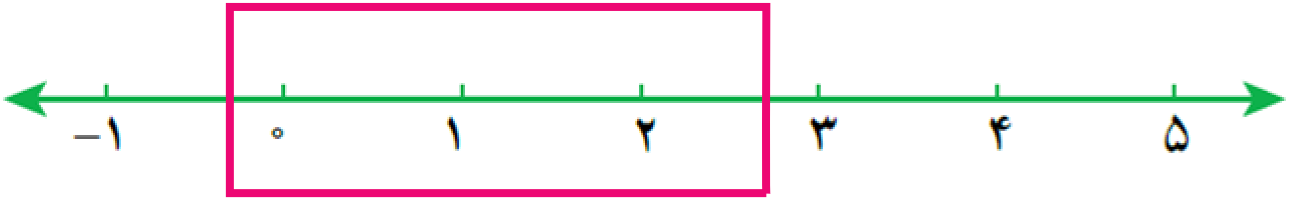
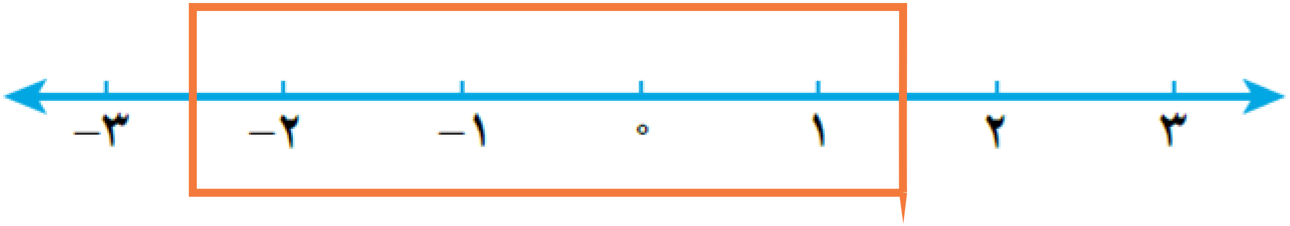
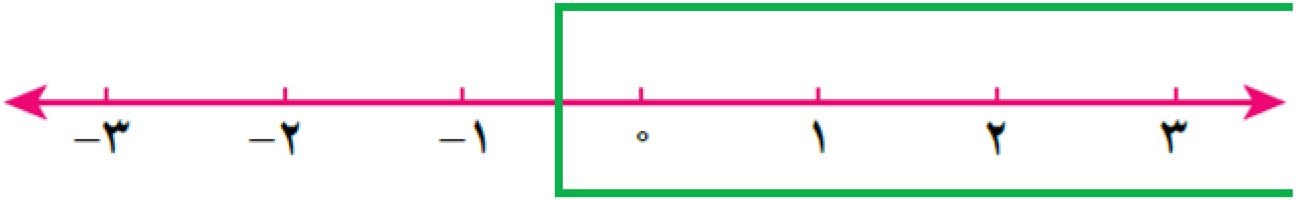
$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ \ldots\}$$

❖ **مجموعهٔ اعداد حسابی:** این مجموعه شامل تمام عددهای طبیعی به همراه عدد صفر است:

$$W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ \ldots\}$$

❖ **مجموعهٔ اعداد صحیح:** شامل تمام عددهای طبیعی، قرینهٔ این اعداد و عدد صفر است:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ \ldots\}$$

توصیف	زبان نمادین	نمایش هندسی (محور)
عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \mid x\in \mathbb{N} , x\geq ۳\}$ $\{۳ , ۴ , ۵ , \ldots\}$	
عددهای حسابی	$\{x \mid x\in w , x\leq ۲\}$ $\{ ۰,۱,۲ \}$	
عددهای صحیح بین ۲ و ۳−	$\{x \mid x\in \mathbb{Z} , -۳ < x < ۲\}$ $\{ -۲, -۱,۰,۱ \}$	
عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱−	$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -۱\}$ $\{ ۰,۱,۲,۳ \}$	

اعداد صحیح برای تمام محاسبات مورد احتیاج ما کافی نیستند. مثلاً:

«وقتی یک شیء (مثلاً یک سیب) را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، عدد مربوط به هر قسمت، یک عدد طبیعی یا صحیح نخواهد بود.»

در سال‌های قبل با کسرهای مربوطه آشنا شده‌ایم و اکنون مجموعهٔ تمام این اعداد را به صورت دقیق و نمادین معرفی می‌کنیم:

«اعداد گویا» در حقیقت همان کسرهای متعارفی با علامت‌های مثبت و یا منفی هستند:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}:\ a,b\in \mathbb{Z}\ ,\ b\neq ۰\}$$

یعنی تمام کسرهایی که صورت و مخرج آنها دو عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد.

بنابراین تمام عددهای $-۳=-\frac{۶}{۲}$، $۳=\frac{۱۲}{۴}$ و $۰=\frac{۰}{۱}$ مثال‌هایی از عددهای گویا هستند. بویژه:

تمام عددهای طبیعی و صحیح هم عدد گویا محسوب می‌شوند!

زیرا می‌توان به این عددها مخرج ۱ داد.

نکته: توجه کنید که اگر یک عدد گویا منفی باشد، می‌توان منفی را به صورت کسر منتقل کرد؛

مثلاً:

$$-\frac{۳}{۴}=\frac{-۳}{۴} \qquad \text{و} \qquad -۴=\frac{-۴}{۱}$$

در نتیجه، مجموعهٔ اعداد گویا را می‌توان به روش زیر هم معرفی نمود:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}:\ a\in\mathbb{Z}\ ,\ b\in\mathbb{N}\ \}$$

به عبارت دیگر: **مخرج یک عدد گویا را می‌توان همواره عددی مثبت (طبیعی) در نظرگرفت.**

مشاهده کردید که به عنوان نمونه عدد $-\frac{۳}{۴}$ را می‌توان به روش‌های دیگری چون $\frac{-۳}{۴}$ و یا $\frac{۳}{-۴}$ هم نمایش داد. در نتیجه می‌توان به مطلب مهمی اشاره کرد:

هر عدد گویا بیش از یک نمایش دارد!

مثال: پنج عدد گویا که با $\frac{۳}{۲}$ برابر باشند، بنویسید.

واضح است که این کار را می‌توان با ضرب عددهایی یکسان در صورت و مخرج انجام داد:

$$\frac{۳}{۲}=\frac{۳\times۲}{۲\times۲}=\frac{۳\times۳}{۲\times۳}=\frac{۳\times۴}{۲\times۴}=\frac{۳\times۵}{۲\times۵}=\frac{۳\times۶}{۲\times۶} \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{۶}{۴}=\frac{۹}{۶}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۸}{۱۲}$$

این کار را هر قدر بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم و بنابراین: **هر عدد گویا بی‌شمار نمایش دارد!**

مخرج مشترک:

یکی از نتایج نمایش‌های مختلف عددهای گویا، مفهوم **« مخرج مشترک‌گیری»** بین دو عدد با کاربردهای فراوان است. فرض کنید می‌خواهیم عددهای گویای $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{-۳}{۸}$ را با مخرج مشترک بنویسیم. دو روش وجود دارد:

❖ روش اول: صورت و مخرج کسر اول را در مخرج کسر دوم و صورت و مخرج کسر دوم را در مخرج کسر اول ضرب کنیم:

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۵\times۸}{۶\times۸}\rightarrow\frac{۴۰}{۴۸} \quad \text{و} \quad \frac{-۳}{۸}=\frac{-۳\times۶}{۸\times۶}\rightarrow\frac{-۱۸}{۴۸}$$

❖ روش دوم: ابتدا ک.م.م. مخرج‌ها یعنی **۲۴** = **[۶ ,۸]** را محاسبه کرده و سپس صورت و مخرج کسرها را در عددهایی ضرب کنیم که مخرج هر دو کسر همان ک.م.م. شوند:

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۵\times۴}{۶\times۴}\rightarrow\frac{۲۰}{۲۴} \quad \text{و} \quad \frac{-۳}{۸}=\frac{-۳\times۳}{۸\times۳}\rightarrow\frac{-۹}{۲۴}$$

توجه: روش دوم بهترین انتخاب است؛ چون کسرها با عددهای کوچکتری در صورت و مخرج نوشته می‌شوند.

مثال: سه کسر $\frac{۴}{۳}$، $\frac{-۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۸}$ را با مخرج یکسان بنویسید.

ابتدا بین ۳ و ۱۲ ک.م.م را تعیین می‌کنیم که همان عدد ۱۲ است و سپس بین این عدد (یعنی ۱۲) و عدد ۱۸ ک.م.م را مشخص می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که: $[۱۲,۱۸] = ۳۶$

در نتیجه، مخرج مشترک سه کسر داده شده برابر ۳۶ است. طبق روش بالا، تمام کسرها را با مخرج ۳۶ می‌نویسیم:

$$\frac{۴}{۳} = \frac{۴\times۱۲}{۳\times۱۲} \rightarrow \frac{۴۸}{۳۶} \quad و \quad \frac{-۵}{۱۲} = \frac{-۵\times۳}{۱۲\times۳} \rightarrow \frac{-۱۵}{۳۶} \quad و \quad \frac{۷}{۱۸} = \frac{۷\times۲}{۱۸\times۲} \rightarrow \frac{۱۴}{۳۶}$$

بنابراین هر سه عدد با مخرج یکسان نوشته شدند.

مقایسه اعداد گویا (کاربردهای بیشتری از مخرج مشترک‌گیری):

برای مقایسهٔ اعداد گویا باید نکات زیر را در نظر داشته باشیم:

الف) یک عدد گویا با علامت مثبت بزرگتر است از هر عدد گویا با علامت منفی. مثلاً:

$$\frac{-۲۸}{۱۱} < \frac{۳}{۱۷}$$

ب) برای مقایسهٔ دو عدد گویای مثبت:

- ابتدا آنها را هم مخرج می‌کنیم. (با مخرج مشترک‌گیری یا ضرب مخرج‌ها در هم!)
- سپس صورت‌هایشان را مقایسه می‌کنیم؛ هر کدام که بزرگتر بود، از عدد دیگر بزرگتر است.

مثلاً:

$$\frac{۸}{۱۷} > \frac{۳}{۱۷}$$

مثال: اعداد گویای روبرو را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: $\frac{۳}{۷}, \frac{۵}{۲۴}, \frac{۱}{۳}$

ابتدا کسرها را با استفاده از ک.م.م که ۱۶۸ است، هم مخرج می‌کنیم:

$$\frac{۳\times۲۴}{۷\times۲۴}=\frac{۷۲}{۱۶۸}, \quad \frac{۵\times۷}{۲۴\times۷}=\frac{۳۵}{۱۶۸}, \quad \frac{۱\times۵۶}{۳\times۵۶}=\frac{۵۶}{۱۶۸}$$

حالا طبق نکتهٔ قبل و با مقایسه صورت‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۳۵}{۱۶۸}<\frac{۵۶}{۱۶۸}<\frac{۷۲}{۱۶۸} \Rightarrow \frac{۵}{۲۴}<\frac{۱}{۳}<\frac{۳}{۷}$$

نکته: وقتی دو عدد گویای مثبت صورت‌های برابر دارند، عددی که مخرج کوچکتری دارد، از عدد دیگر بزرگتر است. به عنوان نمونه‌ها: $\frac{۳}{۵}<\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۷}>\frac{۱}{۱۲}$

توجه داشته باشید که اگر دو عدد منفی باشند، نامساوی برعکس خواهد شد:

$$\frac{۴}{۵}<\frac{۴}{۳} \Rightarrow -\frac{۴}{۵}>-\frac{۴}{۳}$$

یادآوری محاسبه با اعداد گویا:

❖ در جمع یا تفریق، ابتدا مخرج‌ها را مشترک کرده، سپس یکی از مخرج‌ها را نوشته و صورت‌ها را جمع یا تفریق می‌کنیم.

مثال: به نمونهٔ روبرو توجه کنید:

$$۳\frac{۱}{۲}-۲\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۲}-\frac{۸}{۳}=\frac{۷\times۳}{۲\times۳}-\frac{۸\times۲}{۳\times۲}=\frac{۲۱}{۶}-\frac{۱۶}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

❖ در ضرب، صورت‌ها و مخرج‌ها به ترتیب در هم ضرب می‌شوند.

مثال: به نمونهٔ روبرو توجه کنید:

$$۳\frac{۱}{۲}\times۲\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۲}\times\frac{۸}{۳}=\frac{۵۶}{۶}=\frac{۲۸}{۳}$$

❖ در تقسیم علامت تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را معکوس می‌کنیم. سپس ضرب را انجام می‌دهیم.

مثال: به نمونهٔ روبرو توجه کنید:

$$۳\frac{۱}{۲}\div۲\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۲}\div\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۲۱}{۱۶}$$

نکته:

تعیین یک عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده چنین انجام می‌شود:

- ابتدا مخرج‌های دو کسر را یکسان می‌کنیم.
- سپس کسری می‌نویسیم که مخرج آن با مخرج کسرها یکسان و صورت آن عددی بین صورت‌های آن دو عدد گویا باشد.

مثال: عددی گویا بین عددهای $\frac{۱}{۳}$ **و** $\frac{۵}{۷}$ بنویسید.

مخرج‌ها به صورت روبرو یکسان نوشته می‌شوند:

$$\frac{۵}{۷}=\frac{۵\times۳}{۷\times۳}=\frac{۱۵}{۲۱} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۷}{۳\times۷}=\frac{۷}{۲۱}$$

اکنون می‌توان عددهای گویای زیر را بین آنها نوشت:

$$\frac{۸}{۲۱},\frac{۹}{۲۱},\ldots,\frac{۱۴}{۲۱}$$

نکته:

هنگامی که مخرج‌ها یکسان است، اگر صورت‌ها دو عدد متوالی (پشت سر هم) بودند، برای تعیین تعداد k عدد بین آنها، ابتدا صورت و مخرج کسرها را در k+۱ ضرب کرده و سپس مانند بالا عمل می‌کنیم.

مثال: بین عددهای گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چهار عدد گویا بنویسید.

ابتدا مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=\frac{۳}{۶} \quad , \quad \frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۲}{۳\times۲}=\frac{۲}{۶}$$

حالا طبق نکتهٔ قبل، صورت و مخرج هر دو کسر را در عدد ۵ = ۴+۱ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۳\times۵}{۶\times۵}=\frac{۱۵}{۳۰} \quad , \quad \frac{۲\times۵}{۶\times۵}=\frac{۱۰}{۳۰}$$

مشاهده می‌کنیم بین دو عدد گویای فوق، چهار عدد گویای زیر وجود دارد:

$$\frac{۱۱}{۳۰},\frac{۱۲}{۳۰},\frac{۱۳}{۳۰},\frac{۱۴}{۳۰}$$

نکته:

روشی سریع برای نوشتن یک کسر بین دو عدد گویا این است که صورت‌های دو کسر را با هم و مخرج‌های آن ها را نیز با هم جمع کرده و عددی جدید تشکیل دهیم:

مثال: بین دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ عددی گویا تعیین می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}<\frac{۱+۲}{۲+۳}<\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۵}<\frac{۲}{۳}$$

با تکرار روش فوق می‌توان هر تعداد دلخواه عدد گویا بین دو عدد داده شده نوشت. مثلاً:

$$\frac{۱}{۲}<\frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۵}<\frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۵}<\frac{۳+۲}{۵+۳}<\frac{۲}{۳}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۵}<\frac{۵}{۸}<\frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۵}<\frac{۵}{۸}<\frac{۷}{۱۱}<\frac{۲}{۳}$$

لذا به آسانی بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ سه عدد گویا نوشتیم که البته می‌توان این روند را تا بینهایت ادامه داد.

نتیجه: بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

تبدیل عددهای گویا به اعشاری:

هرگاه در مورد یک عدد گویا صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، **« شکل اعشاری»** آن بدست می آید. به عنوان نمونه: در کسر $\frac{۱۲}{۵}$، از تقسیم عدد ۱۲ بر ۵، شکل اعشاری به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

در تبدیل یک عدد گویا به شکل اعشاری آن، حالت‌های مختلفی وجود دارد که آنها را به صورت دقیق بیان می‌کنیم. قبل از آن به یک مفهوم توجه کنید.

نکته:

اگر کسر گویای $\frac{a}{b}$ تا حد ممکن ساده شده باشد، آنگاه ب.م.م. صورت و مخرج برابر ۱ است:

$$(a,b)=1$$

در این صورت، کسر $\frac{a}{b}$ را **«تحویل‌ناپذیر»** یا **« ساده نشدنی»** به عنوان نمونه:

کسر $\frac{4}{7}$ ساده نشدنی است، چون ساده نمی‌شود و بعلاوه $(4, 7) = 1$.

کسر $\frac{25}{10}$ ساده نشدنی نبوده و $(10, 25) = 5$، ولی با ساده کردن به صورت $\frac{5}{2}$ تبدیل شده و اکنون ساده نشدنی است.

در نتیجه: هر کسری را می‌توان به صورت ساده‌ترین شکل آن (یعنی ساده نشدنی) نوشت.

نکته:

هنگام تبدیل کسر ساده نشدنی $\frac{a}{b}$ به صورت اعشاری آن سه حالت مختلف رخ می‌دهد:

حالت ۱: ممکن است در تجزیهٔ **b** یعنی مخرج به عوامل اول، تنها عددهای اول ۲ یا ۵ (یا هر دو) وجود داشته باشند. در این صورت ارقام اعشاری عدد حاصل **« مختوم»** یا **«پایان‌پذیر»** است.

مثال: شکل اعشاری کسر $\frac{۲۱}{۷۵}$ را بنویسید:

ابتدا کسر را به صورت ساده نشدنی تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۲۱}{۷۵} \longrightarrow \frac{۷}{۲۵}$$

چون تجزیهٔ مخرج به صورت $۲۵ = ۵^۲$ است، باید تقسیم صورت بر مخرج پس از چند مرحله پایان پذیرد:

$$\frac{۷}{۲۵} = ۰/۲۸$$

« عدد اعشاری مختوم»

حالت ۲: ممکن است در تجزیهٔ مخرج به عوامل اول، هیچ کدام از عددهای اول ۲ و ۵ وجود نداشته باشند. در این صورت هنگام تقسیم، یک یا چند رقم اعشاری تا بی‌نهایت بار تکرار خواهند شد. در چنین حالتی، به عدد اعشاری بدست آمده **« متناوب ساده»** گفته می‌شود.

مثال: شکل اعشاری کسر $\frac{۲۴}{۹۹}$ را بنویسید:

ابتدا کسر را به صورت ساده نشدنی تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۲۴}{۹۹} \longrightarrow \frac{۸}{۳۳}$$

چون تجزیهٔ مخرج به صورت ۱۱×۳=۳۳ است، باید رقم‌های اعشاری تکرار شوند که تقسیم ۸ بر ۳۳ این واقعیت را نشان می‌دهد:

$$\frac{۸}{۳۳} = ۰/۲۴۲۴۲۴\cdots = ۰/\overline{۲۴}$$ **« عدد اعشاری متناوب ساده»**

حالت ۳: ممکن است در تجزیهٔ مخرج به عوامل اول، هم عددهایی اول از بین ۲ و ۵ و هم عددهایی اول به جز آنها وجود داشته باشند. در این صورت هنگام تقسیم در قسمت اعشاری:

- ابتدا یک یا چند رقم غیر تکراری خواهیم داشت.
- سپس یک یا چند رقم اعشاری تا بی‌نهایت بار تکرار خواهند شد. در چنین حالتی، به عدد اعشاری بدست آمده **« متناوب مرکب»** گفته می‌شود.

مثال: شکل اعشاری کسر $\frac{۷}{۲۲}$ را بنویسید:

کسر داده شده ساده نشدنی است و تجزیهٔ مخرج به صورت ۲۲=۲×۱۱ است. شکل اعشاری این کسر از تقسیم عدد ۷ بر ۲۲ بدست خواهد آمد:

$$\frac{۷}{۲۲}=۰/۳۱۸۱۸۱۸۱\cdots=۰/۳\overline{۱۸}$$ **« عدد اعشاری متناوب مرکب»**

۲- عددهای حقیقی:

بسیاری از عددهای اعشاری که تاکنون با آن ها سر و کار داشته اید، عدد گویا هستند؛ یعنی می‌توان آنها را به صورت کسر متعارفی نشان داد. مثلاً: $۲۱/۲۳=\frac{۲۱۲۳}{۱۰۰}$ و $-۲/۱=\frac{-۲۱}{۱۰}$

با توجه به نکات بخش قبل، اگر عددی گویا باشد، شکل اعشاری آن به یکی از صورت‌های زیر است:

- ❖ رقم‌های اعشاری مختوم بوده و تمام می‌شوند. مانند:

$$۳/۲۲۷$$

- ❖ در صورتی که رقم‌های اعشاری تمام نشوند، باید یک یا چند رقم تا بی‌نهایت تکرار شوند. مانند:

$$۱۲/۶۶۶۶۶\cdots=۱۲/\overline{۶} \quad \text{و} \quad ۳/۴۱۳۳۳۳۳\cdots=۳/۴۱\overline{۳}$$

واضح است که عددهایی اعشاری غیر از این موارد هم وجود دارند:

عددهای گنگ:

به عنوان نمونه به عددهای اعشاری روبرو نگاه کنید: $\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۰۷\cdots$ و $۲/۱۲۲۳۵۴۹۵۲۶۷۲\cdots$

در این نمونه‌ها، اولاً رقم‌های اعشاری مختوم نیستند و ثانیًا این رقم‌ها تکرار نشده‌اند. پس:

این عددها را نمی‌توان به صورت کسر گویا نوشت!

به چنین عددهایی، **«عدد گنگ»** گفته و مجموعهٔ تمام آنها را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نشان می‌دهیم.

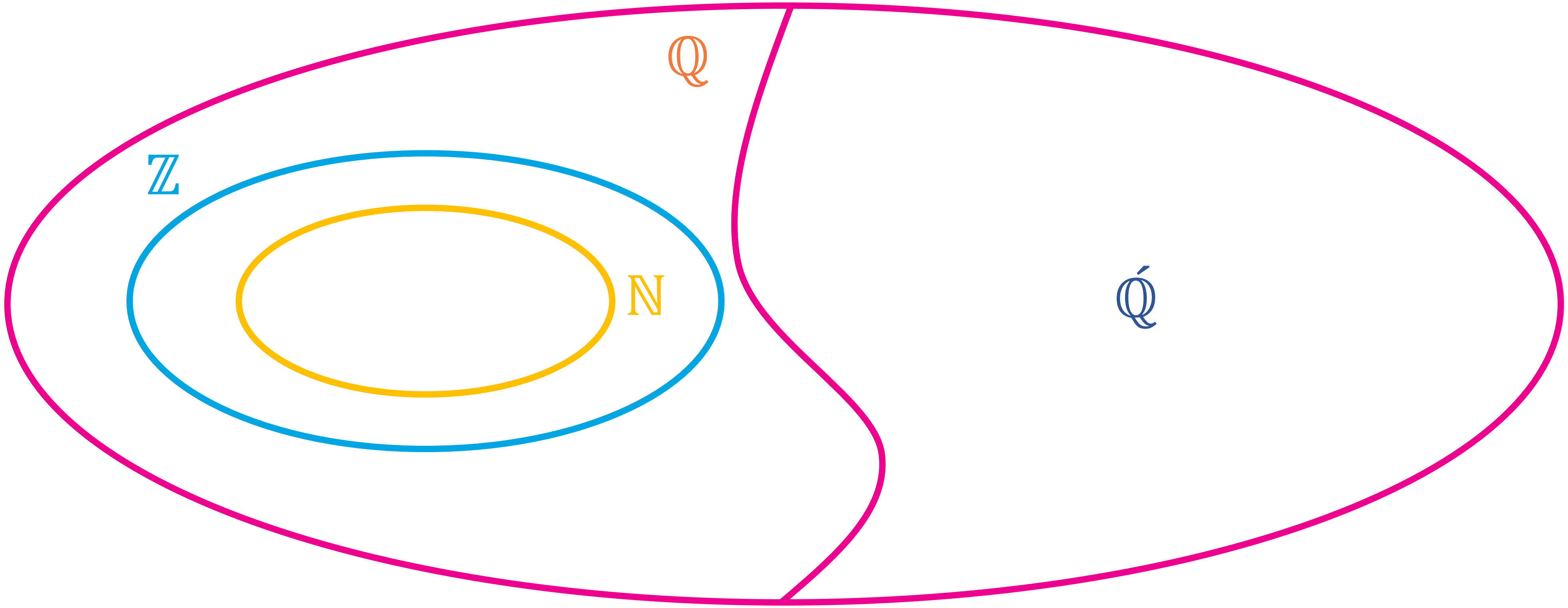
مثال‌ها: بهترین نمونه‌ها برای عدد گنگ عبارتند از:

هر عدد رادیکالی که جذر دقیق نداشته باشد، یک عدد گنگ است. به عنوان نمونه؛ عددهای $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ همگی گنگ هستند؛ ولی توجه کنید همهٔ عددهای رادیکالی گنگ نیستند. مانند $\sqrt{۴}$ و $\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}$، زیرا:

$$\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۴}{۳} \quad \text{و} \quad \sqrt{۴}=۲$$

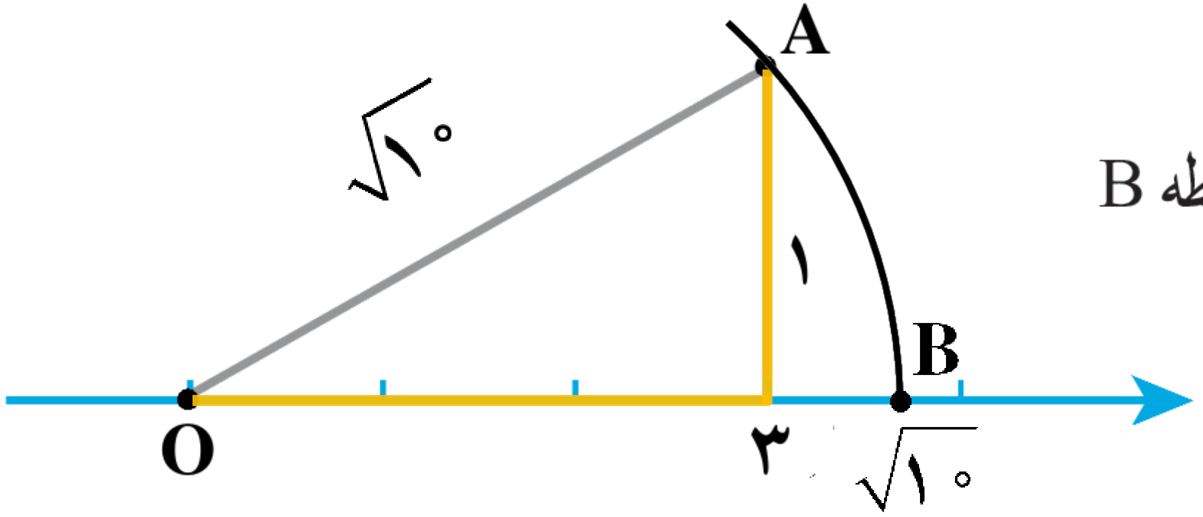
عدد $\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵\cdots$ هم که مقدار تقریبی آن **۳/۱۴** است، عددی گنگ می‌باشد.

عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$ ، ...۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱ و π را، که تعداد ارقام اعشاری آنها بی‌شمار و دارای دورهٔ تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.



به طور کلی جذر اعدادی که مربع کامل نیستند ، گنگ می باشد .

مثال : نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{۱۰}$ روی محور به‌صورت زیر است :



$$OA^{۲} = ۳^{۲} + ۱^{۲} = ۱۰ \Rightarrow OA = \sqrt{۱۰}$$

به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می‌کنیم. نقطه B روی محور عدد $\sqrt{۱۰}$ را نمایش می‌دهد.

مثال: اعضای مجموعه های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ را دو به دو با هم مقایسه کنید.

چون به هر عدد صحیح می‌توان مخرج ۱ داد، بنابراین هر عدد صحیح گویا هم هست و بنابراین:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

از طرفی گنگ بودن دقیقًا به معنای گویا نبودن است و در نتیجه:

$$\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Z} = \varnothing \quad \text{و} \quad \mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \varnothing$$

عددهای حقیقی:

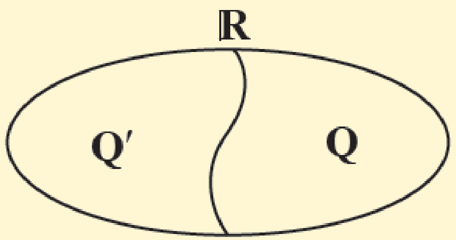
چنان که قبل از این هم گفتیم، هر عدد اعشاری یا گویاست و یا گنگ. اگر تمام این اعداد را در یک مجموعه قرار دهیم، **«مجموعهٔ عددهای حقیقی»** بدست می‌آید که نماد استاندارد آن $\mathbb{R}$ است. بنابراین:

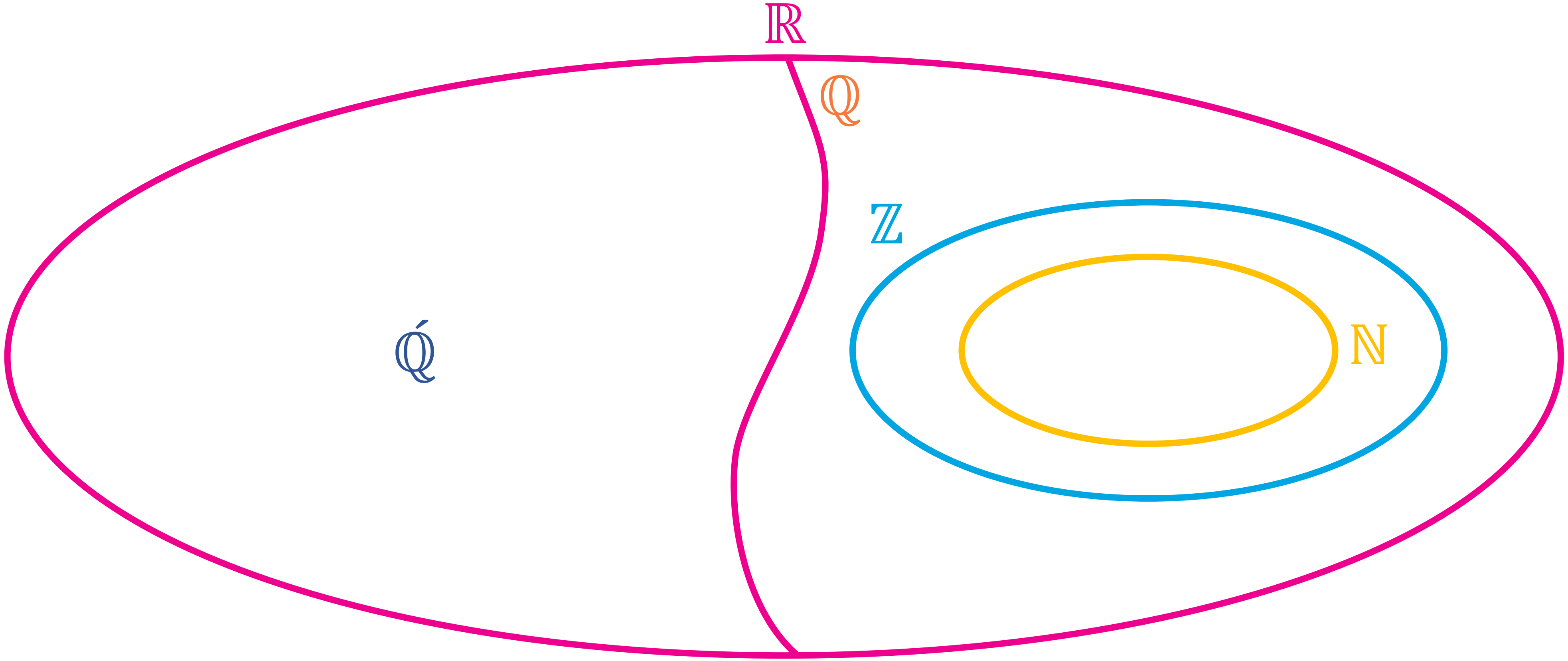
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$$

در نتیجه تمام عددهای ۳-، $\frac{۳}{۲}$، ۲/۱۳۴ و $\sqrt{۵}$ عضو مجموعهٔ $\mathbb{R}$ هستند. بعلاوه، همهٔ مجموعه‌های عددی قبلی، زیرمجموعهٔ آن محسوب می‌شوند:

$$\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

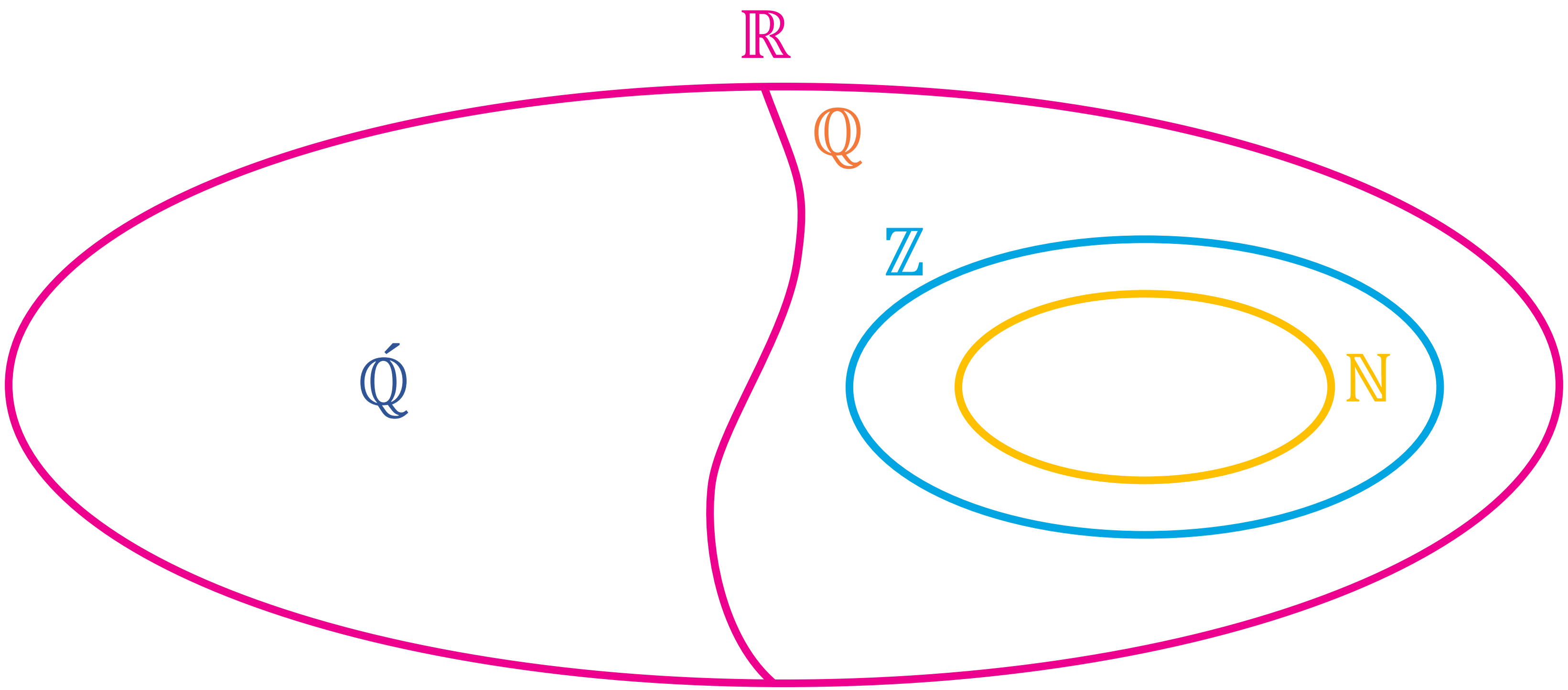
عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.
تساوی $\mathbb{R}=Q \cup Q'$ بین سه مجموعهٔ Q و Q' و $\mathbb{R}$ برقرار است.





۲ــ مجموعه‌های سطر اوّل را به مجموعهٔ مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اوّل با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.

$Q\cap Q'$	$Q\cap Z$	$\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$	$Q'\cap\mathbb{R}$	$Q\cup Q'$
$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\mathbb{N}$	Q'	$\mathbb{R}$



۳– قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی:

فاصلهٔ هر عدد روی محور اعداد تا مبدأ مختصات را **« قدرمطلق»** آن عدد گفته و با نماد $|\ \ |$ نشان می‌دهند. چون فاصله هیچ وقت منفی نمی‌شود، حاصل قدرمطلق یک عدد باید مثبت باشد. می‌توان گفت:

- قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خود آن عدد است: $x>0 \Rightarrow |x|=x$

  به عنوان نمونه: $|7|=7$ و $|12-9|=|3|=3$.

- قدرمطلق هر عدد منفی برابر قرینهٔ آن عدد است: $x<0 \Rightarrow |x|=-x$

  به عنوان نمونه: $|-5|=-(-5)=5$ و $|7-9|=|-2|=-(-2)=2$.

- قدرمطلق عدد صفر، همان صفر است:

$$|0|=0$$

نکته:

هنگام ساده کردن عبارات قدر مطلقی همواره به دو مورد مهم توجه داشته باشید:

- اگر داخل قدر مطلق یک عبارت محاسباتی وجود داشته باشد، باید آن را محاسبه کرده و با توجه به علامتِ جوابِ آن را از قدر خارج نمود. بنابراین:
- تساوی $|۵-۷\times۲| = ۵+۷\times۲$ نادرست است؛ بلکه: چون $۵-۷\times۲$ برابر -۹ بوده و عددی منفی است، در نتیجه: $|۵-۷\times۲| = -(۵-۷\times۲) = -۵+۷\times۲ = ۹$
- هنگامی که داخل قدرمطلق عددهای رادیکالی هم وجود داشته باشد، باید با استفاده از جذر تقریبی آنها تا یک رقم اعشار مانند مورد قبل، علامت عبارت حاصل را تعیین نموده و سپس عدد را از قدر خارج نمود. به چند جذر تقریبی اشاره می‌کنیم، بهتر است آنها را همواره در ذهن داشته باشید:

$\sqrt{۲} \cong ۱/۴$ $\quad$ $\sqrt{۳} \cong ۱/۷$ $\quad$ $\sqrt{۵} \cong ۲/۲$ $\quad$ $\sqrt{۶} \cong ۲/۴$ $\quad$ $\sqrt{۷} \cong ۲/۶$ $\quad$ $\sqrt{۸} \cong ۲/۸$

مثال: قدرمطلق عدد $\sqrt{۵}-۲$ را بیابید.

چون $۲/۲ \cong \sqrt{۵}$ از عدد ۲ بزرگتر است، پس $\sqrt{۵}-۲$ عددی منفی خواهد بود و بنابراین:

$$|۲-\sqrt{۵}|=-(۲-\sqrt{۵})=\sqrt{۵}-۲$$

مثال: به نمونه‌های دیگری توجه کنید:

$$|۳-\sqrt{۲}|=۳-\sqrt{۲}$$

$$|۲-\sqrt{۷}|=-(۲-\sqrt{۷})=\sqrt{۷}-۲$$

$$|\sqrt{۳}-۲|=-(\sqrt{۳}-۲)=۲-\sqrt{۳}$$

در پایان این جزوه، به عبارت‌های $(\sqrt{a})^۲$ و $\sqrt{a^۲}$ و بیان تفاوت آن دو می‌پردازیم:

- ➢ **عدد** $(\sqrt{a})^۲$: در مورد این عبارت دو نکتهٔ مهم وجود دارد:
  - مقدار a نمی‌تواند منفی باشد، زیرا زیر رادیکال نباید عدد منفی قرار گیرد.
  - تساوی زیر همواره برقرار است:

$$(\sqrt{a})^۲ = a$$

یعنی توان ۲ و رادیکال با هم حذف می‌شوند. به عنوان نمونه‌ها:

$$(\sqrt{۲-\sqrt{۲}})^۲ = ۲-\sqrt{۲} \qquad \text{و} \qquad (\sqrt{۷})^۲ = ۷$$

- ➢ **عدد** $\sqrt{a^۲}$: در مورد این عبارت نیز دو نکتهٔ مهم وجود دارد:
  - مقدار a می‌تواند هر عددی باشد، زیرا به توان ۲ می‌رسد و منفی نخواهد بود.

- تساوی $\sqrt{a^۲}=a$ نادرست است. به عنوان نمونه اگر بنویسیم:

$$\sqrt{(-۵)^۲}=-۵$$

عبارت بدست آمده نادرست است، زیرا عدد سمت چپ برابر $\sqrt{(-۵)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$ است. اما، استفاده ازقدرمطلق مشکل را برطرف خواهد نمود:

$$\sqrt{a^۲}=|a|$$

بنابراین $\sqrt{(-۵)^۲}=|-۵|=۵$ که کاملاً صحیح خواهد بود. به عنوان نمونه‌هایی دیگر:

$$\sqrt{۱۲^۲}=|۱۲|=۱۲ \quad \text{و} \quad \sqrt{(\sqrt{۵}-۳)^۲}=|\sqrt{۵}-۳|=-(\sqrt{۵}-۳)=-\sqrt{۵}+۳$$

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^{۲}}$	$\sqrt{(-۳)^{۲}}$	$\sqrt{۳^{۲}}$	$\sqrt{۶^{۲}}$	$\sqrt{(-۶)^{۲}}$	$\sqrt{(-۷)^{۲}}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^{۲}}$	$\sqrt{۳۲۵^{۲}}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدرمطلق، می‌توانیم بنویسیم : $\sqrt{a^{۲}} = |a|$