

فصل دوم

عددهای حقیقی

۱.۲ عددهای گویا

عددهای گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود، عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج باید عدد صحیح باشند و مخرج باید مخالف صفر باشد.)

نکته: اعداد گویا را با حرف \mathbb{Q} نشان می‌دهیم: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

جمع و تفریق اعداد گویا: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک، کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) می‌باشد.

$$\text{مثال: } \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{7}{18}\right) = \left(-\frac{5}{12}\right) + \left(+\frac{7}{18}\right) = \frac{-15+14}{36} = \frac{-1}{36}$$

مضرب‌های ۱۲: ۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ...

$$\rightarrow \text{ک.م.م} = ۳۶$$

مضرب‌های ۱۸: ۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ...

ضرب اعداد گویا: فقط در ضرب می‌توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس

صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم.

$$\text{مثال: } \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{10}\right) = +\frac{1}{2}$$

تقسیم اعداد گویا: کسر اول را نوشته، تقسیم را تبدیل به ضرب و کسر دوم را معکوس می‌کنیم.

$$\text{مثال: } \left(+\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{21}\right) = \left(+\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{21}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \div \left[\left(-\frac{1}{15}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)\right] = \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{-1+9}{15}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{15}{8}\right) = -\frac{5}{4}$$

مقایسه اعداد گویا: از دو روش می‌توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده و سپس کسرها را مقایسه می‌کنیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{7}{10}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \text{ و } \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{10}{20} \text{ و } \frac{7}{10} = \frac{14}{20} \rightarrow \frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{14}{20} < \frac{15}{20} \rightarrow \boxed{\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}}$$

ب) تبدیل به اعشار: صورت را بر مخرج تقسیم و خارج قسمت را تا دو رقم اعشار ادامه می‌دهیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{7}{10}$$

$$\frac{2}{5} = 0.40 \text{ و } \frac{3}{4} = 0.75 \text{ و } \frac{1}{2} = 0.50 \text{ و } \frac{7}{10} = 0.70 \rightarrow 0.40 < 0.50 < 0.70 < 0.75 \rightarrow \boxed{\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}}$$

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

پیدا کردن کسرهایی بین دو عدد گویا (کسری): چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی به

صورت زیر است:

روش اول: صورت‌ها را با هم مخرج و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{3}{4} = 0,75 \quad \text{و} \quad \frac{4}{5} = 0,80$$

$$\frac{3}{4} < \frac{3+4}{4+5} < \frac{4}{5} \rightarrow \frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{7+4}{9+5} < \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{11}{14} < \frac{4}{5}}$$

روش دوم: ابتدا مخرج مشترک گرفته، سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته

شده ضرب می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20} \quad \text{و} \quad \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20} \rightarrow \frac{15 \times 3}{20 \times 3} = \frac{45}{60} \quad \text{و} \quad \frac{16 \times 3}{20 \times 3} = \frac{48}{60} \rightarrow \boxed{\frac{45}{60} < \frac{46}{60} < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}}$$

انواع عددهای اعشاری:

الف) عدد اعشاری متناهی یا مختوم: اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود، آن عدد کسری مختوم نام دارد.

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\begin{array}{r|l} 3^{\circ} & 4 \\ -28 & 0,75 \\ \hline 2^{\circ} & \\ -2^{\circ} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مثال:

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسری یکی از عامل‌های ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، آن کسر مختوم است.

$$\frac{5}{8} \rightarrow 8 = 2^3$$

و

$$\frac{3}{2^{\circ}} \rightarrow 2^{\circ} = 2^2 \times 5$$

مثال:

ب) عدد اعشاری متناوب ساده: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود، آن عدد را متناوب ساده می‌گویند.

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,3$$

$$\begin{array}{r|l} 1^{\circ} & 3 \\ -9 & 0,333\dots \\ \hline 1^{\circ} & \\ -9 & \\ \hline 1^{\circ} & \\ -9 & \\ \hline 1 & \\ \vdots & \end{array}$$

مثال:

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، عامل ۲ و ۵ نباشند، آن کسر متناوب ساده است.

$$\frac{5}{39} \rightarrow 39 = 3 \times 13$$

و

$$\frac{3}{77} \rightarrow 77 = 7 \times 11$$

مثال:

عدد اعشاری متناوب مرکب: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج قسمت بعد از یک یا

چند رقم اعشار به رقم‌های تکراری برسیم، به آن کسر متناوب مرکب می‌گویند.

مثال:

$$\frac{5}{6} = 0.8\overline{3333} \dots = 0.8\overline{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 5/0 & 6 \\ -48 & 0.8\overline{33} \dots \\ \hline 2/0 & \\ -18 & \\ \hline 2/0 & \\ -18 & \\ \hline 2 & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{7}{22} = 0.3\overline{181818} \dots = 0.3\overline{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 7/0 & 22 \\ -66 & 3.\overline{18} \dots \\ \hline 4/0 & \\ -22 & \\ \hline 18/0 & \\ -176 & \\ \hline 4/0 & \\ \vdots & \end{array}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، به جز ۲ و ۵ عامل‌های دیگری نیز وجود داشته باشد، آن کسر متناوب

مرکب است.

$$\frac{5}{14} \rightarrow 14 = 2 \times 7$$

و

$$\frac{3}{75} \rightarrow 75 = 3 \times 5^2$$

مثال:

@riazicafe

۲.۲ عددهای حقیقی

اعداد گنگ (اصم): اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آنها بی‌شمار و دارای دوره‌ی تناوب نیستند، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با \mathbb{Q}' یا \mathbb{Q}' نمایش می‌دهیم. مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{10}$ ، π و $0.01001000100001\dots$.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد، آن‌گاه \sqrt{n} عددی گنگ است (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند، گنگ هستند).

نکته: عدد π چون دارای دوره‌ی تناوب نیست، عددی گنگ است.

$$\pi \simeq 3.1415922653\dots$$

مثال: در جاهای خالی علامت \in یا \notin قرار دهید.

$$-\frac{2}{5} \notin \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0.36} \notin \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{47} \in \mathbb{Q}'$$

$$\pi \in \mathbb{Q}'$$

$$3.14 \notin \mathbb{Q}'$$

$$1 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

مثال: بین دو عدد داده شده سه عدد گنگ بنویسید.

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3} \text{ (الف)}$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{2.1} < \sqrt{2.2} < \sqrt{2.3} < \sqrt{3}$$

(ب) ۲ و ۳

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$$

@riazicafe

نکته: بین دو عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال: عدد $3 + \sqrt{10}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد.

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} \rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4 \rightarrow 3+3 < 3+\sqrt{10} < 4+3 \rightarrow \boxed{6 < 3+\sqrt{10} < 7}$$

بنابراین $3 + \sqrt{10}$ بین ۶ و ۷ قرار دارد.

اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و عددهای گنگ را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و

آن را با \mathbb{R} نمایش می‌دهیم. داریم: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

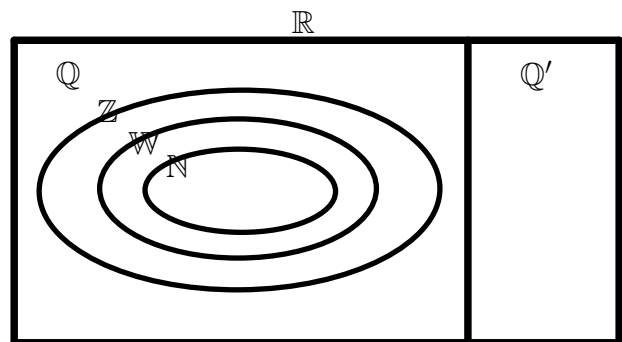
نکته:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$$

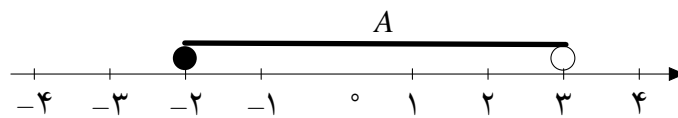
$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$



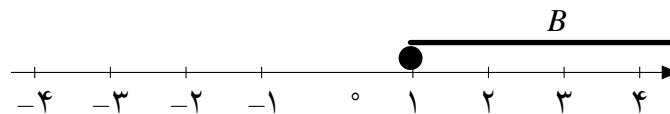
نکته: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند، پس نمایش این اعداد به صورت خط ممتدی است. (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد، دایره توپر و اگر سرکش نداشته باشد، دایره توخالی قرار می‌دهیم).

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$



ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$



۳.۲ قدرمطلق و محاسبه تقریبی

قدرمطلق: فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدرمطلق a) نمایش می‌دهیم.

مثال:

$$|-2| = 2 \qquad |5| = 5 \qquad |-\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$$

$$|-\pi| = \pi \qquad |-\sqrt{5}| = \sqrt{5} \qquad |0| = 0$$

خواص قدر مطلق:

۱. قدر مطلق عدد صفر، برابر با صفر است. $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

۲. قدر مطلق عددهای مثبت برابر با خود آن عدد است. $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

۳. قدر مطلق عددهای منفی برابر با قرینه آن عدد است. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

نکته: به طور کلی قدرمطلق هر عدد (به جز صفر)، عددی مثبت می‌شود.

مثال: عبارتهای زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$$|20 - 40 + 15| = |-20 + 15| = |-5| = 5$$

$$|(-7) \times (+8)| = |-56| = 56$$

$$|4 - 6 \times 4 \div 3 + 2| = |4 - 24 \div 3 + 2| = |4 - 8 + 2| = |-4 + 2| = |-2| = 2$$

نکته: مقدار تقریبی برخی از اعداد تا یک رقم اعشار به صورت زیر است:

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \quad \sqrt{3} \approx 1,7 \quad \sqrt{5} \approx 2,2 \quad \sqrt{6} \approx 2,4 \quad \sqrt{7} \approx 2,6 \quad \sqrt{8} \approx 2,8$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\underbrace{|1 - \sqrt{2}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$\underbrace{|2 - \sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|2\sqrt{5} - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$$

$$\underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-2 - \sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = 3 - \sqrt{5} + -(-2 - \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5} + (+2 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

نکته: اگر a عددی حقیقی باشد، آنگاه داریم: $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال:

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$$

$$\sqrt{9^2} = |9| = 9$$

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$