بسمه تعالی

جزوه ریاضی نهم

فصل اول تا هشتم

فصل ۱

فصل اول : مجموعه ها

نکته : اعضای هر مجموعه را با (و) یا ویرگول از هم جدا می کنند.

مثال : مجموعه ی $A=\{a\,,\{a\},\{\{a\}\}\}$ چند عضو دارد؟

این مجموعه سه عضو دارد . $\{\{a\}\}$ ، $a\,,\{a\}$ سه عضو این مجموعه هستند.

نکته : جمله ای که اعضای یک مجموعه را مشخص می کند باید کاملا واضح باشد.

مثال : کدام یک از دسته های زیر یک مجموعه را مشخص می کند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱۰۰۰ ب) اعداد خیلی بزرگ

پ) چهار عدد فرد متوالی شروع از ۲ ت) مقسوم علیه های عدد ۳۰

جواب : هر یک از گزینه های بالا اعضای مشخصی دارند به جز گزینه ی ب که اعضای آن کاملا مشخص نیستند.

عضویت : اگر x عضو مجموعه ی A باشد می نویسیم $x\in A$ در این صورت باید x عینا در مجموعه ی A دیده شود . و اگر x عضو A نباشد می نویسیم $x\notin A$

مثال : در مجموعه $A=\{۲\,,\{۲\},\{۳,۵\}\}$ کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟

الف) $۲\in A$ ب) $\{۲\}\in A$ پ) $\{\{۲\}\}\in A$ ت) $\{۲\,,\{۲\},\{۳,۵\}\}\in A$

گزینه ی الف و ب درست است گزینه ی پ درست نیست چون $\{\{۲\}\}$ عضو مجموعه نیست $\{۲\}$ عضو مجموعه A است . و گزینه ی ت خود مجموعه A به طور کامل است و غلط است.

مجموعه ی تهی : مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نام دارد. و با علامت $\emptyset$ نمایش داده می شود.

مثال : آیا دو مجموعه ی $\emptyset$ و $\{\emptyset\}$ با هم برابرند؟ چرا؟

جواب : مجموعه ی $\{\emptyset\}$ یک مجموعه ی تک عضوی است که تنها عضو آن $\emptyset$ است پس دو مجموعه بالا با هم مساوی نیستند.

زیرمجموعه : مجموعه ی B را زیر مجموعه ی مجموعه ی A می نامیم هرگاه هر عضو مجموعه ی B در مجموعه A باشد و با $B\subset A$ نشان می دهیم و اگر عضوی در مجموعه ی B باشد که در A نباشد می نویسیم $B\not\subset A$

مثال : در مورد مجموعه ی $A=\{a\,,\{b\},\{c,d\}\}$ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{a\}\subseteq A$ ب) $\{a,b\}\subseteq A$ پ) $\{\{b\}\}\subseteq A$

گزینه ی الف درست است گزینه ی ب درست نیست چون b عضو A نیست و گزینه ی پ درست است.

نکته : همه ی زیر مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه ی مجموعه ای به نام مجموعه ی مرجع هستند. (M,U)

نکته : برای تشخیص علامت $\in$ یا $\subseteq$ در جای خالی باید به { } دقت کنیم . در صورتی که این علامت همراه عضو باشد از علامت $\subseteq$ استفاده می کنیم در غیر این صورت از علامت $\in$ استفاده می شود

مثال : با توجه به $A=\{a,\{b\},\{۱\}\}$ جاهای خالی را پر کنید.

$\{b\} \dots A \quad ,\{a\} \dots A$

پاسخ : در سمت راست علامت $\subseteq$ و در سمت چپ علامت $\in$ را قرار می دهیم.

زیر مجموعه های محض : همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه به غیر از خودش را زیر مجموعه های محض می گویند.

نکته : اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ باشد آن گاه $A\subseteq C$ خواهد بود.

نکته : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : ۲^n

نکته : تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $۲^n - ۱$

مثال : یک مجموعه ی ۱۰ عضوی چند زیر مجموعه دارد؟

حل : $۲^n \to ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

مثال : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه برابر $۴^{۳n-۱}$ است . این مجموعه چند عضو دارد؟

حل : $۴^{۳n-۱} = ۲^{۶n-۲}$ پس تعداد اعضای این مجموعه برابر است با ۶n-۲

نکته : برای سهولت در محاسبات حاصل ضرب اعداد ۱ تا n را با نماد n! نمایش می دهند.

نکته : تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال : مجموعه ی $k=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند مجموعه ی حداقل ۳ عضوی دارد؟

حل : $\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}+\frac{۶!}{۴!(۶-۴)!}+\frac{۶!}{۵!(۶-۵)!}+\frac{۶!}{۶!(۶-۶)!}=۴۲$

نتیجه :تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی حاوی k عضو معین برابر است با : $\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$

نتیجه :تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی فاقد k عضو معین برابر است با : $\frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!}$

نکته : تعداد زیر مجموعه های حاوی یا فاقد k عضو از یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : ۲^{n-k}

نکته : تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی و زوج عضوی یک مجموعه برابر است با : $۲^{n-۱}$

مثال: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی x+۵ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه x+۳ عضوی است؟

حل : $۲^{x+۵} \div ۲^{x+۳} = ۲^۲ = ۴$

نکته : $(A \subseteq B, B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$

نکته : اگر $A \subseteq \emptyset$ باشد آن گاه $A=\emptyset$ و اگر $U \subseteq A$ باشد $A=U$

نکته : مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه ی توانی آن می گویند.

نحوه ی نمایش مجموعه ها :

۱-توصیفی

۲- بیان ریاضی : در این روش با پیدا کردن یک ویژگی مشترک و نشان دادن آن ویژگی با علائم ریاضی مجموعه را بیان می کنیم.

مثال : اعداد طبیعی زوج $E = \{۲k | k \in N\}$

اعداد طبیعی فرد $O = \{۲k - ۱ | k \in N\}$

فرمول کلی نوشتن مجموعه {محدوده اعضا و عضویت در مجموعه | جمله عمومی}

فرمول جمله ی عمومی در سری های منظم : جمله ی عمومی = جمله ی اول + فاصله × (n-۱)

نکته : تعداد عددهای یک سری منظم از رابطه ی زیر به دست می آید.

تعداد عدد های یک سری منظم = $\left(\frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{\text{فاصله دو جمله}}\right) +$ یک

مثال : اگر n عدد طبیعی باشد ۲<n≤۳۰ $A = \{x | x = ۳n + ۱, x < ۷۰\}$ چند عضو دارد؟

حل : $x < ۷۰ \Rightarrow ۳n + ۱ < ۷۰ \Rightarrow n < ۲۳ \Rightarrow ۲ < n < ۲۳ \Rightarrow$ تعداد $= ۲۲ - ۳ + ۱ = ۲۰$

تعمیم اجتماع و اشتراک

N مجموعه ی دلخواه $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ را در نظر بگیرید:

اجتماع این مجموعه ها برابر است با : $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n$

اشتراک این مجموعه ها برابر است با : $\bigcap_{i-۱}^{n} A_i = A_۱ \cap A_۲ \cap \dots \cap A_n$

مثال : اگر $A = \{m \in Z | m \geq n, ۲^m \leq n\}$ آن گاه مجموعه ی $A_۴ \cap A_۳$ چند زیر مجموعه دارد؟

دومجموعه ی جدا از هم : دو مجموعه را جدا از هم می گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. $A \cap B = \emptyset$

خواص اصلی اجتماع و اشتراک:

$$۱ - \begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A \end{cases}$$

$$۲ - \left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq D \cup B \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$$

$$۳- \left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subseteq B \cap C$$

$$۴- \left.\begin{matrix} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

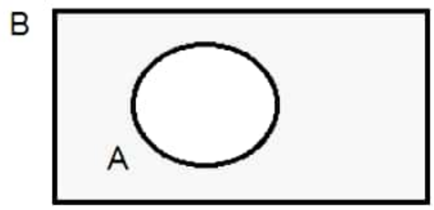
$$۵- \quad A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

$$۶- \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$ توزیع پذیری

$$۷- \begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$ قوانین جذب

متمم مجموعه : اگر A زیر مجموعه ی مجموعه ی B باشد متمم مجموعه ی A نسبت به B برابر است با B-A

$$\acute{A} = B - A = \{x \in B |\, x \notin A\}$$



روش شماره گذاری برای جبر مجموعه ها :

قضیه : هر گاه اجتماع چند مجموعه با اجتماع چند مجموعه ی دیگر برابر باشد و این مجموعه ها دو به دو جدا از هم باشند. آن گاه هر مجموعه که در یک طرف تساوی وجود داشته باشد ولی در طرف دیگر نباشد برابر با مجموعه ی تهی خواهد بود.

مثلا اگر $A \cup B = A \cup C$ آن گاه B=C=$\emptyset$

با استفاده از قضیه ی فوق هر گاه یک تساوی از مجموعه ها داشته باشیم می توانیم به روش زیر عمل کنیم.

۱- هر دو طرف تساوی را به صورت اجتماع مجموعه های جدا از هم می نویسیم.
۲- مجموعه های مساوی را از طرفین حذف می کنیم.
۳- مجموعه های باقیمانده را مساوی تهی قرار می دهیم و رابطه را محاسبه می کنیم.

در روش شماره گذاری ابتدا به هر مجموعه شکل دلخواهی نسبت می دهیم سپس به هر یک از مجموعه ها ی از هم جدا عددی را می دهیم و بوسیله ی این اعداد رابطه ی موجود را بازنویسی می کنیم و سپس مانند بالا عمل می کنیم.

مثال : اگر $A \cup B$=A-B باشد آن گاه کدام گزینه درست است؟

الف) B=$\emptyset$ ب) A=M پ) A=$\emptyset$ ت) B=M

$A \cup B = A - B \Rightarrow A \cup B = A \cup \acute{B} \Rightarrow B = \acute{B} = \emptyset$ پس گزینه ی اول درست است.

عدد اصلی یک مجموعه

تعداد اعضای یک مجموعه ی متناهی مانند A را عدد اصلی و با $n(A)$ نمایش می دهند.

مجموعه های متناهی و نامتناهی : اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد مجموعه را متناهی و اگر تعداد اعضایش محدود نبود نامتناهی می نامند.

ویژگی های مهم عدد اصلی:

الف) برای هر دو مجموعه ی متناهی :

$$\begin{cases} n(A-B)=n(A)-n(A\cap B) \\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \end{cases}$$

ب) برای هر سه مجموعه ی متناهی :

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

انواع حالت های پیشامد

۱- A رخ دهد و B رخ ندهد.

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

۲- A و B رخ دهد ولی C رخ ندهد.

$$n\big((A\cap B)-C\big)=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$$

۳- A رخ دهد ولی B و C هم زمان رخ ندهند:

$$n(A)-n(A\cap B\cap C)$$

۴- A رخ دهد ولی B رخ ندهد و C رخ ندهد.

$$n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$$

۵-فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.

$$n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$$

مثال : تعداد ارقام دو رقمی که بر ۷ بخش پذیرند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند چقدر است؟

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=\left[\left(\frac{۹۹}{۷}-\frac{۹}{۷}\right)\right]-\left[\left(\frac{۹۹}{۷۷}-\frac{۹}{۷}\right)\right]=(۱۴-۱)-(۱-۰)=۱۲$$

در مثال بالا برای پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ باید خارج قسمت صحیح تقسیم عدد ۹۹ بر ۷ را بیابیم.

اصل ضرب : هر گاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و جزء دوم به n طریق مختلف انجام شود آنگاه آن عمل به $m\times n$ طریق مختلف انجام می شود.

مثال : چند عدد چهار رقمی می توان ساخت که از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ تشکیل شده باشد و بر ۵ بخش پذیر باشد.

حل

تعداد هر رقم برای هر جایگاه

۵	۶	۶	۲

تعداد برابر است با : $۵\times ۶\times ۶\times ۲=۳۶۰$

نکته : قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم از رابطه ی $n!$ به دست می آید.

مثال : با ارقام ۱ و ۹ و ۳ و ۷ و ۵ چند عدد ۵ رقمی با ارقام مختلف می توان نوشت؟

حل

تعداد ارقام برای هر جایگاه

۵	۴	۳	۲	۱

تعداد برابر است با : $۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۱۲۰$