

قسمت دوم: مجموعه‌ها و احتمال

سوال ۱: اگر $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی A_1 با چه عددی شروع می‌شود؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۵۵ (۴) ۵۶

نکته: در نمایش مجموعه‌ها با علائم ریاضی، اگر $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ به کار رود، عضوهای یکی در میان منفی و مثبت می‌شوند و اگر $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ یا $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$ استفاده شود، عضوهای دو تا در میان منفی و مثبت می‌شوند.

نکته: برای به دست آوردن تعداد شمارنده‌های طبیعی هر عدد، آن عدد را به عوامل اول تجزیه کرده و سپس به هر توان ۱ واحد اضافه کرده و توان‌های جدید را در هم ضرب می‌کنیم.

سوال ۲: مجموعه‌ی $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1620}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

نکته: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد به طوری که مجموع عضوهای آن عدد M باشد، مجموع عضوهای همه‌ی زیرمجموعه‌های A برابر است با: $2^{n-1} \times M$

سوال ۳: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ را نوشتیم. مجموع عضوهای همه‌ی زیرمجموعه‌های A چه قدر است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۳۲ (۳) -۳۲ (۴) -۶۴

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی هر مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی آن برابر است و تعداد هر کدام 2^{n-1} است. (n تعداد کل عضوهاست)

سوال ۴: تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی مجموعه‌ی $A = \{2, 5, 8, \dots, 104\}$ چندتا است؟

- (۱) 2^{104} (۲) 2^{53} (۳) 2^{34} (۴) 2^{30}

نکته: تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء برابر است با ترکیب r از n :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

سوال ۵: یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی، چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۶۴

سؤال ۶: به چند طریق می‌توان ۳ زیرمجموعه غیر تهی A و B و C از مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ نوشت به طوری که رابطه $A \cap B = C$ برقرار باشد؟

- (۱) 2^5 (۲) 4^5 (۳) 5^2 (۴) 5^4

* مجموعه اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰ را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید، چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که:

سؤال ۷: حتماً عضوهای ۳ و ۵ را دارا است؟

- (۱) 2^8 (۲) 2^6 (۳) 2^5 (۴) 2^3

سؤال ۸: شامل عضوهای ۳ و ۵ باشد ولی عضوهای ۷ و ۸ و ۹ را شامل نباشد؟

- (۱) 2^4 (۲) 2^5 (۳) 2^6 (۴) 2^7

سؤال ۹: اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن، دقیقاً ۸ باشد؟

- (۱) 2^6 (۲) 2^7 (۳) 2^8 (۴) 2^9

سؤال ۱۰: اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن، حداقل ۸ باشد؟

- (۱) 2^9 (۲) 2^8 (۳) 2^7 (۴) 2^6

نکته: به مجموعه‌ای که فقط یک عضو داشته باشد، مجموعه‌ی یکانی می‌گویند.

سؤال ۱۱: مجموعه‌های A ، B و C به ترتیب دارای ۲، ۳ و ۴ عضو هستند و هر دو تایشان حداقل یک عضو مشترک دارند. $A \cup B \cup C$ حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟

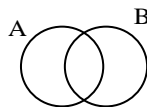
- (۱) ۷، ۴ (۲) ۴، ۲ (۳) ۹، ۲ (۴) ۹، ۳

سؤال ۱۲: چند زیرمجموعه‌ی متمایز از مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ می‌توان نوشت به طوری که هر دو زیرمجموعه دلخواه آن، حداقل در ۲ عضو مشترک باشند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۳ (۳) ۲۲ (۴) ۲۱

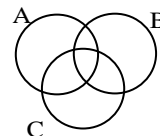
نکته:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



نکته:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



سؤال ۱۳: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی با ۲۱۰ که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشند، چند تا است؟

- (۱) ۱۴۸ (۲) ۱۴۷ (۳) ۱۵۴ (۴) ۱۵۲

سؤال ۱۴: A و B و C ، سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد عضوهای $A-B$ ، $B-C$ ، $B-A$ و $C-A$ و $C-B$ به ترتیب برابر ۳، ۲، ۲، ۴ و ۵ است. تعداد عضوهای مجموعه $A-C$ چند تا است؟

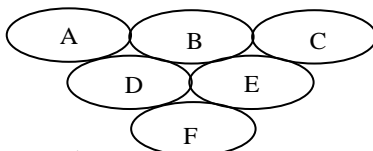
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نکته:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

سؤال ۱۵: A و B و C ، سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$. در این صورت کدام گزینه حتماً درست است؟



(۳) $F \subseteq (A \cap C)$

(۲) $B \subseteq F$

(۱) $F \subseteq C$

(۵) $(D \cap C) \subseteq F$

(۴) $(A \cap C) \subseteq F$

* در یک کیسه، ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سیاه وجود دارد. ۲ توپ به تصادف، یکی پس از دیگری بدون جایگزینی، از کیسه برداشتیم. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

سؤال ۱۶: احتمال آن که توپ اول قرمز و توپ دوم آبی باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{5}{33}$ (۲) $\frac{12}{33}$ (۳) $\frac{10}{33}$ (۴) $\frac{1}{6}$

سؤال ۱۷: احتمال آن که یک توپ قرمز و دیگری آبی باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{12}{33}$ (۲) $\frac{10}{33}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

سؤال ۱۸: احتمال آن که دو توپ، هم‌رنگ باشند، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{10}{33}$ (۳) $\frac{19}{66}$ (۴) $\frac{1}{3}$

سؤال ۱۹: احتمال آن که دو توپ هم‌رنگ نباشند، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{47}{66}$ (۲) $\frac{15}{33}$ (۳) $\frac{23}{33}$ (۴) $\frac{19}{66}$

سؤال ۲۰: در پرتاب ۳ تاس، احتمال این که مجموع اعداد رو شده، بزرگ‌تر از ۵ باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{209}{216}$ (۲) $\frac{206}{216}$ (۳) $\frac{201}{216}$ (۴) $\frac{187}{216}$

سؤال ۲۱: علی ارقام یک تا ۹ را روی ۹ کارت نوشت و در کیسه‌ای انداخت. سپس ۴ کارت از آن پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کند و آن‌ها را به ترتیب بعد از بیرون آمدن کنار هم قرار می‌دهد. احتمال آن که

عدد ۴ رقمی به دست بیاید که اختلاف رقم یکان و هزارگان آن ۴ باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۳) $\frac{5}{72}$ (۴) $\frac{5}{27}$

سؤال ۲۲: اگر $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{9}{4}$ باشد، کمترین مقدار عبارت $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{5}$

احتمال‌های غیرهم‌شانس

سؤال ۲۳: سه دوندۀ a_1 ، a_2 و a_3 با هم مسابقه می‌دهند. اگر احتمال برد a_1 ، ۲ برابر احتمال برد a_2 و احتمال برد a_2 ، دو برابر احتمال برد a_3 باشد، احتمال این که a_1 یا a_2 برنده شود، چقدر است؟

- (۱) $\frac{6}{7}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{9}{10}$

سؤال ۲۴: نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۴ واحد انتخاب می‌کنیم. احتمال این که فاصله‌ی این نقطه از نزدیک‌ترین رأس مربع، کوچک‌تر از ۲ باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

سؤال ۲۵: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول آن‌ها به ترتیب ۱ و $\frac{1}{5}$ متر است. قطعه‌ی بزرگ‌تر را دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه ۳ قطعه چوب حاصل می‌شود. احتمال این که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) ۱

پاسخنامه تشریحی سؤالات قسمت دوم (مجموعه‌ها و احتمال)

۱- گزینه (۲) به آخرین عدد در هر مجموعه توجه کنید:

$$A_1 \rightarrow 1, \quad A_2 \rightarrow 1+2=3, \quad A_3 \rightarrow 1+2+3=6, \quad A_4 \rightarrow 1+2+3+4=10$$

پس آخرین عدد در مجموعه A_9 ، $1+2+3+\dots+9=45$ و در نتیجه با A_1 با $45+1=46$ شروع می‌شود.

۲- گزینه (۱)

$$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \rightarrow (2+1) \times (4+1) \times (1+1) = 3 \times 5 \times 2 = 30 \Rightarrow 30 \times 2 = \boxed{60}$$

۳- گزینه (۳)

$$2^{n-1} \times M = 2^4 \times \left[\underbrace{-3 + (-2) + 0 + 1 + 2}_{-2} \right] = -32$$

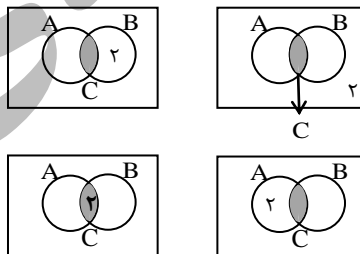
۴- گزینه (۳)

$$\text{تعداد} = \frac{10^4 - 2}{3} + 1 = 34 + 1 = 35 \Rightarrow 2^{35-1} = 2^{34}$$

۵- گزینه (۲)

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{3! \times \cancel{7!}} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

۶- گزینه (۲)



هر عضو، ۴ حالت می‌تواند داشته باشد، پس در کل می‌توان $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ مجموعه با شرط

نوشت. $A \cap B = C$

۷- گزینه (۱)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

۸- گزینه (۲)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2^5$$

۹- گزینه (۳)

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 1 \text{ کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 9 \text{ بزرگترین عضو} \end{array} \right\} \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rightarrow 2^7$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 2 \text{ کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 10 \text{ بزرگترین عضو} \end{array} \right\} \Rightarrow 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 2^7$$

$$\Rightarrow 2^7 + 2^7 = 2 \times 2^7 = 2^8$$

۱۰- گزینه (۱) حداقل ۸ یعنی ۹ یا ۸ باشد:

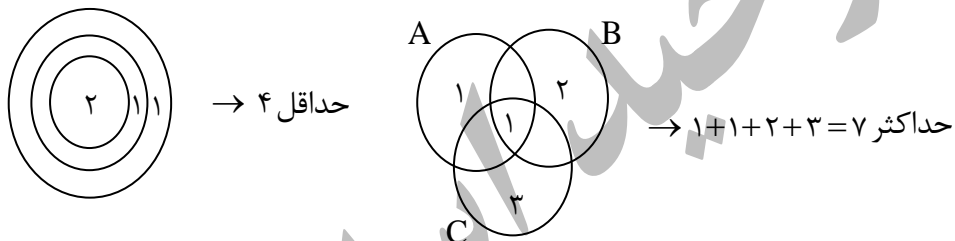
$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 1 \text{ کوچکترین عضو} \\ \rightarrow 10 \text{ بزرگترین عضو} \end{array} \right\} \Rightarrow 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 2^8$$

با توجه به حل سؤال ۹، 2^8 زیرمجموعه نیز می توان برای ۸ اختلاف نوشت.

پس مجموع آن ها برابر است با:

$$2^8 + 2^8 = 2 \times 2^8 = 2^9$$

۱۱- گزینه (۱)



۱۲- گزینه (۳) زیرمجموعه های ۴ عضوی، ۵ عضوی و ۶ عضوی جواب مسأله هستند:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$$

۱۳- گزینه (۳)

$$n(2 \text{ بر } 3 \text{ یا } 5) = n(2 \text{ بر}) + n(3 \text{ بر}) + n(5 \text{ بر}) -$$

$$n(2 \text{ بر } 3 \text{ و } 5) - n(2 \text{ بر } 5) - n(3 \text{ بر } 5) + n(2 \text{ بر } 3 \text{ و } 5 \text{ بر } 3)$$

$$= 210 \lfloor 2 + 210 \lfloor 3 + 210 \lfloor 5 - 210 \lfloor 6 - 210 \lfloor 10 - 210 \lfloor 15 + 210 \lfloor 30$$

$$= 105 + 70 + 42 - 35 - 21 - 14 + 7 = 154$$

۱۴- گزینه (۳) با رسم نمودار ون داریم:

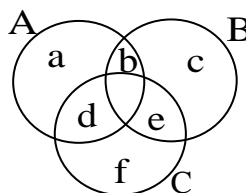
رابطه (۱) $n(A-B) = a+d=3$

رابطه (۲) $n(B-C) = b+c=2$

رابطه (۳) $n(B-A) = e+c=2$

رابطه (۴) $n(C-A) = e+f=4$

رابطه (۵) $n(C-B) = f+d=5$

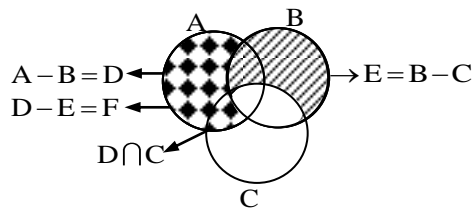


$$(3) + (5) \Rightarrow (e+c) + (f+d) = 7 \Rightarrow (c+d) + \overbrace{(f+e)}^4 = 7 \Rightarrow \boxed{c+d=3}$$

$$(1) + (2) = (a+d) + (b+c) = 3+2=5$$

$$\Rightarrow (a+b) + \overbrace{(c+d)}^3 = 5 \Rightarrow (a+b) = 2 \Rightarrow n(A-C) = a+b=2$$

۱۵- گزینه (۵) با تبدیل به نمودار ون داریم:



با توجه به نمودار مقابل، قسمت رنگی در سمت چپ شکل، $A-B=D$ است و قسمت رنگی در سمت راست شکل، $B-C=E$ است و $D \cap E$ تهی است. پس $F=D-E=D$ است و اشتراک D با C، زیرمجموعه خودش است پس $(D \cap C) \subseteq F$.

۱۶- گزینه (۱)

توپ دوم آبی و توپ اول قرمز

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

۱۷- گزینه (۲)

دیگری آبی و یک توپ قرمز

توپ دوم قرمز و توپ اول آبی یا توپ دوم آبی و توپ اول قرمز

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{5}{11}\right) = \frac{10}{33}$$

۱۸- گزینه (۳) دو توپ هم رنگ باشند:

دومی سیاه و اولی سیاه یا دومی آبی و اولی آبی یا دومی قرمز و اولی قرمز

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{3}{12} \times \frac{2}{11}\right) = \frac{5}{33} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22} = \frac{19}{66}$$

۱۹- گزینه (۱) دو توپ هم رنگ نباشند:

احتمال هم رنگ بودن = ۱ - احتمال هم رنگ نبودن \Rightarrow احتمال هم رنگ نبودن + احتمال هم رنگ بودن

$$\Rightarrow 1 - \frac{19}{66} = \frac{47}{66}$$

۲۰- گزینه (۱)

$(1,1,1), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)$

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \Rightarrow 216 - 7 = 209 \Rightarrow \frac{209}{216}$$

۲۱- گزینه (۲)

می توان جای یکان و ۵ جفت عدد که هزارگان را عوض کرد. اختلاف آن ها ۴ است.

$$\frac{5 \times 7 \times 6 \times 2}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{36}$$

۲۲- گزینه (۴)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A \cap C) \geq P(A) + P(C) - 1$$

$$P(B \cap C) \geq P(B) + P(C) - 1$$

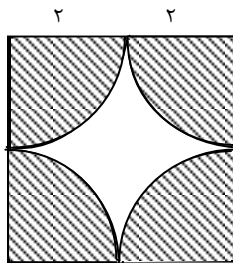
$$\Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \geq \underbrace{2(P(A) + P(B) + P(C))}_{\frac{9}{4}} - 3 = \frac{3}{4} = 1/5$$

۲۳- گزینه (۱)

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = 1 \Rightarrow 4P(a_3) + 2P(a_2) + P(a_1) = 1$$

$$\Rightarrow P(a_3) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(a_2) = \frac{2}{7}, P(a_1) = \frac{4}{7} \Rightarrow P(a_1) + P(a_2) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

۲۴- گزینه (۲)



$$\text{احتمال} = \frac{\text{مساحت ۴ ربع دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{2 \times 2 \times \pi}{4 \times 4} = \frac{\pi}{4}$$

۲۵- گزینه (۳) طبق نامساوی مثلثی، هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر باشد. سه قطعه چوب داریم:

$$\left. \begin{aligned} x + 0.5 > 1 - x &\Rightarrow x > 0.25 \\ (1 - x) + 0.5 > x &\Rightarrow x < 0.75 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{x \mid 0.25 < x < 0.75\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{0.75 - 0.25}{1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

