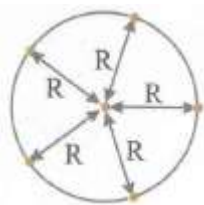


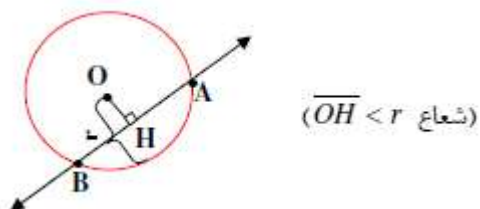
## ریاضی هشتم - فصل نهم: دایره ها

**دایره:** محلی است که مجموعه ای از نقاط که فاصله آن ها از نقطه ای به نام مرکز، یکسان است در آن قرار دارند. به این فاصله شعاع گفته می شود و معمولاً با حرف  $R$  یا  $r$  نشان داده می شود.



**خط و دایره:** یک خط و یک دایره دارای سه حالت زیر می باشند:

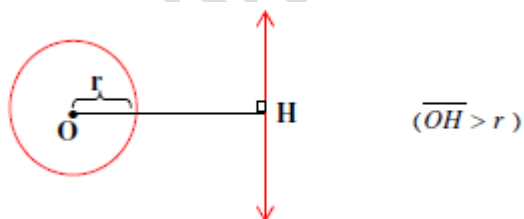
(۱) خط، دایره را در دو نقطه قطع می کند.



(۲) خط دایره را در یک نقطه قطع می کند.

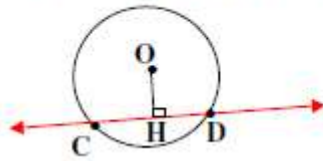


(۳) خط دایره را قطع نکند.



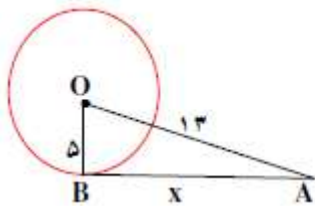
مثال) فاصله خطی تا مرکز دایره دو سوم شعاع دایره است. وضع خط و دایره را با رسم شکل توضیح دهید؟

**پاسخ:** چون فاصله خط تا مرکز دایره از شعاع کوچک تر است پس خط دایره را در دو نقطه قطع می کند یعنی:  $\overline{OH} < r$



مثال) در شکل زیر AB بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید؟

مثلث AOB قائم الزویه است  $\Rightarrow OB \perp AB$



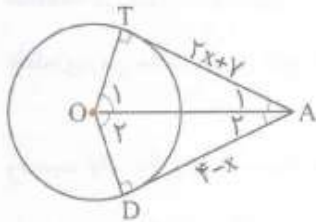
$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

نکته: از هر نقطه خارج از دایره می توان دو خط مماس بر دایره رسم کرد.

مثال) در شکل زیر DA و AT مماس بر دایره هستند. مقدار x را بیابید؟

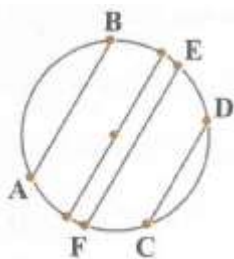


می دانیم طول دو مماس با هم برابر است.

$$AT = AD \Rightarrow 2x + y = 4 - x \Rightarrow 2x + x = 4 - y \Rightarrow 3x = 4 - y \Rightarrow x = \frac{4 - y}{3} = -1$$

**وتر:** اگر روی یک دایره دو نقطه انتخاب کنیم و آن ها را با یک پاره خط به هم وصل کنیم، به این پاره خط وتر می گویند.

هر چقدر وترها به مرکز دایره نزدیک شوند بزرگتر می شوند. بزرگترین وتر همان قطر دایره است.



**پیدا کردن مرکز دایره:** اگر بخواهیم مرکز دایره را پیدا کنیم باید مراحل زیر را انجام دهیم:

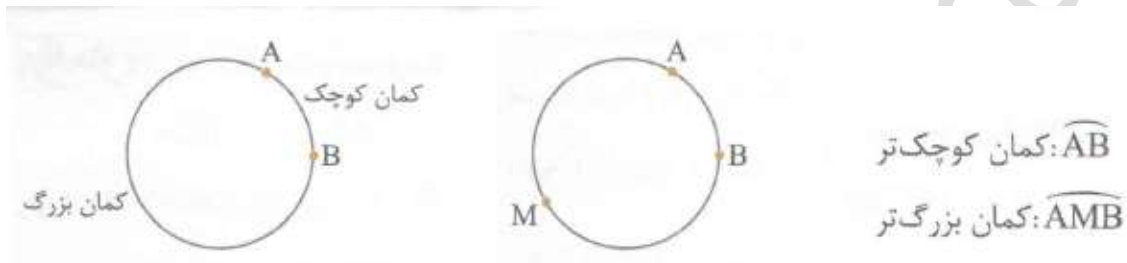
الف) دو وتر دلخواه دایره را رسم کنیم. (وترها نباید موازی باشند)

ب) عمود منصف این دو وتر را رسم کنیم. محل برخورد این دو عمود منصف همان مرکز دایره است.



نکته: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و برعکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره می‌گذرد بر وتر عمود است.

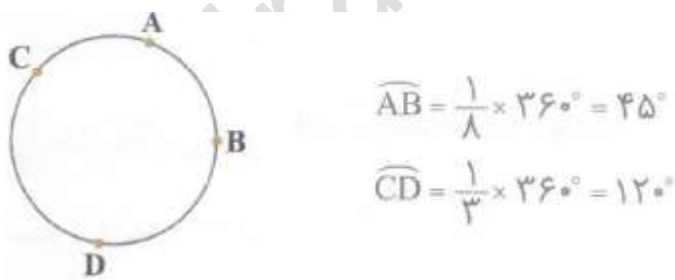
**کمان دایره:** هرگاه روی یک دایره، دو نقطه انتخاب کنیم، بین این دو نقطه قسمتی از محیط دایره قرار می‌گیرد که به آن کمان می‌گویند. البته می‌توان دو کمان را بین دو نقطه در نظر گرفت.



اندازه یک کمان را می‌توان به دو صورت بیان کرد:

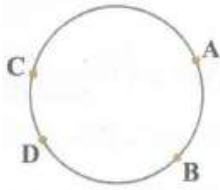
(۱) **بر حسب درجه:** می‌دانیم که یک دایره ۳۶۰ درجه است. در این حالت با یک تناسب می‌توان اندازه کمان را بر حسب درجه بیان کرد.

(مثال) در شکل مقابل کمان AB برابر با یک هشتم دایره و کمان CD برابر با یک سوم دایره است. اندازه هر یک را بر حسب درجه بیان کنید؟



(۲) **بر حسب سانتی متر:** در این روش ابتدا محیط دایره را محاسبه کرده و سپس طول هر کمان را از روی آن محاسبه می‌کنیم.

(مثال) در شکل مقابل شعاع دایره برابر با ۴ است. کمان‌های AB و CD به ترتیب یک ششم و یک هشتم دایره هستند. طول هر یک چند سانتی متر است؟



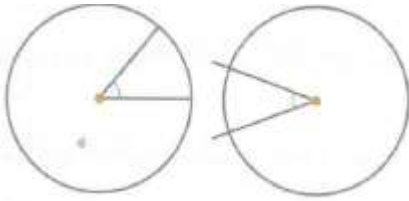
$$\widehat{AB} \text{ طول} = \frac{1}{6} \times 24 = 4 \text{ سانتی متر}$$

$$\widehat{CD} \text{ طول} = \frac{1}{8} \times 24 = 3 \text{ سانتی متر}$$

$$\text{محیط دایره} = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

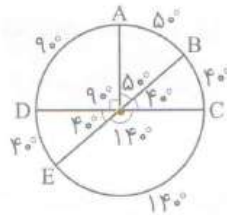
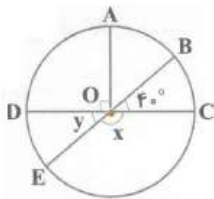
$$(\pi = 3)$$

**زاویه مرکزی:** هر گاه راس یک زاویه روی مرکز دایره باشد و دو ضلع آن شعاع های دایره باشند (یا دایره را قطع کنند) به آن زاویه، زاویه ی مرکزی می گوییم.



نکته: اندازه زاویه مرکزی با کمان روبروی آن بر حسب درجه مساوی است.

مثال) در شکل مقابل موارد خواسته شده را به دست آورید؟



$$\hat{x} = \quad \hat{y} = \quad \widehat{AD} = \quad \widehat{AB} = \quad \widehat{EC} =$$

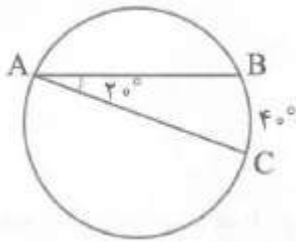
زاویه  $AOD = 90^\circ$  است، پس  $\widehat{AD} = 90^\circ$  می باشد. زاویه  $AOB = 5^\circ$

خواهد بود (این زاویه و زاویه  $BOC$  متمم هستند)، پس  $\widehat{AB} = 5^\circ$

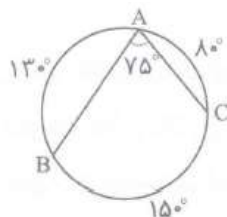
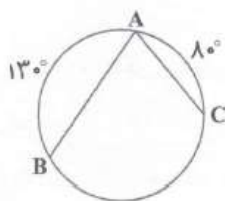
است. زاویه  $y$  با زاویه  $40^\circ$  متقابل به رأس است ( $y = 40^\circ$ ).

زاویه  $x$  با زاویه  $y$  مکمل است، پس زاویه  $x = 140^\circ$  است. کمان  $EC$  با زاویه  $x$  برابر است، پس  $EC = 140^\circ$  است.

**زاویه محاطی:** هر گاه راس یک زاویه روی دایره باشد و ضلع های آن دو وتر از دایره باشند به آن، زاویه محاطی می گوییم. اندازه زاویه محاطی، نصف کمان روبروی آن است.

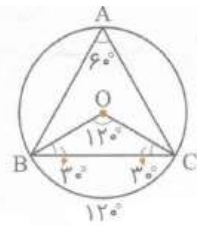
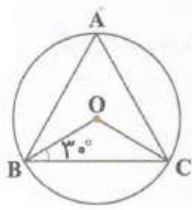


مثال) در شکل های زیر اندازه زاویه A را محاسبه کنید؟



جمع کمان های دایره  $360^\circ$  است، پس کمان  $BC$  باید  $150^\circ$  باشد.

$$\Rightarrow A = 150^\circ \div 2 = 75^\circ$$

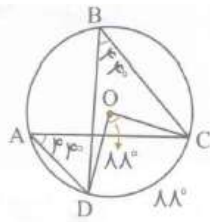
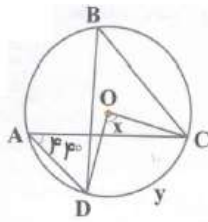


مثلث  $OBC$  متساوی الساقین است، پس زاویه  $C$  هم برابر با  $30^\circ$  و زاویه  $O$  برابر با  $120^\circ$  است. کمان  $BC$  روبه‌روی زاویه مرکزی  $O$  است، پس آن هم  $120^\circ$  است.

$$\widehat{A} = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$$

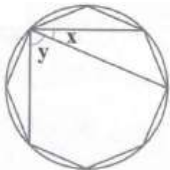
نکته» زاویه های محاطی که روی‌روی یک کمان قرار دارند با هم برابرند.

در شکل زیر اندازه زاویه و کمان مجهول را محاسبه کنید؟

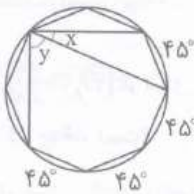


در این شکل، زاویه‌های  $A$  و  $B$  روبه‌روی کمان  $DC$  هستند، پس این دو زاویه با هم برابرند ( $\widehat{A} = \widehat{B} = 44^\circ$ )، بنابراین  $\widehat{DC}$  دو برابر این زاویه‌ها یعنی،  $88^\circ$  است و زاویه مرکزی  $O$  که روبه‌روی این کمان است هم،  $88^\circ$  است.

مثال ۸ ضلعی زیر منتظم است. اندازه زاویه های  $x$  و  $y$  را محاسبه کنید؟



۸ ضلعی منتظم، دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم می‌کند، پس اندازه هر کمان کوچک  $360^\circ \div 8 = 45^\circ$  است. روبه‌روی زاویه  $x$ ، یک کمان  $45^\circ$  و روبه‌روی زاویه  $y$ ، سه کمان  $45^\circ$  قرار دارد.

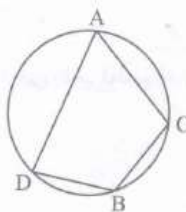


$$\widehat{x} = 45^\circ \div 2 = 22\frac{1}{2}^\circ$$

$$\widehat{y} = 135^\circ \div 2 = 67\frac{1}{2}^\circ$$

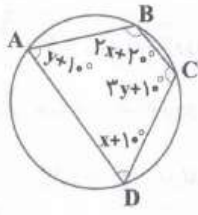
نکته» اگر همه راس های یک چهار ضلعی روی دایره قرار داشته باشند ان گاه زاویه های روی‌روی ان مکمل هم هستند.

کمان روبه‌روی زاویه  $C$ ، کمان  $ADB$  است و کمان روبه‌روی زاویه  $D$ ، کمان  $ACB$  است. جمع این دو کمان برابر با کل دایره، یعنی  $360^\circ$  است. می‌دانیم که زاویه محاطی، نصف کمان روبه‌روی آن است، پس جمع این دو زاویه، برابر با نصف کل دایره، یعنی  $360^\circ \div 2 = 180^\circ$  است.



$$\widehat{D} + \widehat{C} = \frac{\widehat{ACB}}{2} + \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

مثال) در شکل زیر مقدار  $x$  و  $y$  را پیدا کنید؟



زاویه‌های A و C روبه‌روی هم هستند، پس جمع آن‌ها  $180^\circ$  است.

$$y + 10^\circ + 3y + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow y + 3y = 180^\circ - 10^\circ - 10^\circ \Rightarrow 4y = 160^\circ \Rightarrow y = \frac{160^\circ}{4} = 40^\circ$$

زاویه‌های B و D، روبه‌روی هم هستند، پس جمع آن‌ها  $180^\circ$  است.

$$2x + 20^\circ + x + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + x = 180^\circ - 20^\circ - 10^\circ \Rightarrow 3x = 150^\circ \Rightarrow x = \frac{150^\circ}{3} = 50^\circ$$