

فصل ۸

آمار و احتمال



انتظارات از دانش آموزان در این درس:

- ۱ علم آمار را تعریف کنند.
- ۲ انواع نمودارها را بدانند و با کاربرد آنها آشنا باشند.
- ۳ میانگین (فرمول) را بدانند.
- ۴ احتمال را تعریف کنند و مثال بزنند و اندازه گیری شانس (فرمول) را بدانند و مثال بزنند.
- ۵ بتوانند سؤالات مربوط به مکمل احتمال را انجام دهند.
- ۶ بتوانند احتمال پیشامدهای گوناگون را به دست آورند و بتوانند جدول حالات مکمل را رسم کنند.
- ۷ بتوانند نمودار درختی حالات بیشتر را رسم کنند.
- ۸ برای حالت های هم شانس مثال بزنند.
- ۹ دانش آموز همه حالت های ممکن یک پیشامد را با کمک جدول بدانند.

آمار و احتمال

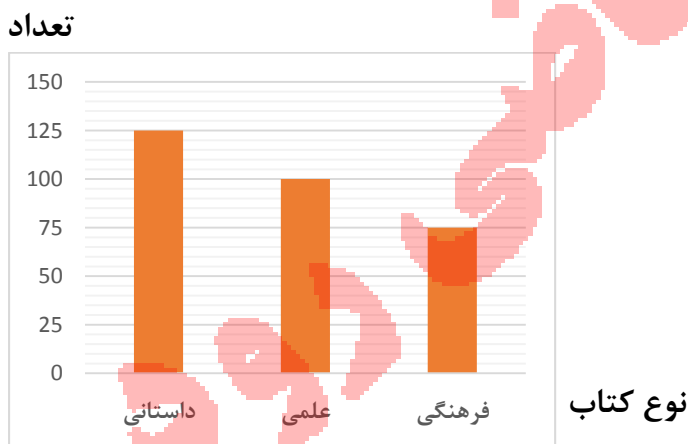
آمار: علم جمع آوری، سازماندهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات است.

به اطلاعاتی که جمع آوری می کنیم **داده های آماری** می گوئیم.

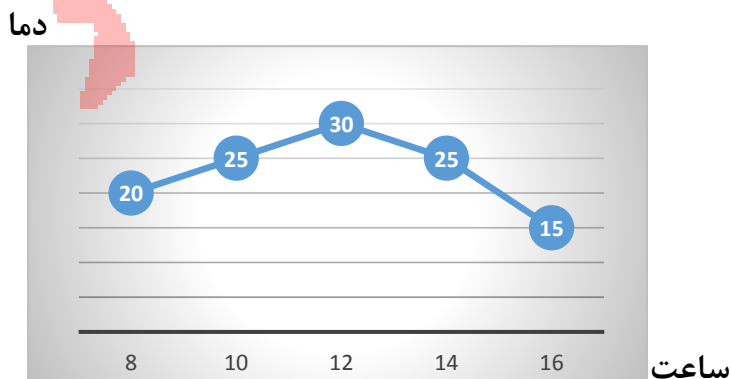
نمودار اطلاعات: با توجه به موضوع و هدف آمارگیری نمودار اطلاعات را رسم می کنیم.

انواع نمودار و کاربرد آنها

۱ نمودار ستونی: برای مقایسه تعداد کاربرد دارد.



۲ نمودار خط شکسته: برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص کاربرد دارد.

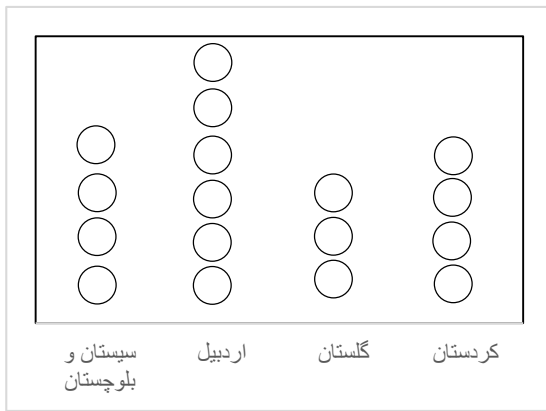


۳ نمودار تصویری: برای مقایسه داده های تقریبی به کار می رود.

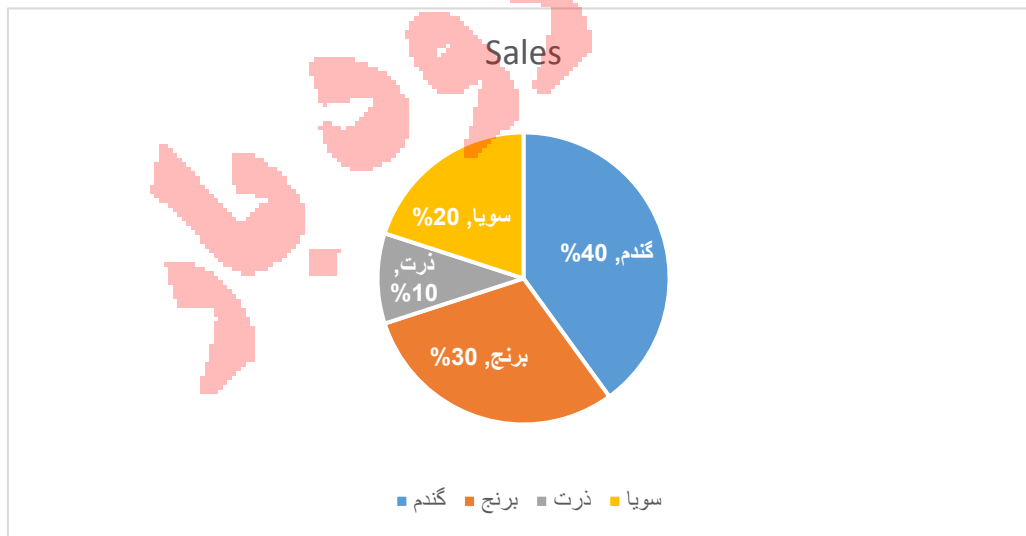
نمودار زیر تعداد گوسفندها در چهار استان کشور به صورت تقریبی نشان داده شده.

هر  نشان دهنده ۱۰۰۰۰۰ گوسفند می باشد.

تعداد



۴ نمودار دایره ای: نشان دادن تعداد داده ها نسبت به کل را به صورت درصد



دسته بندی داده ها:

اگر تعداد داده های جمع آوری شده در عمل آمارگیری زیاد باشد بررسی آنها طولانی و غیرمفید است. به همین دلیل داده ها را دسته بندی می کنیم به ترتیب زیر:

گام ۱: بزرگترین و کوچکترین داده را پیدا می کنیم.

گام ۲: دامنه تغییرات داده ها که به فاصله بین کمترین و بیشترین داده دامنه تغییرات می گوئیم را پیدا می کنیم.

کمترین داده - بیشترین داده = دامنه تغییرات

گام ۳: طول دسته را می یابیم که از فرمول زیر محاسبه می شود.

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته}}$$

محاسبه طول دسته:

دامنه تغییرات را بر تعداد دسته هایی که می خواهیم داده ها را طبقه بندی کنیم تقسیم می کنیم تا حدود دسته به دست آید با این کار داده ها با فاصله های مساوی تقسیم می شود.

مثال: نمره های ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره به شرح زیر می باشد و سپس آنها را در ۴ دسته تقسیم می کنند.

$$۹ - ۱۱ - ۲۰ - ۱۲/۵ - ۱۸ - ۱۳ - ۱۴/۵ - ۱۶ - ۲۰ - ۸ - ۴ - ۱۴ - ۱۷ - ۱۰/۵ - ۱۹ - ۱۲$$

طول دامنه تغییرات را مشخص می کنیم. $۱۶ = ۲۰ - ۴$ دامنه تغییرات

$$\frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد ها دسته ها}} = \frac{۱۶}{۴} \rightarrow \frac{۱۶}{۴} = ۴$$


۴ تا ۸ ۸ تا ۱۲ ۱۲ تا ۱۶ ۱۶ تا ۲۰

نکته: برای به دست آوردن حدود دسته ها کافی ست به کمترین داده مقدار طول دسته را اضافه

کنیم تا عدد بالایی دسته اول به دست آید عدد بالایی هر دسته را به عنوان عدد پایین دسته بعدی در نظر می گیریم.

در **مثال** بالا همان طور که می بینید اعداد مثل ۸، ۱۲، ۱۶ در دو دسته وجود دارد و این قابل قبول نیست به همین دلیل عدد مشترک در دو دسته را در دسته کمتر می نویسیم.

گام ۴: فراوانی: به تعداد داده های هر دسته فراوانی آن دسته می گوئیم.

با استفاده از چوب خط (خط نشان) تعداد داده های هر دسته را مشخص می کنیم و برای اینکه شمارش خط نشان ها ساده باشد هر دسته پنج تایی آن را به شکل  نمایش می دهیم، در واقع تعداد خط نشان ها همان فراوانی است.

مفهوم محدوده اعداد: وقتی می خواهیم مشخص کنیم که اعداد موردنظر از کجا شروع تا کجا ادامه دارند.

از علامت $<$ یا \leq استفاده می کنیم

$۱۵ < x \leq ۴$ یعنی اعداد ما از ۴ بزرگتر و یا مساوی با ۴ و از ۱۵ کوچکتر هستند.

(در این دسته خود ۴ را هم جزء اعداد این دسته حساب می کنیم.)

مثال: نمرات ۳۰ نفر از دانش آموزان یک کلاس به صورت زیر است:

نمرات را به ۵ دسته تقسیم بندی کرده و سپس نمودار ستونی مربوط به آن را رسم کنید.

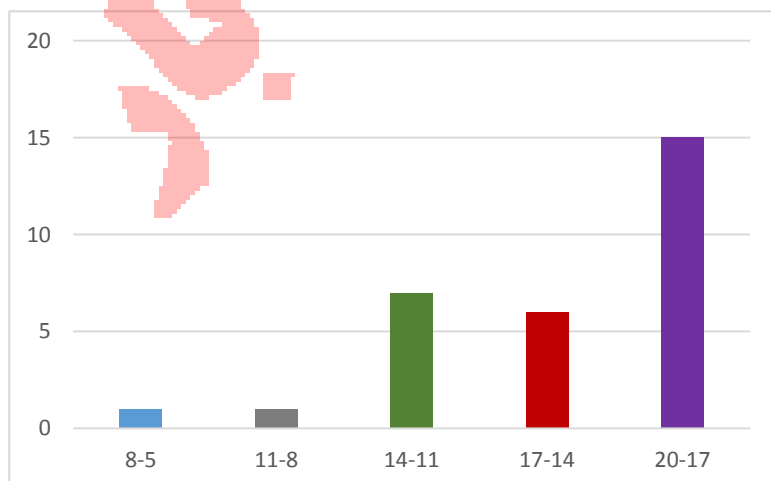
۱۸-۱۱-۱۱-۲۰-۱۹-۱۷-۱۶-۱۶-۱۵-۱۴-۱۴-۱۷-۱۶-۱۶-۱۳-۱۴-۱۳-۵-۱۳-۱۱-۱۹-۲۰-۲۰-۲۰-۱۸-۱۷-

۱۸-۱۹-۱۹-۱۰-۱۲-۱۳

بزرگترین داده ۲۰ و کمترین داده ۵ می باشد.

$\frac{15}{5} = 3$ طول دسته $20 - 5 = 15$ دامنه تغییرات

خط نشان	فروانی	حدود دسته
	۱	$5 \leq x < 8$
	۱	$8 \leq x < 11$
	۷	$11 \leq x < 14$
	۶	$14 \leq x < 17$
	۱۵	$17 \leq x < 20$



درس دوم: میانگین داده ها

از تقسیم مجموع داده ها بر تعداد داده ها میانگین حاصل می شود.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} \Rightarrow \bar{X} = \frac{S}{n}$$

\bar{X} میانگین S مجموع داده ها n تعداد داده ها

مثال: میانگین اعداد ۱۳-۱۴-۱۵-۱۸ را محاسبه کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{60}{4} = 15 \qquad \text{جمع داده ها} = 13 + 14 + 15 + 18 = 60$$

۴ → تعداد داده ها

مثال: میانگین نمرات امیرحسین در ۱۲ درس $17/5$ شده است مجموع نمرات امیرحسین چقدر

بوده است؟

$$\text{مجموع نمرات} = 17/5 \times 12 = 210$$

مثال: میانگین نمرات کیمیا در ۸ درس برابر با $15/5$ شده است اگر نمرات دو درس دیگر او $14/5$ و

$17/5$ باشد میانگین کل درس های او را محاسبه کنید.

$$\text{مجموع داده ها} = G = 8 \times 15/5 = 124$$

$$S \rightarrow \text{جدید} \quad S = 124 + 14/5 + 17/5 = 156$$

$$\text{میانگین} \quad \bar{X} = \frac{156}{10} = 15/6$$

نکته: حتی با تغییر دادن یکی از داده ها مقدار میانگین تغییر می کند.

مثال: داده های ۱ و ۲ و ۳ مفروض است: اگر عدد ۳ را به $۳/۷۵$ تغییر دهیم میانگین چه تغییری

خواهد کرد.

$$۱،۲،۳ \rightarrow \bar{X} = \frac{۱+۲+۳}{۳} = ۲$$

$$۱،۲،۳/۷۵ \rightarrow \bar{X} = \frac{۱+۲+۳/۷۵}{۳} = ۲/۲۵ \longrightarrow \text{میانگین جدید } ۰/۲۵ \text{ افزایش یافته}$$

محاسبه میانگین در شرایطی که تعداد داده ها زیاد باشد

در آمار معمولاً میانگین را به صورت تقریبی محاسبه می کنند برای این کار ابتدا داده ها را دسته

بندی می کنند و از روی دسته بندی های انجام شده میانگین را به دست می آورند.

برای این کار مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم

گام اول: میانگین یا مرکز هر دسته را به دست می آوریم.

$$\text{مرکز دسته} = \frac{\text{عدد بالای حدود دسته} + \text{عدد پایین حدود دسته}}{۲}$$

مثال: اگر در یک بررسی آماری حدود دسته $۱۶۲ \leq X < ۱۶۵$ باشد میانگین (مرکز دسته) چه

عددی است؟

$$\text{دسته مرکز} = \frac{۱۶۲+۱۶۵}{۲} = ۱۶۳/۵$$

گام دوم: فراوانی هر دسته را در مرکز دسته ضرب کرده و در ستون مقابل هر دسته می نویسیم.

گام سوم: مجموع اعداد در ستون مرکز دسته \times فراوانی را محاسبه کرده و آن را بر مجموع

فراوانی ها تقسیم می کنیم. عدد حاصل میانگین تقریبی همه داده های آماری داده شده است.

مثال: میانگین داده های مقابل را محاسبه کنید.

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته ها
$5 \times 137/5 = 687/5$	$\frac{130 + 145}{2} = 137/5$	۵	$130 \leq x < 145$
$7 \times 152/5 = 1067/5$	$\frac{145 + 160}{2} = 152/5$	۷	$145 \leq x < 160$
$16 \times 167/5 = 2680$	$\frac{160 + 175}{2} = 167/5$	۱۶	$160 \leq x < 175$
$8 \times 182/5 = 1460$	$\frac{175 + 190}{2} = 182/5$	۸	$175 \leq x < 190$
$4 \times 197/5 = 790$	$\frac{190 + 205}{2} = 197/5$	۴	$190 \leq x \leq 205$
مجموع ۶۶۸۵		مجموع ۴۰	

$$\text{میانگین} = \frac{\text{فراوانی} \times \text{مرکز دسته}}{\text{مجموع فراوانی}} = \frac{6685}{40} = 167,125$$

درس سوم: احتمال یا اندازه گیری شاخص

نکاتی در مورد احتمال:

احتمال روی دادن هر اتفاق را با یک کسر که از صفر تا یک است نشان می دهیم.

شاید روی بدهد $1 < \text{احتمال} < 0$ حتماً روی می دهد: یک قطعاً روی نمی دهد: صفر

برای هر یک از احتمال های زیر یک مثال بزنید؟

الف) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن صفر باشد. **سکه را پرتاب می کنیم نه رو بیاید نه پشت**

ب) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن از $\frac{1}{2}$ کمتر باشد. اینکه فردی در روز سه شنبه به دنیا آمده

باشد

پ) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن یک باشد. در پرتاب یک سکه یا رو بیاید یا پشت

آمدن ماه فروردین بعد از اسفند

احتمال: احتمال رخ دادن هر اتفاق از رابطه زیر به دست می آید.

$$\text{احتمال رخ دادن هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت های ممکن}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در ریاضی احتمال را با $P(A)$ کل حالت های ممکن $n(S)$ حالت های مطلوب یا حالت های موردنظر

را با $n(A)$ نمایش می دهیم.

A : نام اتفاق موردنظر است.

مثال: در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید.

الف) احتمال آمدن عدد زوج مضرب ۳

ب) احتمال آمدن عدد کوچکتر مساوی ۴

پ) احتمال آمدن اعداد اول

نکته: مجموع احتمال ها در یک مسئله همواره عدد یک است.

$$1 = \text{احتمال رخ ندادن} + \text{احتمال رخ دادن}$$

مثال: احتمال آمدن رنگ سبز در یک چرخنده $\frac{3}{10}$ است احتمال نیامدن رنگ سبز چقدر است؟

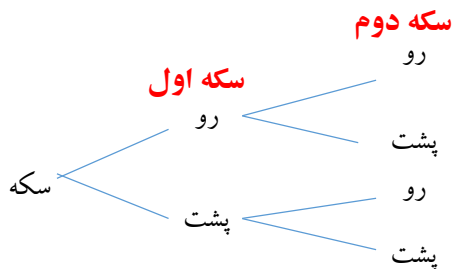
$$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

احتمال رخ دادن = ۱ - احتمال رخ ندادن

بررسی حالت های ممکن: برای به دست آوردن کل حالت ها می توان از جدول نظام دار

یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال: دو سکه را پرتاب می کنیم. همه حالت های ممکن را برای آنها بنویسید (نمودار درختی)



در کل چهار حالت اتفاق می افتد.

(رو-رو) و (پ-رو)

(پ-پ) و (ر-پ)

یافتن جدول به نظام دار: برای زمانی که دو اتفاق را با هم بررسی کنیم در این روش تعداد

حالت های یک پیشامد را در ردیف افقی و پیشامد بعدی را در ردیف عمودی می نویسیم و سپس

مانند جدول ضرب سایر خانه ها را پر می کنیم.

تمام حالت های ممکن را برای پرتاب یک تاس و یک سکه همزمان را با استفاده از جدول نظام دار

به دست آورید.

تاس / سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
رو	۱-ر	۲-ر	۳-ر	۴-ر	۵-ر	۶-ر
پ	۱-پ	۲-پ	۳-پ	۴-پ	۵-پ	۶-پ

در کل ۱۲ حالت رخ می دهد

(۱) جدول زیر را کامل کنید.

دسته	خط نشان	فراوانی	متوسط دسته	فروانی \times متوسط دسته
$12 \leq x \leq 16$				۷۰

(۲) نمرات ۵ درس دانش آموزی به ترتیب $19-17/5-15/25-12/5-7/5-10$ بوده است میانگین نمرات او را حساب کنید.

(۳) میانگین نمرات امیر در سه درس ریاضی، عربی و علوم $15/5$ بوده است اگر نمره ی ریاضی ۱۱ و نمره ی علوم ۱۷ باشد نمره ی عربی او چند است؟

(۴) داده های مقابل را در نظر بگیرید. $15-200-25-100-87-59$

الف) میانگین آنها را حساب کنید.

ب) چه تعداد داده ها از میانگین بیشتر و چه تعداد آنها از میانگین کمتر است؟ آیا این دو تعداد با هم برابرند.

(۵) درون کیسه ای ۸ مهره سبز و ۴ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف بیرون می آوریم هر یک از احتمال های زیر را به دست آورید؟

الف) مهره قرمز باشد.

ب) مهره قرمز یا سبز باشد.

پ) مهره آبی یا قرمز باشد.

ت) مهره سبز یا قرمز یا آبی باشد.

ث) مهره سفید باشد.

۶) دو تاس را همزمان پرتاب می کنیم.

الف) تمام حالت هایی که مجموع اعداد روشده ۷ باشد را بنویسید و سپس احتمال آن را بدست آورید.

ب) تمام حالت هایی که اعداد روشده یکسان باشد را بنویسید و سپس احتمال آن را بدست آورید.