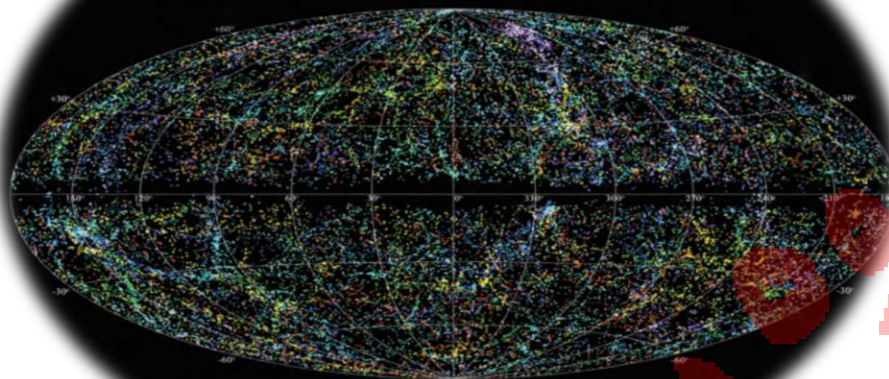


## فصل ۷ توان و جذر



### هدف کلی

توان یعنی خلاصه کردن عمل ضرب با یاد گرفتن این فصل دانش آموز یاد می گیرد که مسیر کوتاه را انتخاب کند به جای اینکه یک عبارت را چند بار در خودش ضرب کند از توان استفاده می کند

### انتظارات از دانش آموزان در این درس:

۱ حاصل عبارت توان دار را به دست آورد

۲ قوانین ضرب و تقسیم اعداد تواندار با پایه ها و توان های مساوی را یاد بگیرد

۳ تجزیه یک عدد را و نوشتن آن به صورت توان دار را یاد بگیرد

۴ ساده کردن یک عبارت توان دار را یاد بگیرد

۵ خواص رادیکال ها را یاد بگیرد

۶ معنی جذر و کاربرد آن را یاد بگیرد

۷ باید بتواند جذر تقریبی را محاسبه کند

## توان و جذر

**تعریف:** هرگاه عددی چند بار در خودش ضرب شود می‌توانیم آن را به صورت توان دار بنویسیم

**مانند:**

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

توان  $\rightarrow$   
پایه  $\rightarrow$

$$0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 0.3^3$$

$$\left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

حالت کلی:  $\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n = a^n$

**ذکر چند نکته:**

$$1^5 = 1$$

**۱** یک به توان هر عدد می‌شود خود یک:

$$5^1 = 5$$

**۲** هر عدد به توان یک می‌شود خود آن عدد:

$$0^5 = 0$$

**۳** صفر به توان هر عدد (بجز صفر به توان صفر) می‌شود صفر:

**۴** هر عدد به توان صفر می‌شود یک (بجز صفر به توان صفر):

$$5^0 = 1 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1 \quad (-2)^0 = 1$$

$$7 = 7^1$$

۵ هر عددی توان ندارد توانش یک است:

۶ اگر یک عدد توان دار مجدداً به توان برسد توان ها درهم ضرب می شود مانند:

$$(2^3)^2 = 2^6 \quad \left( (2^2)^3 \right)^4 = 2^{24}$$

۷ اگر یک عدد توان دار مجدداً توان بگیرد از بالا توان را به توان می رسانیم و حاصل را به عنوان

توان جدید برای پایه قبل قرار می دهیم:

$$2^{\boxed{2^2}} = 2^4 \quad 2^{\boxed{2^{\boxed{2^2}}}} = 2^{2^9} = 2^{512}$$

۸ اگر عددی منفی داخل پرانتز باشد و به توان زوج برسد حاصل می شود مثبت و اگر به توان فرد

برسد حاصل منفی می شود مانند:

$$(-2)^2 = 4$$

$$(-2)^3 = -8$$

۹ اگر منفی داخل پرانتز نباشد چه به توان فرد برسد یا به توان زوج برسد حاصل می شود

منفی

$$-2^3 = -\overbrace{(2 \times 2 \times 2)}^8} = -8$$

مانند:

$$-2^2 = -\overbrace{(2 \times 2)}^4} = -4$$

**۱۰** توان منفی: هرگاه عددی به توان عدد منفی برسد پایه معکوس می‌شود و توان منفی به مثبت

$$5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

تبدیل می‌شود مانند:

**مثال:** عبارت مقابل را به صورت توان دار بنویسید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

**۱۱** توان دوم هر عدد را مجذور یا مربع و توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد گویند:

**مثال:** اختلاف مکعب ۴ و مربع  $0/5$  را بدست آورید:

$$4^3 - (0/5)^2 = 64 - 0/25 = 63/25$$

**ذکر یک نکته مهم:**

اگر جمع و تفریق داخل پرانتز باشد و روی پرانتز توان داشته باشیم حتماً

باید حاصل پرانتز را بدست آوریم بعد به توان برسانیم اما اگر ضرب و تقسیم باشد به دو روش

می‌توان عمل کرد یعنی هم می‌توانیم حاصل پرانتز را بدست آوریم بعد به توان برسانیم هم

می‌توانیم هر یک از اعداد داخل پرانتز را به توان برسانیم سپس ضرب یا تقسیم کنیم

**مثال:** حاصل عبارت مقابل را بدست آورید:

$$8$$

$$(\cancel{5+3})^2 = 8^2 = 64$$

$$5$$

$$(\cancel{8-3})^2 = 5^2 = 25$$

$$(2 \times 3)^2 = \begin{cases} 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 \\ 6^2 = 36 \end{cases}$$

$$(8 \div 2)^2 = \begin{cases} 8^2 \div 2^2 = 64 \div 4 = 16 \\ 4^2 = 16 \end{cases}$$

### ضرب اعداد توان دار: حالت اول

برای نوشتن یک عدد به صورت توان دار باید رابطه داشته باشیم. منظور از رابطه یعنی یا پایه‌ها مساوی باشد یا توان‌ها.

**تعریف ۱:** در ضرب اعداد توان دار با پایه‌های مساوی یکی از پایه‌ها را نوشته توان‌ها را باهم

جمع می‌کنیم **مانند:**

$$5^2 \times 5^4 = 5^6$$

**تعریف ۲:** در ضرب اعداد توان دار با توان مساوی، یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را در

هم ضرب می‌کنیم **مانند:**

$$6^7 \times 3^9 \times 0.5^7 = 3^7 \times 3^9 = 3^{16}$$

↖ ↗  
3/0

**تعریف ۳:** در تقسیم اعداد تواندار، اگر توان‌ها برابر باشد یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم.

$$4^5 \div 2^5 = 2^5$$

$$3^7 \div 2^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^7$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^5 \div \left(\frac{9}{16}\right)^5 = \left(\frac{\cancel{15}^5}{4} \times \frac{\cancel{16}^5}{9}\right)^5 = \left(\frac{20}{3}\right)^5$$

$$\frac{24^7}{4^7} = 6^7$$

خط کسری نشان دهنده تقسیم

**تعریف ۴:** در تقسیم عبارات تواندار اگر پایه‌ها برابر باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم. **مانند:**

$$5^{12} \div 5^3 = 5^9$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 \div \left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

### حالت دوم:

اگر رابطه نبود باید رابطه ایجاد کنیم یا باید هم پایه کنیم یا هم توان راه‌های ایجاد رابطه:

### ۱ تجزیه کردن:

**مثال:** حاصل عبارت‌های مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید؟

$$9 \times 3^5 = 3^2 \times 3^5 = 3^7$$

$$27^4 \times 3^2 = \left(3^3\right)^4 \times 3^2 = 3^{14}$$

تجزیه

$$25^2 \div 5^4 = (5^2)^2 \div 5^4 = 5^2$$

تجزیه

$$16 \times 2^3 = 2^4 \times 2^3 = 2^7$$

تجزیه

$$32^4 \times 16^2 = (2^5)^4 \times (2^4)^2 = 2^{20} \times 2^8 = 2^{28}$$

تجزیه

الف) ۱۶ برابر عدد  $2^{13}$  را به صورت توان دار بنویسید:

$$16 \times 2^{13} = 2^4 \times 2^{13} = 2^{17}$$

تجزیه

$$3^8 \div 3 = 3^7$$

ب) ثلث عدد  $3^8$ ؟

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{3^8}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{3^8}{3} = 3^7$$

نکته:  $3^8$  را تقسیم بر مخرج کسر می کنیم یا **مانند**:

ج) نصف ثلث عدد  $۶^{۲۵}$ ؟

$$۶^{۲۵} \div ۶ = ۶^{۲۴} \quad \frac{1}{۲} \times \frac{1}{۳} = \frac{1}{۶} \quad \text{نصف ثلث}$$

**مثال:** کسرهای مقابل را به صورت توان دار بنویسید؟

$$\frac{1}{۱۲۵} = \frac{1}{۵^۳} = \left(\frac{1}{۵}\right)^۳$$

$$\frac{۱۶}{۸۱} = \frac{۲^۴}{۳^۴} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۴$$

**۲ تبدیل جمع به ضرب:**

هرگاه چند عدد توان دار مساوی باهم جمع شوند می توانیم جمع را به ضرب تبدیل کنیم تا رابطه برقرار شود.

**مثال:** هریک از عبارت های مقابل را به صورت تواندار بنویسید؟

$$۲^{۲۰} + ۲^{۲۰} = ۲ \times ۲^{۲۰} = ۲^{۲۱}$$

تعداد

$$۴^{۱۲} + ۴^{۱۲} = ۲ \times ۴^{۱۲} = ۲ \times \left(۲^۲\right)^{۱۲} = ۲ \times ۲^{۲۴} = ۲^{۲۵}$$

تجزیه



۳ رابطه مخفی:

عبارت توان داری که ظاهراً پایه مختلف است اما در واقع پایه‌ها برابرند: **مانند:**

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 0.125^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$\text{ب) } (0.12)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^9$$

$$\text{ج) } \left(\frac{2}{5}\right)^9 \div \left(0.16\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

۴ هم‌توان کردن:

برای ایجاد رابطه گاهی می‌توانیم عبارت را هم‌توان کنیم **مانند:**

**مثال:** حاصل عبارتهای مقابل را به صورت تواندار بنویسید

$$\text{الف) } 8 \times 5^3 = 2^3 \times 5^3 = 10^3$$

$$\text{ب) } 7^4 \times 16 = 7^4 \times 2^4 = 14^4$$

$$\text{ج) } 2^{21} \times 3^{14} = (2^3)^7 \times (3^2)^7 = 8^7 \times 9^7 = 72^7$$

حاصل عبارت مقابل را به ازای مقادیر داده شده بدست آورید؟  $a = -2$ ،  $b = -3$ ،  $c = -1$

$$a(b^2 + 2ac)$$

$$-2 \left( \underbrace{(-3)^2 + 2(-2)(-1)}_{13} \right) = -2 \times 13 = -26$$

ساده کردن عبارت‌های توان دار:

**مثال:** حاصل هر کسر را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

**ذکر چند مثال:**

الف)  $\frac{5^2 \times 3^2}{2^1 \times 5^1} = 5^2 \times 3^2 = 15^2$

ب)  $\frac{x^{12} \times y^9}{x^{10} \times y^{11}} = \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

عبارت‌های مقابل را به صورت توان دار بنویسید؟

الف)  $\frac{12^4 \times 12 \times 12^2}{4^4} = \frac{12^8}{4^4} = 3^8$

$$ب) \left(2^3\right)^4 \times \left(3^6\right)^2 \times 6^5 = 2^{12} \times 3^{12} \times 6^5 = 6^{12} \times 6^5 = 6^{17}$$

$$ج) \left[ \left( \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \right)^{10} \times \left( \begin{matrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} \right)^{10} \right] \div 3^5 = 3^{10} \div 3^5 = 3^5$$

هرگاه هم پایه‌ها و هم توان‌ها مساوی باشد از یکی از قواعد ضرب استفاده می‌کنیم. **مانند:**

$$\begin{aligned} 2^3 \times 2^3 &\rightarrow 2^6 = 64 \\ &\rightarrow 4^3 = 64 \end{aligned}$$

### یادآوری: در سال گذشته آموختیم:

**تعریف:** جذر یعنی عددی را پیدا کنیم که اگر آنرا در خودش ضرب کنیم حاصل آن برابر عدد زیر رادیکال شود جذر را با علامت  $\sqrt{\quad}$  که رادیکال نام دارد نمایش می دهند.

$$5^2 = 25 = \text{مجدور } 5$$

$$\sqrt{25} = 5 \rightarrow \text{به عدد } 5 \text{ جذر عدد } 25 \text{ می گوئیم و به}$$

25 مجذور عدد 5 گفته می شود.

جذرهای کامل یا دقیق

جذرهای تقریبی

انواع جذر:

### جذرهای کامل:

جذرهایی هستند که جواب آنها یک عدد صحیح می باشد و به این اعداد مجذور کامل یا مربع کامل نیز گفته می شود.

**مانند:** 4 و 9 و 16 و 25 و 36 و ...

$$\sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$$

### ذکر چند نکته:

**!** هر عدد دو ریشه دوم دارد یکی مثبت و دیگری منفی که جذر هر عدد ریشه دوم مثبت آن عدد است.

**مثال:** ریشه‌های دوم عددهای زیر را بدست آورید:

ریشه‌های دوم ۹  $\begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -3 \end{matrix}$  جذر  $9: \sqrt{9}=3$

ریشه‌های دوم ۱۶  $\begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -4 \end{matrix}$  جذر  $16: \sqrt{16}=4$

**۲** اعداد منفی جذر ندارند زیرا حاصل ضرب دو عدد مثبت عددی مثبت، حاصل ضرب دو عدد منفی نیز عددی مثبت است. بنابراین در هیچ حالتی حاصل ضرب دو عدد یکسان منفی نمی شود.

ندارد جذر  $\sqrt{-81}$

**۳** عدد یک و صفر جذرشان با خودشان برابر است.

$\sqrt{1}=1$  و  $\sqrt{0}=0$

**۴** بین هر دو عدد متفاوت بی نهایت عدد می توان نوشت:

**مثال:** ۵ عدد بین  $\sqrt{11}$  و  $\sqrt{17}$  بنویسید:

$\sqrt{11} \approx 3,3$

$3/4$  و  $3/5$  و  $3/6$  و  $3/7$  و  $3/8$

$\sqrt{17} \approx 4,1$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{0.25} = 0.5$$

۵ جذر اعداد بزرگتر از یک از خودشان کوچکتر است **مانند:**

جذر اعداد بین صفر و یک از خود عدد بزرگتر است

### جذر تقریبی:

عددهایی که مجذور کامل نیستند و جذر آنها به صورت اعشاری به دست می‌آید جذر تقریبی گویند **مانند:**

$$\sqrt{5} \approx 2.2$$

$$\sqrt{23} \approx 4.7$$

### روش محاسبه جذر تقریبی:

ابتدا باید مشخص کنیم عددی که می‌خواهیم از آن جذر بگیریم بین کدام دو مجذور کامل قرار دارد. سپس با جذرگرفتن از آن دو عدد مشخص می‌شود. بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد

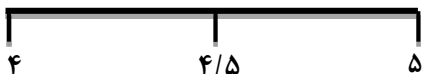
### بعنوان مثال:

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$$

۴                      ۵

که در این مسئله  $\sqrt{18}$  بین دو عدد ۵ و ۴ قرار دارد.

مرحله بعد: یک محور فرضی که دو عدد ۴ و ۵ را روی آن مشخص کرده‌ایم رسم می‌کنیم.



وسط آن را پیدا کرده و عدد آن را می‌نویسیم. چون  $\sqrt{18}$  به  $\sqrt{16}$  نزدیک‌تر است بین ۴ و  $4/5$  را



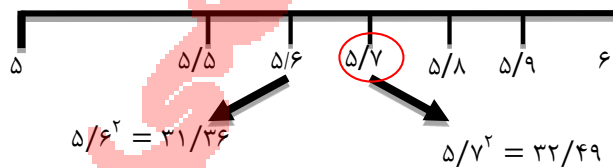
آنگاه هر یک از اعداد را به توان ۲ می‌رسانیم هر کدام به  $\sqrt{18}$  نزدیک‌تر بود جواب می‌شود. در مثال بالا:  $(4/2)^2 = 17/64$  که جواب است.

$$\sqrt{18} \approx 4/2$$

**مثال:** مقدار تقریبی  $\sqrt{33}$  را بدست آورید:

$$\sqrt{25} < \sqrt{33} < \sqrt{36}$$

$$\sqrt{33} \approx 5/7$$



### خواص رادیکالها:

**۱** جذرهای حاصل ضرب و یا تقسیم را به دو صورت می‌توان حل کرد.

**الف)** هم می‌توان دو عدد زیر رادیکال را ضرب یا تقسیم کرد سپس از حاصل آن جذر گرفت.

**ب)** هم می‌توان از هر یک از اعداد زیر رادیکال جذر گرفت سپس حاصل را ضرب یا تقسیم کرد.

**مثال:** حاصل جذرهای زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

$$\sqrt{81 \div 9} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{81 \div 9} = \sqrt{81} \div \sqrt{9} = 9 \div 3 = 3$$

**تذکر:** گاهی اوقات می‌توانیم مانند زیر عمل کرد با ضرب رادیکالها راحت‌تر و دقیق‌تر می‌توان به جواب رسید.

**مثال ۱:**  $\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{20 \times 5} = \sqrt{100} = 10$

**مثال ۲:**  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

مانند:

**۱**  $\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

**۲**  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

جذرهای ترکیبی:

**مثال:** حاصل جذرهای مقابل را بدست آورید:

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{77 + \sqrt{16}} = \sqrt{77 + 4} = \sqrt{81} = 9$$



**۲** در جمع و تفریق رادیکالها نمی توانیم آنها را از هم جدا کنیم و جداگانه زیر رادیکال ببریم (مانند ضرب و تقسیم) بلکه باید زیر رادیکال را حل کرد سپس جذر بگیریم.

مانند:

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 4$$

ساده کردن رادیکالها:

اگر اعداد زیر رادیکال جذر دقیق نداشته باشند و بتوانیم آنها را به صورت حاصل ضرب دو عدد طوری بنویسیم که یک یا چند تا از اعداد مجذور کامل باشند آن عدد را ساده می کنیم:

**مثال ۱:**  $\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

**مثال ۲:**  $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$