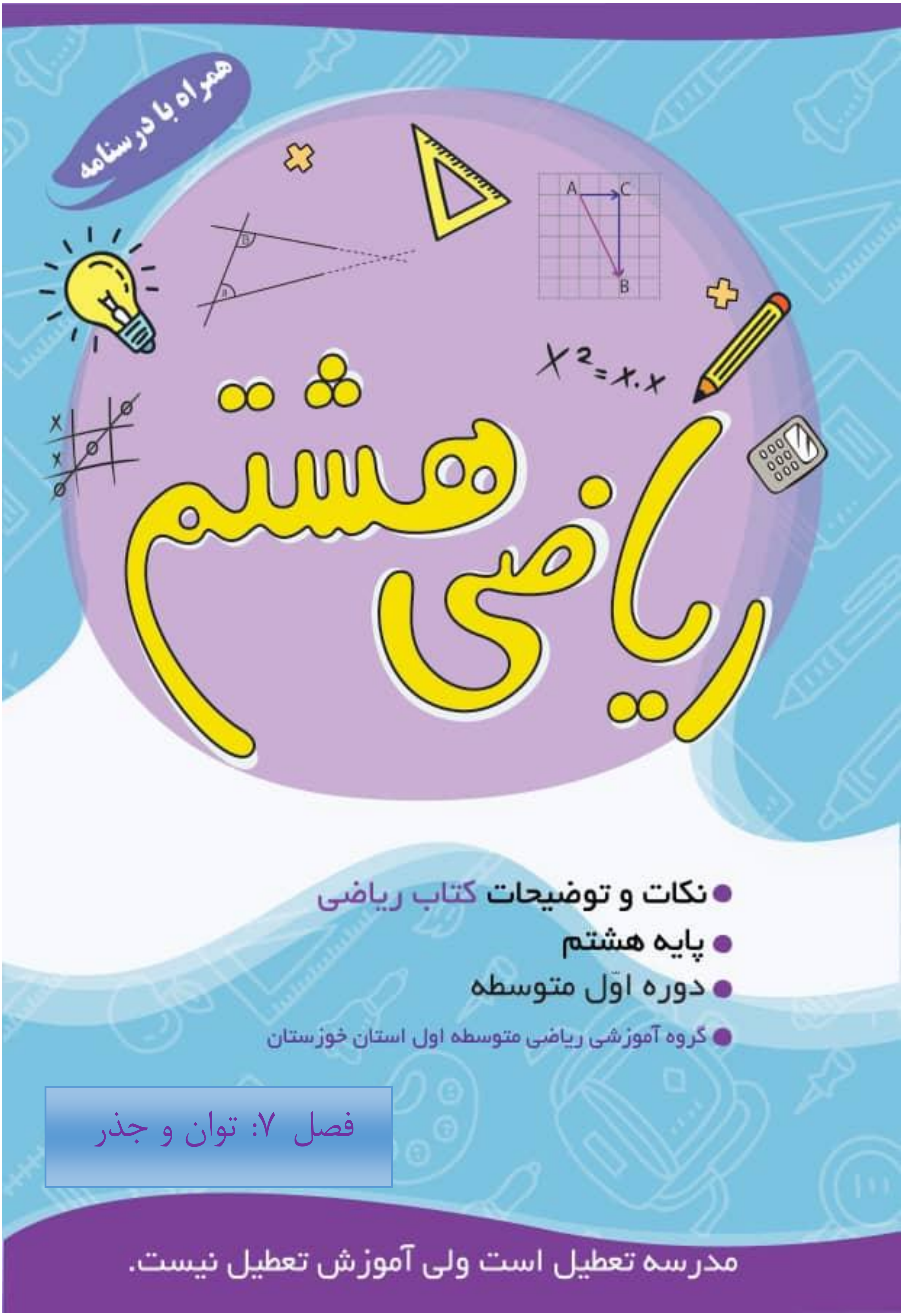


فصل ۷: توان و جذر

بسمه تعالی

درس نامه و نکات کلیدی و حل تمرین های فصل هفتم پایه هشتم

سمیه انصاری-عبدالهادی آرامی-عبدالله بهزادی

درس اول: یادآوری

- ✓ نکته: عدد یک به توان هر عددی برسد، حاصلش برابر یک است. $۱^{۷} = ۱$, $۱^{۴} = ۱$
- ✓ نکته: هر عدد به غیر از صفر به توان صفر برسد، حاصلش برابر با یک است. $۱۵^{۰} = ۱$
- ✓ نکته: صفر به توان هر عددی به غیر از صفر برسد، حاصلش صفر است. $۰^{۵} = ۰$
- ✓ نکته: هر عدد به توان یک برسد، حاصلش خود عدد می‌شود. $a^{۱} = a$
- ✓ نکته: هر عدد توان نداشته باشد، توان آن یک است.
- ✓ نکته: اگر یک عدد دارای بیش از یک توان باشد و بین آن ها پرانتز وجود داشته باشد توان‌ها در هم ضرب می‌شوند. $(a^{m})^{n} = a^{m.n}$

مثال) $۵^{۲}{}^{۳} = ۵^{۶}$

نکته: توان دوم یک عدد همان مجذور یا مربع آن عدد است.

مثال) $۰/۱)^{۲}=۰/۰۱$

- ✓ نکته: توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد می نامند.
- ✓ نکته: اگر یک کسر با پرانتز به توان برسد توان هم برای صورت است و هم برای مخرج .

$\frac{a}{b}^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$ اما با کسری که بدون پرانتز به توان برسد مساوی نیست. $\frac{a^{n}}{b} \neq \frac{a^{n}}{b^{n}}$

مثال) $\frac{۳}{۴}^{۲} \neq \frac{۳^{۲}}{۴}$ $\qquad$ $\frac{۳^{۲}}{۴} \neq \frac{۹}{۱۶}$ و $\frac{۳}{۴}^{۲} = \frac{۹}{۱۶}$

✓ نکته: هر گاه یک عدد منفی داخل پرانتز به توان زوج برسد، حاصلش مثبت می‌شود.

مثال) $-۳)^{۲} = +۹$

✓ نکته: هر گاه یک عدد منفی بدون پرانتز به توان زوج برسد، حاصلش منفی می‌شود.

مثال) $-۳^{۲} = -۹$

✓ نکته: هر گاه یک عدد منفی با پرانتز و یا بدون پرانتز به توان فرد برسد، حاصلش منفی می‌شود.

مثال) $-۲)^{۳} = -۸$

قوانین ضرب اعداد توان دار:

$۱)\ a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ $\qquad$ مثال $\Rightarrow$ $۵^{۷} \times ۵^{۳} = ۵^{۷+۳} = ۵^{۱۰}$

$۲)\ a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}$ $\qquad$ مثال $\Rightarrow$ $۶^{۳} \times ۲^{۳} = ۱۲^{۳}$

✓ نکته: اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار پایه ها و توان ها هیچکدام برابر نباشد، در برخی موارد می توان با تجزیه پایه ها به ضرب عدد های اول، آنها را با هم برابر کرد.

مثال) $۲^{۵} \times ۴^{۳} = ۲^{۵} \times (۲^{۲})^{۳} = ۲^{۵} \times ۲^{۶} = ۲^{۱۱}$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس اول را حل کنید.

درس دوم: تقسیم اعداد توان دار

تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی: یکی از پایه ها را نوشته، توانها را از هم کم می کنیم.

$۳)\ a^{m} \div a^{n} = a^{m-n} \quad (a \neq ۰)$ مثال $\Longrightarrow ۵^{۸} \div ۵^{۲} = ۵^{۸-۲} = ۵^{۶}$

تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی: یکی از توان ها را نوشته، پایه ها را برهم تقسیم می کنیم.

$۴)\ a^{m} \div b^{m} = \frac{a}{b}^{m} \quad , \quad b \neq ۰$ مثال $\Longrightarrow -۸^{۲} \div ۴^{۲} = -۲^{۲} = ۲^{۲}$

✓ نکته: اگر تعدادی عدد توان دار یکسان با هم جمع شوند از خاصیت ضرب استفاده کرده، یکی از اعداد را نوشته و در تعداد ضرب می‌کنیم

مثال) $۳^{۷} + ۳^{۷} + ۳^{۷} = ۳ \times ۳^{۷} = ۳^{۸}$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس دوم را حل کنید.

درس سوم: جذر تقریبی

✓ نکته: ریشه دوم مثبت یک عدد را با علامت √ (رادیکال) نشان می‌دهیم و به آن جذر یک عدد می‌گوییم.

مثال) √۶۴ = ۸   √۳۶ = ۶   √۰/۰۴ = ۰/۲

✓ نکته: اعداد منفی ریشه دوم (جذر) ندارند. به عنوان مثال √-۳۶ جذر ندارد.

✓ نکته: اگر تعداد ارقام اعشاری زوج باشد، زمانی که جذر گرفته می شود تعداد رقمهای اعشارش نصف می‌شود.

مثال) √۰/۰۰۰۱ = ۰/۰۱

✓ نکته: جذر برخی اعداد دقیق نیست و به صورت اعشاری است. برای به دست آوردن مقدار جذر آن-ها مانند مثال زیر عمل می کنیم.

مثال) جذر تقریبی عدد √۲۸ را حساب می‌کنیم:

جذر عدد √۲۸ بین دو جذر دقیق √۲۵ و √۳۶ قرار دارد.   ۵ < √۲۸ < ۶

ابتدا عدد وسط بین ۵ و ۶ را که عدد ۵/۵ است در نظر گرفته و عدد ۲۸ را با مجذور ۵/۵ مقایسه می‌کنیم.

۲۸ < ۳۰/۲۵ ← (۵/۵)^{۲} = ۳۰/۲۵ و چون عدد ۲۸ از آن کوچک تر است، مقدار جذر مورد نظر بین ۵/۵ و ۵ است.

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴	۵/۵
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶	۳۰/۲۵

عدد ۲۸ بین مجذور ۵/۲ و ۵/۳ قرار دارد. $۲۷/۰۴ < ۲۸ < ۲/۰۹$ ولی چون به ۵/۳ نزدیک‌تر است، در نتیجه مقدار $\sqrt{۲۸}$ تقریباً برابر است با ۵/۳ یعنی $\sqrt{۲۸} \simeq ۵/۳$

نکات جذر:

- ✓ نکته: جذر عدد صفر، خود عدد صفر می‌شود. $\sqrt{۰} = ۰$
- ✓ نکته: جذر عدد یک، خود عدد یک می‌شود. $\sqrt{۱} = ۱$
- ✓ نکته: جذر اعداد کوچک‌تر از واحد (بین صفر و یک)، از خود آن‌ها بزرگ‌تر است.

$۰/۶ > ۰/۳۶$ و $\sqrt{۰/۳۶} = ۰/۶$

- ✓ نکته: جذر اعداد بزرگ‌تر از واحد (بزرگ‌تر از یک)، از خود عدد کوچک‌تر است.

مثال) $۳۶>۶$ و $\sqrt{۳۶} = ۶$

مثال) عدد $\sqrt{۱۷} + ۳$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$$\sqrt{۱۶} < \sqrt{۱۷} < \sqrt{۲۵} \rightarrow ۴ < \sqrt{۱۷} < ۵ \rightarrow ۳+۴ < ۳+\sqrt{۱۷} < ۳+۵ \rightarrow ۷ < ۳ + \sqrt{۱۷} < ۸$$

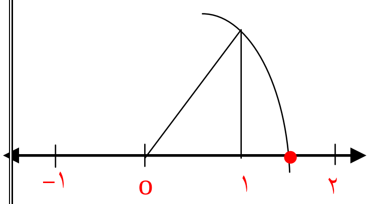
بنابراین عدد $\sqrt{۱۷} + ۳$ بین اعداد ۷ و ۸ قرار دارد.

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس سوم را حل کنید.

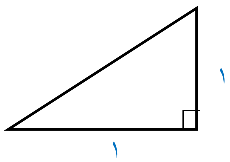
درس چهارم: نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

نمایش اعداد رادیکالی روی محور: برای نمایش اعداد رادیکالی که جذر کامل ندارند، از مثلث های قائم الزاویه و رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم به طوری‌که وتر مثلث برابر با عدد رادیکالی باشد.

مثال۱) $\sqrt{۲}$ را روی محور رسم کنید.



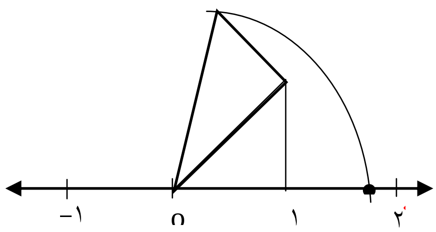
$$x=\sqrt{۲} \quad \rightarrow \quad x^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲} \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}$$



بنابراین مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع قائم ۱ رسم می‌کنیم. وتر این مثلث $\sqrt{۲}$ است. مثلث را روی محور رسم کرده، سوزن پرگار را روی صفر قرار داده و دهانه پرگار را به اندازه وتر باز کرده و کمان می‌زنیم. اگر $+\sqrt{۲}$ باشد کمان به سمت مثبت محور رسم می شود و اگر $-\sqrt{۲}$ باشد کمان به سمت منفی محور رسم می‌شود.

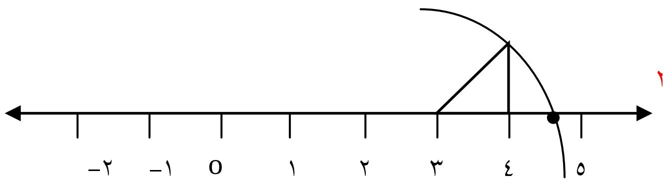
مثال ۲) $\sqrt{۳}$ را روی محور رسم کنید.

$$x^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲} \quad \rightarrow \quad y^{۲}=x^{۲}+۱ \quad \rightarrow y^{۲}=\sqrt{۲}^{۲}+۱^{۲}=۲+۱=۳ \quad \rightarrow y=\sqrt{۳}$$



تذکر: دهانه پرگار را به اندازه آخرین وتر باز می‌کنیم.

تذکر: برای رسم عبارت‌هایی مثل $\sqrt{۲}+۳$ باید از نقطه ۳+ پاره خطی به اندازه $\sqrt{۲}$ را رسم کرده و چون $\sqrt{۲}$ مثبت است به سمت مثبت کمان می‌زنیم.



خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

نکته ۱: اگر بین دو رادیکال جمع یا تفریق باشد نمی‌توانیم اعداد آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \qquad\qquad \sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

نکته ۲: اگر دو رادیکال در هم ضرب شده باشند می توانیم اعداد آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم و برعکس.

(a و b نامنفی هستند)

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b} \qquad\qquad \sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

نکته ۳: اگر دو رادیکال بر هم تقسیم شده باشند می توانیم یک رادیکال نوشته و اعداد را بر هم تقسیم کنیم و برعکس.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

تذکر: اگر بین اعداد زیر رادیکال عملیات جمع یا تفریق باشد، ابتدا حاصل را به دست آورده و سپس جذر می‌گیریم.

مثال) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

محاسبه و ساده کردن رادیکال از راه تجزیه و اعداد مربع کامل طبیعی

اعداد مربع کامل طبیعی : به اعدادی که جذر آنها یک عدد طبیعی است مربع کامل طبیعی میگوییم .

مانند $\sqrt{۲۵}$ و $\sqrt{۹}$ و $\sqrt{۳۶}$

عدد زیر رادیکال را تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی که یکی از آنها مربع کامل است، می‌نویسیم. سپس از اعداد مربع کامل جذر گرفته و به صورت ضریب می‌نویسیم.

به عنوان مثال:

$$\sqrt{۷۵} = \sqrt{۳\times۲۵} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{۲^۲\times۵} = \sqrt{۲^۲} \times \sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها: جمع و تفریق رادیکال ها فقط برای رادیکال های متشابه انجام می شود. بدین صورت که ضرایب آن‌ها با هم جمع یا تفریق می‌گردند.

رادیکال‌های متشابه به رادیکال هایی گفته می‌شود که پس از ساده شدن، اعداد زیر رادیکال آنها یکسان باشند.

مثال) $۵\sqrt{۳}$ و $-۲\sqrt{۳}$ متشابه هستند اما $۵\sqrt{۳}$ و $۵\sqrt{۲}$ متشابه نیستند.

تذکر۱: قبل از جمع یا تفریق کردن رادیکال ها، آنها را باید ساده کرد . بدین صورت رادیکال های متشابه مشخص می‌شوند.

تذکر۲: اگر عدد صحیحی در یک عبارت رادیکالی ضرب شود فقط در ضریب آن ضرب می شود. مثال

$$-۳\left(۲\sqrt{۵}\right) = -۶\sqrt{۵}$$

مثال۱) حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۳\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۳} - ۷\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = -۴\sqrt{۲} + ۵\sqrt{۳}$$

مثال ۲) رادیکال زیر را ساده کنید.

$$\overline{۲۸} = \sqrt{۴×۷} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۷} = ۲\sqrt{۷}$$

مثال ۳) حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۵\sqrt{۲۸} + \sqrt{۳۲} - ۴\sqrt{۷} + \sqrt{۱۸} = ۵ \times ۲\sqrt{۷} + ۴\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۷} + ۳\sqrt{۲}$$

$$= ۱۰\sqrt{۷} - ۴\sqrt{۷} + ۴\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۷} + ۷\sqrt{۲}$$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس چهارم را حل کنید.