فصل ۶

مثـلث

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنکبوت، آیه ۲۰)

هدف کلی

شناخت رابطه فیثاغورس درک مفهوم همنهشتی قابل انطباق بودن دو چند ضلعی تحت تبدیلات هندسی

انتظارات از دانش آموزان در این درس:

۱ در تشخیص و بیان رابطه فیثاغورس در حالت های مختلف مثلث قائم الزاویه تسلط یابد.

۲ با کاربرد های رابطه فیثاغورس در حل مسائل آشنا شود.

۳ در هر مثلث قائم الزاویه با داشتن دو ضلع بتواند اندازه ضلع سوم را بدست آورد.

۴ بداند تبدیل یافته های هر چند ضلعی تحت انتقال، دوران، همواره با آن چند ضلعی همنهشت است.

۵ تشخیص اجزاء متناظر در دو چند ضلعی همنهشت.

۶ درک تمام حالت های همنهشتی در دو مثلث.

۷ بتواند از دانسته هایش در حل تمرینات کتاب استفاده کند.

@riazicafe

مثـــلث قائـــم الزاویـــه:

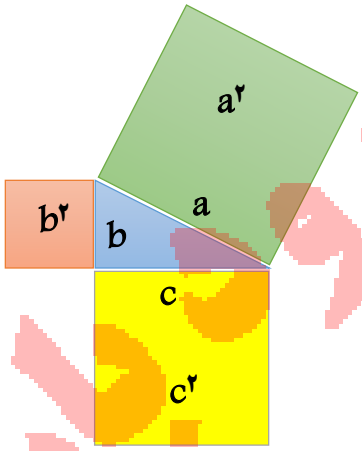
مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد، مثلث قائم الزاویه نام دارد. بزرگترین ضلع مثلث قائم الزاویه **وتر** و اضلاع دیگر، **ضلع های قائم** نامیده می شوند.

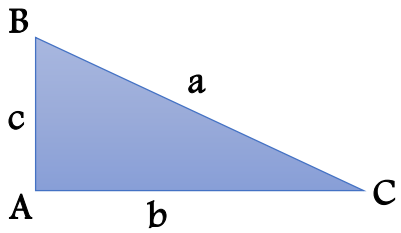
(وتر مثلث روبروی زاویه قائمه قرار دارد)

نکته ۱: فیثاغورس دانشمند یونانی به اندازه گیری مساحت مربع هایی که روی ضلع های هر مثلث قائم الزاویه تشکیل می شود به رابطه زیر دست پیدا کرد.

رابطـــه فیثـــاغورس:

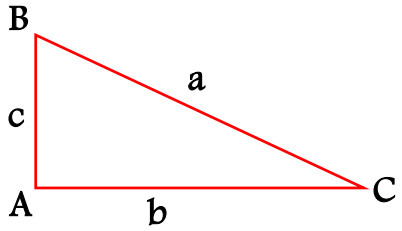
ΔABC قائـم الزاویه $\Longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$





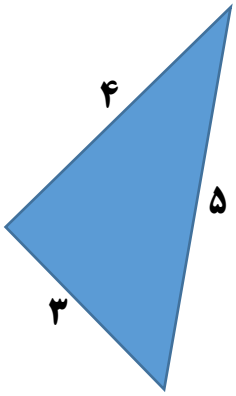
نکته ۲: عکس رابطه فیثاغورس نیز همواره صحیح است.

یعنی اگر در مثلثی مجذور (مربع یا توان دوم) بزرگترین ضلع (وتر) با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر مساوی باشد، آن را مثلث قائم الزاویه می باشد.



قائم الزاویه $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow \Delta ABC$

مثال: کدام یکی از شکل های زیر قائم الزاویه هستند؟



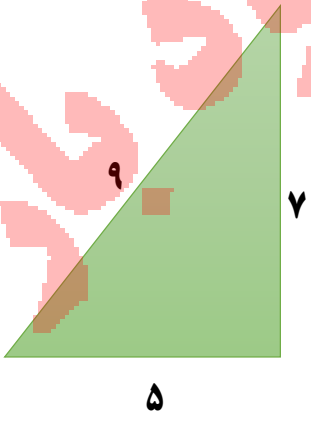
$$(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2$$

$$(۵)^2 = (۴)^2 + (۳)^2$$

$$۲۵ = ۱۶ + ۹$$

مثلث قائم الزاویه است $۲۵ = ۲۵$

بزرگترین ضلع را به عنوان وتر در نظر می گیریم:

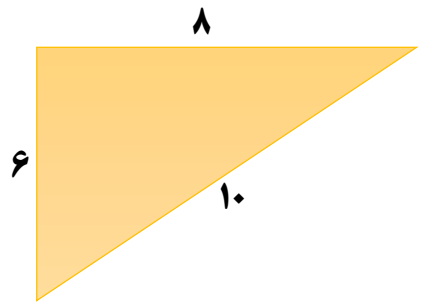


$$(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2$$

$$(۹)^2 = (۷)^2 + (۵)^2$$

$$۸۱ = ۴۹ + ۲۵$$

مثلث قائم الزاویه نیست $۸۱ \neq ۷۴$



$$(\text{وتر})^{۲} = (\text{ضلع})^{۲} + (\text{ضلع})^{۲}$$

$$(۱۰)^{۲} = (۸)^{۲} + (۶)^{۲}$$

$$۱۰۰ = ۶۴ + ۳۶$$

$$۱۰۰ = ۱۰۰$$ مثلث قائم الزاویه است

نکته ۳: یکی از کاربردهای رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه این می باشد که در هر مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع به وسیله رابطه فیثاغورس می توان اندازه ضلع سوم را محاسبه کرد. برای انجام این کار بهتر است مجهول را به دو دسته زیر تقسیم بندی کنیم.

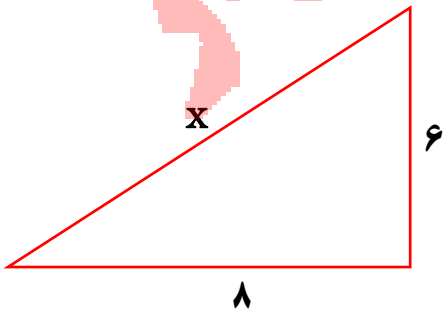
الف) وتـــر مجهـــول است در این حالت طبق مراحل زیر عمل می کنیم.

۱ رابطه فیثاغورس را به کمک اندازه ضلع ها می نویسیم.

۲ عددها را به توان ۲ می رسانیم.

۳ عددهای بدست آمده را جمع می کنیم.

۴ از دو طرف تساوی جذر می گیریم.



$$(\text{وتر})^{۲} = (\text{ضلع})^{۲} + (\text{ضلع})^{۲}$$

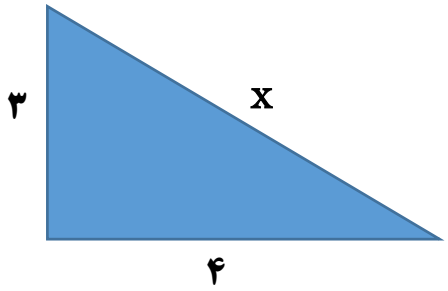
$$(x)^{۲} = (۸)^{۲} + (۶)^{۲}$$

$$x^{۲} = ۱۰۰$$

$$\sqrt{x^{۲}} = \sqrt{۱۰۰} \Rightarrow x = ۱۰$$

نکته: اگر توان دوم وتر مجذور کامل نبود، در صورت نیاز تا یک رقم یا دو رقم اعشار محاسبه می کنیم.

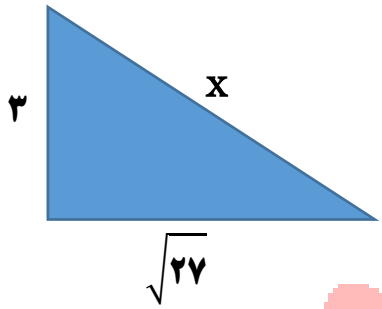
مثال: در شکل های زیر مقدار مجهول را بدست آورید.



$$(\text{وتر})^{۲} = (\text{ضلع})^{۲} + (\text{ضلع})^{۲}$$

$$x^{۲} = ۴^{۲} + ۳^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۲۵ \Rightarrow x = \sqrt{۲۵} = ۵$$

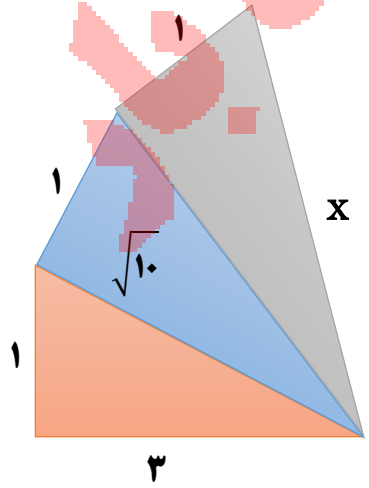
نکته: اگر جذر هر عدد را به توان ۲ برسانیم خود عدد حاصل می شود. $\left(\sqrt{۱۰}\right)^{۲} = ۱۰$



$$x^{۲} = ۳^{۲} + \left(\sqrt{۲۷}\right)^{۲}$$

$$x^{۲} = ۹ + ۲۷ = ۳۶$$

$$x = \sqrt{۳۶} = ۶$$



وتر مثلث اول $a^{۲} = ۳^{۲} + ۱^{۲} = ۹ + ۱ = ۱۰$

$$a = \sqrt{۱۰}$$

وتر مثلث دوم $b^{۲} = \left(\sqrt{۱۰}\right)^{۲} + ۱^{۲} = ۱۰ + ۱ = ۱۱$

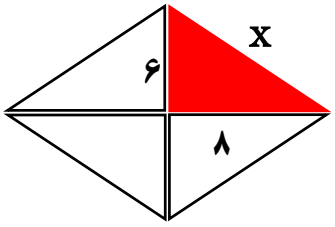
$$b = \sqrt{۱۱}$$

وتر مثلث سوم $x^{۲} = \left(\sqrt{۱۱}\right)^{۲} + ۱^{۲} = ۱۱ + ۱ = ۱۲$

$$x = \sqrt{۱۲} \simeq ۳/۵$$

اندازه قطرهای یک لوزی ۱۲ و ۱۶ سانتی متر هستند. اندازه ضلع لوزی را بدست آورید.

در لوزی قطرها یکدیگر را نصف می کنند.



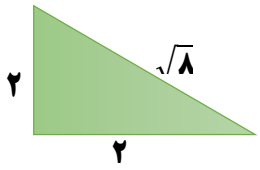
$$x^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$

$$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

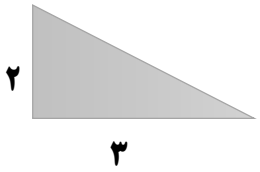
نکته : **گاهی اوقات مقادیری زیر رادیکال به ما داده می شود و از ما می خواهند پاره خط هایی به اندازه داده شده رسم کنیم، باید مجذوراتی را پیدا کنیم که از جمع آن مجذورات عدد زیر رادیکال حاصل شود.**

اگر مجموع مجذورات کمتر از عدد زیر رادیکال شد، مانند مثال صفحه قبل مثلث هایی با ضلع یک روی مثلث ساخته شده ایجاد می کنیم تا یک قدم یک قدم به عدد خواسته شده برسیم(مثال سوم)

$\sqrt{۸}$ $۸ = ۴ + ۴ = ۲^{۲} + ۲^{۲}$



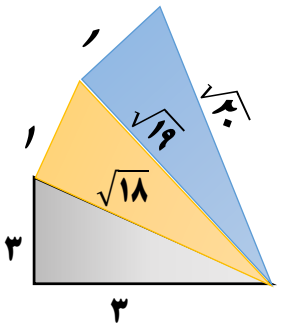
$\sqrt{۱۳}$ $۱۳ = ۹ + ۴ = ۳^{۲} + ۲^{۲}$



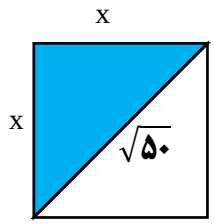
$\sqrt{۲۰}$ $\longrightarrow$ $۱۸ = ۳^{۲} + ۳^{۲}$

$۱۹ = \left(\sqrt{۱۸}\right)^{۲} + (۱)^{۲}$

$۲۰ = \left(\sqrt{۱۹}\right)^{۲} + (۱)^{۲}$

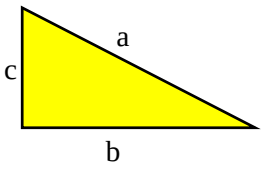


مثال: اندازه ضلع مربعی را بدست آورید که قطر آن $\sqrt{۵۰}$ باشد.



$$(\text{وتر})^۲ = (\text{ضلع})^۲ + (\text{ضلع})^۲$$
$$(\sqrt{۵۰})^۲ = x^۲ + x^۲ = ۲x^۲$$
$$۵۰ = ۲x^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵$$
$$x = \sqrt{۲۵} = ۵$$

ب) اگر یکی از ضلع های زاویه قائمه مجهول باشد.



$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \quad \text{یا} \quad b^۲ = a^۲ - c^۲$$

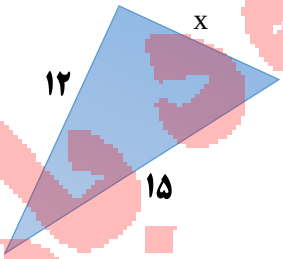
به صورت مراحل زیر

۱ رابطه فیثاغورس را به صورت $(\text{ضلع})^۲ = (\text{وتر})^۲ - (\text{ضلع دیگر})^۲$

۲ عددها را به توان ۲ می رسانیم.

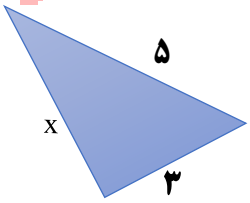
۳ عددهای بدست آمده را از هم کم می کنیم.

۴ از دو طرف جذر می گیریم.

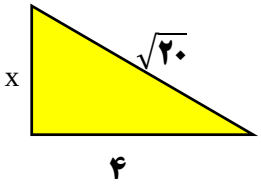


$$(\text{ضلع})^۲ = (\text{وتر})^۲ - (\text{ضلع دیگر})^۲$$
$$x^۲ = ۱۵^۲ - ۱۲^۲ = ۲۲۵ - ۱۴۴ = ۸۱$$
$$x = \sqrt{۸۱} = ۹$$

مثال: در شکل های زیر مقدار مجهول را بدست آورید.

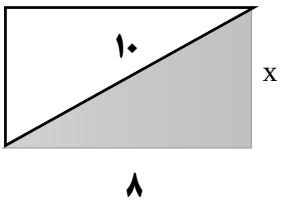


$$(\text{ضلع})^۲ = (\text{وتر})^۲ - (\text{ضلع})^۲$$
$$x^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶$$
$$x = \sqrt{۱۶} = ۴$$



$$(\text{ضلع})^{۲} = (\text{وتر})^{۲} - (\text{ضلع})^{۲}$$
$$x^{۲} = (\sqrt{۲۰})^{۲} - ۴^{۲} = ۲۰ - ۱۶ = ۴$$
$$x = \sqrt{۴} = ۲$$

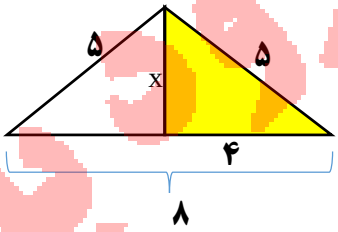
مثال: طول مستطیلی ۸ سانتی متر و قطر آن ۱۰ سانتی متر. عرض مستطیل را بدست آورید.



$$(\text{ضلع})^{۲} = (\text{وتر})^{۲} - (\text{ضلع دیگر})^{۲}$$
$$x^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶$$
$$x = \sqrt{۳۶} = ۶$$

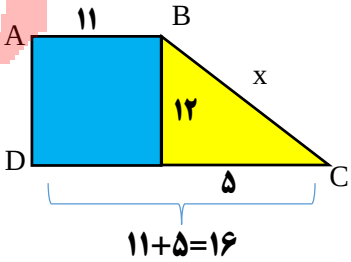
مثال: ساق های مثلث متساوی الساقین ۵ سانتی متر و قاعده آن ۸ سانتی متر طول دارد ارتفـاع وارد بر قاعده مثلث را بدست آورید.

نکته: در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده عمود منصف است.



$$(\text{ضلع})^{۲} = (\text{وتر})^{۲} - (\text{ضلع})^{۲}$$
$$x^{۲} = ۵^{۲} - ۴^{۲} = ۲۵ - ۱۶ = ۹$$
$$x^{۲} = ۹ \qquad x = \sqrt{۹} = ۳$$

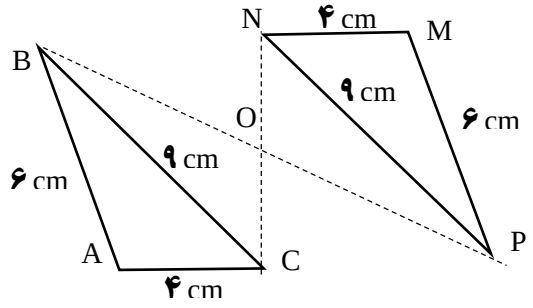
مثال: اندازه ضلع ذوزنقه ی قائم الزاویه زیر را بدست آورید.



$$x^{۲} = ۱۲^{۲} + ۵^{۲} = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹$$
$$x = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$
$$AD = ۱۲$$
$$DC = ۱۱ + ۵ = ۱۶$$

۲– ۶ شکـــل های هم نهشـــت

نکته: هر گاه بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (انتقال، تقارن، دوران) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند می گوئیم دو شکل با یکدیگر هم نهشت هستند.



در شکل بالا دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MNP}$ با تبدیل دوران ۱۸۰ درجه ، هم نهشت می شوند.

مثلث ABC با دوران ۱۸۰ درجه به مرکز O بروی مثلث MNP منطبق می شود.

مثلث MNP نیز با دوران ۱۸۰ درجه به مرکز O بروی مثلث ABC منطبق می شود.

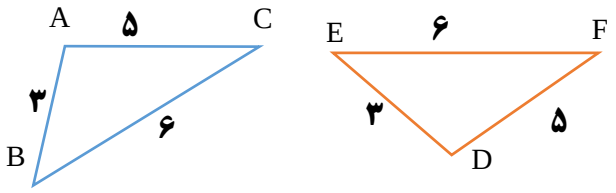
*بنابراین می گوئیم: مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ هم نهشت است یا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP}$

نکته: وقتی دو شکل هم نهشت شدند، اجزای متناظر نیز برابرند، بنابراین:

«تساوی زاویه ها»	«تساوی اضلاع»
$\hat{A} = \hat{M}$	$AB = MP = ۶CM$
$\hat{B} = \hat{P}$	$AC = MN = ۴CM$
$\hat{C} = \hat{N}$	$BC = NP = ۹CM$

نکته: زاویه های مقابل به اضلاع مساوی در دو شکل هم نهشت با هم برابرند.

مثال: در دو شکل هم نهشت مقابل تساوی زاویه های متناظر را بنویسید.



در دو شکل هم نهشت زاویه های روبرو به ضلع های مساوی با هم برابرند.

$\overline{AB} = \overline{DE} \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = \hat{F}$

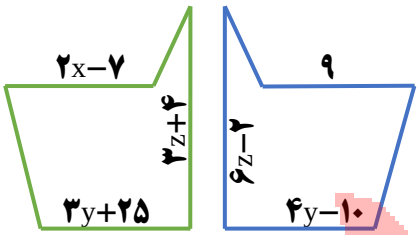
$\overline{AC} = \overline{DF} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = \hat{E}$

$\overline{BC} = \overline{EF} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{D}$

کاربـــرد تبدیـــلات هنـــدسی:

با استفاده از هم نهشتی شکل ها و نوشتن تساوی اجزای متناظر می توانیم ضلع یا زاویه مجهول را پیدا کنیم.

در شکل زیر، دو شکل هم نهشت هستند.



الف) چه نوع تبدیلی صورت گرفته است.

ب) اندازه x ، y و z را بدست آورید.

پاسخ الف) تقارن محوری

پاسخ ب) برای ضلع ها و زاویه های متناظر تشکیل معادله می دهیم و حل می کنیم

$۲x - ۷ = ۹ \rightarrow ۲x = ۹ + ۷ = ۱۶$

$x = \frac{۱۶}{۲} = ۸$

$۴y - ۱۰ = ۳y + ۲۵$

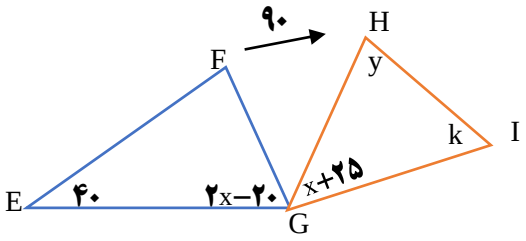
$۴y - ۳y = ۲۵ + ۱۰ \rightarrow y = ۳۵$

$۳z + ۴ = ۶z - ۲ \rightarrow ۶z - ۳z = ۴ + ۲ \rightarrow$

$۳z = ۶ \rightarrow z = ۲$

مثلث HIG حاصل دوران ۹۰ درجه مثلث EFG حول نقطه G است.

اندازه زاویه های مجهول را بیابید $(\Delta EFG \cong \Delta HIG)$



$\hat{E} = \hat{H} = y = ۴۰^\circ$

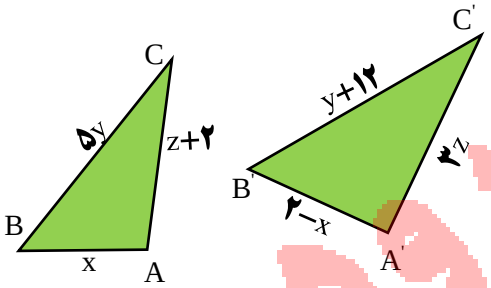
$۲x - ۲۰ = x + ۲۵$

$۲x - x = ۲۵ + ۲۰ = ۴۵ \rightarrow x = ۴۵$

$\hat{F} = \hat{I} = k \rightarrow ۱۸۰ - (۴۰ + ۷۰) = ۷۰$

$(۲ \times ۴۵) - ۲۰ = ۷۰ \qquad \widehat{G_۱} = \widehat{G_۲} = ۷۰^\circ$

مثال: دو شکل زیر هم نهشت هستند، اندازه هر ضلع را بدست آورید.



$\overline{AB} = \overline{\acute{A}\acute{B}}$

$x = ۲ - x$

$x + x = ۲ \Rightarrow ۲x = ۲ \rightarrow x = \frac{۲}{۲} = ۱$

$\overline{AC} = \overline{\acute{A}\acute{C}}$

$Z + ۲ = ۳z$

$Z - ۳z = -۲ \rightarrow -۲z = -۲ \rightarrow z = \frac{-۲}{-۲} = +۱$

$\overline{BC} = \overline{\acute{B}\acute{C}}$

$۵y = y + ۱۲ \rightarrow ۵y - y = ۱۲ \rightarrow ۴y = ۱۲$

$y = \frac{۱۲}{۴} = ۳$

$AB = x = ۱$

$AC = z + ۲ = ۱ + ۲ = ۳$

$BC = ۵y = ۵ \times ۳ = ۱۵$

نکته: چنین مثلثی وجود ندارد چون حاصل جمع دو ضلع کوچکتر همیشه باید از ضلع بزرگتر بیشتر باشد.

درس سوم:

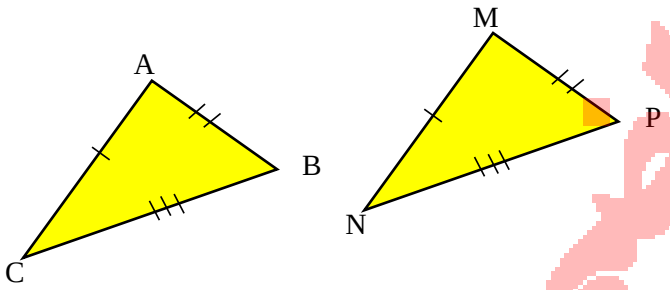
مثلـــث های هم نهشـــت

حالت های هم نهشتی دو مثلث عبارتند از: ض: یعنی ضلع ز: یعنی زاویه

الف) تساوی سه ضلع هر دو مثلث که به اختصار حالت (ض، ض، ض) می گویند.

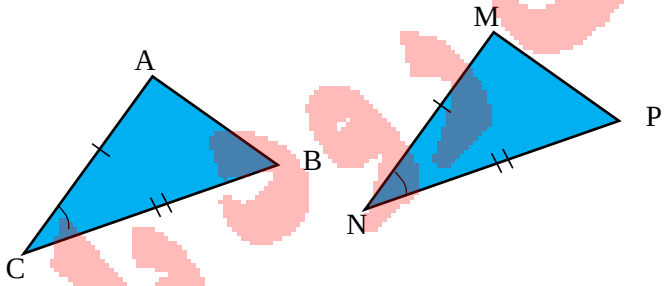
ب) تساوی دو ضلع و زاویه بین هر دو مثلث، که به اختصار حالت (ض، ز، ض) می گویند.

ج) تساوی دو زاویه و ضلع بین هر دو مثلث که به اختصار حالت (ز، ض، ز) می گویند.



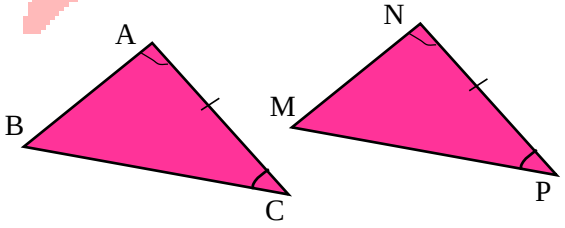
$$\left.\begin{matrix} AC=MN \\ AB=MP \\ BC=NP \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ض\ ض\ ض)} \Delta ABC \cong \Delta MNP$$

حالت ب) (ض ز ض)



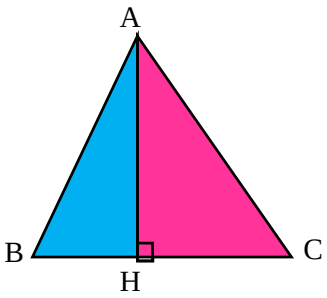
$$\left.\begin{matrix} AC=MN \\ BC=NP \\ \hat{C}=\hat{N} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ض\ ز\ ض)} \Delta ABC \cong \Delta MNP$$

حالت ج) (ز ض ز)



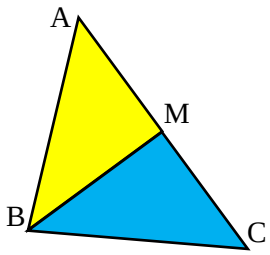
$$\left.\begin{matrix} \hat{A}=\hat{N} \\ AC=NP \\ \hat{C}=\hat{P} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ز\ ض\ ز)} \Delta ABC \cong \Delta MNP$$

آشنـــایی با چنـــد مفهـــوم هندســـی



ارتفـــاع: پاره خطی که از راس زاویه بر ضلع مقابل عمود می شود.

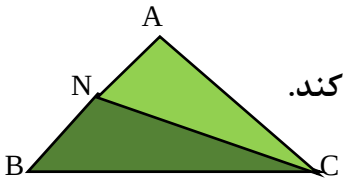
در شکل AH ارتفاع وارد بر ضلع BC است.



میـــانه: پاره خطی که راس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند.

در شکل مقابل BM میانه وارد بر ضلع AC است.

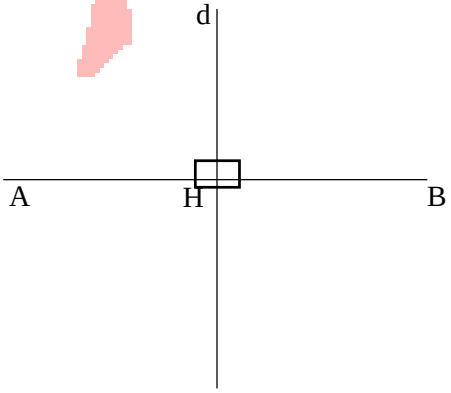
تذکـــر: از هر راس مثلث می توان بر ضلع مقابل آن میانه را رسم کنیم.



نیم ســـاز زاویـــه: نیم خطی که زاویه را به ۲ قسمت مساوی تقسیم می کند.

در شکل مقابل CN نیمساز زاویه $\widehat{C}$ است و $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

عمود منصـــف یک پـــاره خط: خطی است که بر یک پاره خط عمود می شود و آن را نصف می کند.

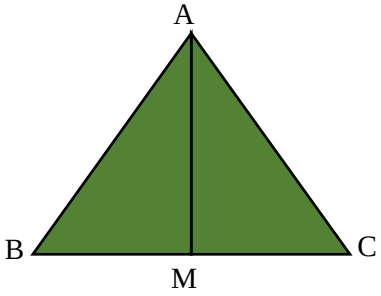


در شکل مقابل $d \perp AB$ و $AH = AB$

عمود است

مثال: در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه وارد بر قاعده است،

ثابت کنید $\overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{AMC}$

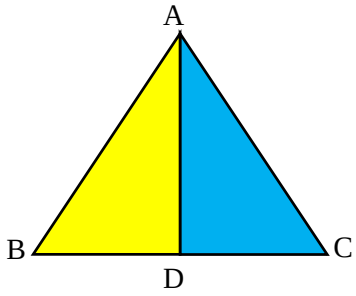


یادآوری: در مثلث متساوی الساقین ساق ها برابرند $(AB = AC)$

$$\left.\begin{matrix} AM=AM \\ AB=AC \\ BM=CM \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{AMC}$$

مثال: در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A در مثلث متساوی الساقین ABC است.

آیا $\boldsymbol{BD = CD}$ است؟ چرا؟



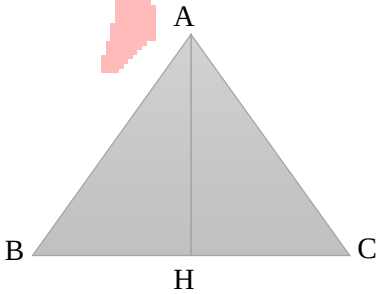
$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{AB = AC} \text{ مثلث متساوی الساقین} \\ \boldsymbol{AD}\ \widehat{\boldsymbol{A}}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}_2 \text{ نیمساز زاویه } \widehat{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{AD = AD} \text{ ضلع مشترک} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{\boldsymbol{ABD}} \cong \overset{\Delta}{\boldsymbol{ACD}} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}}$$

$$BD = CD$$

نکته: وقتی دو مثلث هم نهشت شدند. تمام اجزای دو مثلث **(ضلع ها، زاویه ها)** نیز برابر می شوند(به دلیل انطباق دو مثلث بروی یکدیگر که تساوی اجزای متناظر نام دارد.

مثال: در شکل مقابل،AH نیم ساز زاویه $\widehat{A}$ و ارتفاع مثلث است.

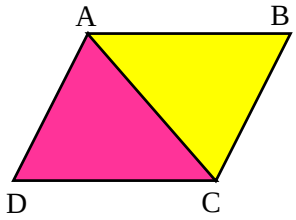
نشان دهید دو مثلث AHB و AHC هم نهشت اند.



$$\left.\begin{matrix} \hat{A} \text{ نیمساز } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AH = AH \text{ ضلع مشترک} \\ \text{ارتفاع مثلث } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{AHB} \cong \overset{\Delta}{AHC}$$

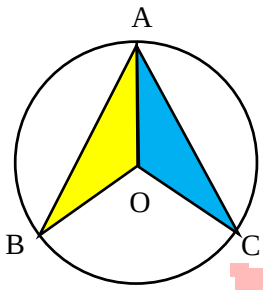
مثال: چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع می باشد چرا دو مثلث ABC و ACD هم نهشت هستند.

یـــادآوری: (در متوازی الاضلاع ضلع های روبرو مساویند زاویه های روبرو نیز برابرند)



$$\left.\begin{array}{l}\text{روبرو ضلع } \overline{AB}=\overline{CD}\\ \text{ضلع مشترک } \overline{AC}=\overline{AC}\\ \text{ضلع روبرو } \overline{AD}=\overline{BC}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{ض ض ض})} ABC\cong ACD$$

مثال: در شکل زیر وترهای AB و AC مساوی هستند چرا دو مثلثOAC و OAB هم نهشت هستند؟ اجزای متناظر آن ها را بنویسید.



$$\left.\begin{array}{l}\text{ضلع مشترک } \overline{OA}=\overline{OA}\\ \text{شعاع دایره } OB=OC\\ \text{صورت مسئله گفته وترهای دایره مساوی } \overline{AB}=\overline{AC}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{ض ض ض})} AOB\cong OAC\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}}$$

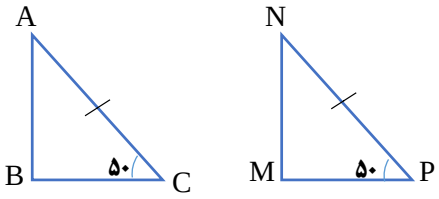
$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\\ \hat{B}=\hat{C}\end{cases}$$

هم نهشتـی مثلـث های قائـم الزاویـه:

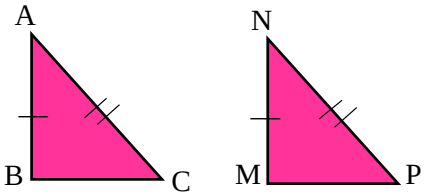
نکته: برای نشان دادن هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه علاوه بر ۳ حالت قبل می توان از ۲ حالت زیر استفاده کرد.

الف) تساوی وتر و یک ضلع (و ض)

ب) تساوی وتر و یک زاویه تند (و ز)

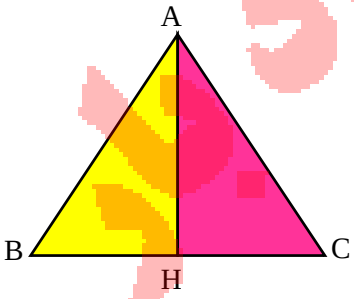


وتر $AC = NP$
زاویه تند $\hat{C} = \hat{P}$
$\Big\} \xrightarrow{(\text{و ز})} \Delta ABC \cong \Delta MNP$



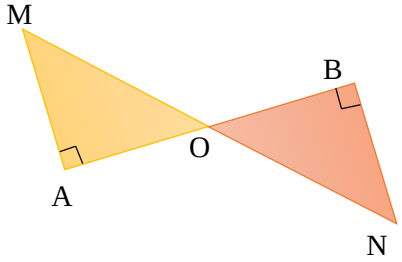
وتر $AC = NP$
ضلع $AB = MN$
$\Big\} \xrightarrow{(\text{و ض})} \Delta ABC \cong \Delta MNP$

مثال: در شکل زیر AH ارتفاع مثلث متساوی الساقین ABC می باشد. چرا دو مثلث AHB و AHC هم نهشت هستند؟



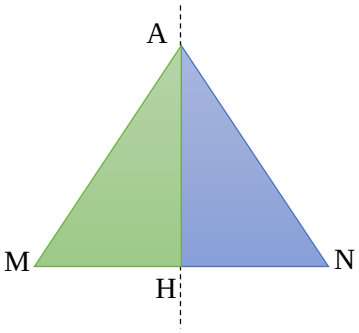
ضلع مشترک $AH = AH$
ساق مثلث متساوی الساقین $\overline{AB} = \overline{AC}$
$\Big\} \xrightarrow{(\text{و ض})} \Delta AHB \cong \Delta AHC$

مثال: در شکل زیر نقطه O وسط پاره خط MN است $A = B = ۹۰^\circ$، دلیل هم نهشتی دو مثلث را بیان کنید.



$$\left.\begin{array}{l} OM = ON \quad \text{نقطه وسط پاره خط} \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \quad \text{زاویه های متقابل به رأس} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{و ز})} \Delta_{OAM} \cong \Delta_{OBN}$$

مثال: در شکل مقابل خط a عمود منصف پاره خط MN است دلیل هم نهشتی دو مثلث را بیان کنید.

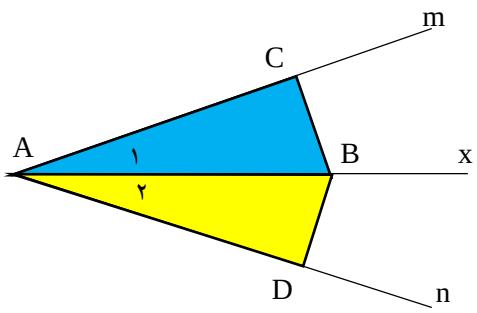


$$\left.\begin{array}{l} MH = NH \quad \text{خط } a \text{ عمود منصف } MN \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰ \quad \text{خط } a \text{ عمود منصف } MN \\ AH = AH \quad \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta_{AMH} \cong \Delta_{ANH}$$

تـــذکر: در صورت نداشتن د لیل برای تساوی وترها در مثلث قائم الزاویه، حالت های ویژه هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه (و ز – و ض) را کنار گذاشته و از حالت های هم نهشتی دو مثلث (ض ض ض – ض ز ض – ز ض ز) استفاده می کنیم.

نتیجه سوال بالا: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک اندازه است.$(AM = AN)$

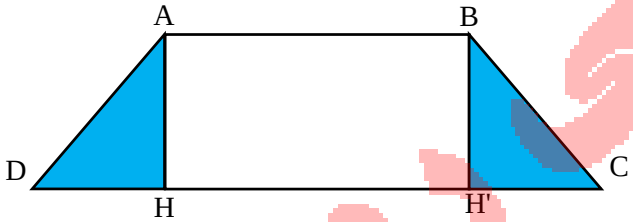
مثال: در شکل زیر AX نیم ساز زاویه $m\hat{A}n$ است و $\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ دلیل و حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.



$$\left.\begin{array}{ll} AB = AB & \text{وتر مشترک} \\ A_۱ = \hat{A}_۲ & Ax \text{ نیمساز } \hat{A} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{و ز})} \Delta ABC \cong \Delta ABD$$

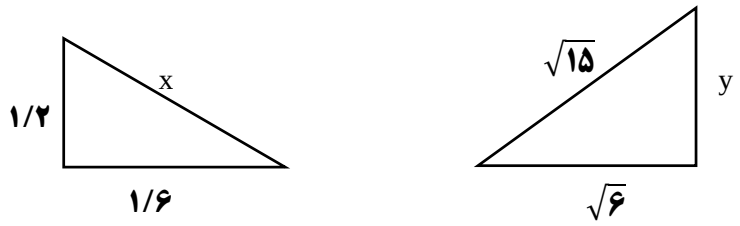
نتیجه سوال بالا: هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است $(BD = BC)$

مثال: چهار ضلعی ABCD دوزنقه متساوی الساقین می باشد و $H = H' = ۹۰^\circ$ چرا دو مثلث AHD و $A\acute{H}C$ هم نهشت هستند؟

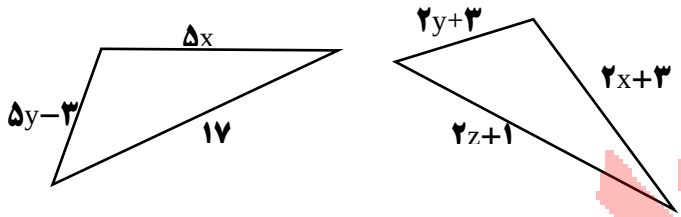


$$\left.\begin{array}{ll} \overline{AD} = \overline{BC} & \text{ساق های ذوزنقه متساوی الساقین} \\ \acute{D} = \acute{C} & \text{زاویه های مجاور به قاعده} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{و ز})} \Delta ABC \cong \Delta MNP$$

۱ با توجه به شکل اندازه x و y را پیدا کنید.(مثلث ها قائم الزاویه هستند)



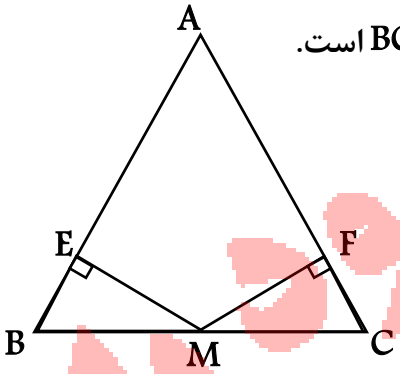
۲ شکل های زیر هم نهشت اند. مقادیر x و y و z را پیدا کنید؟ (نوع تبدیل هم نهشتی را بنویسید).



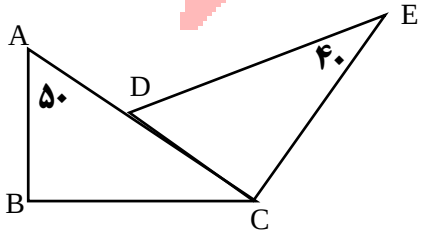
۳ در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و نقطه M وسط ضلع BC است.

آیا $ME = MF$ برابرند؟ چرا؟

وتر $MB = MC$



۴ در شکل مقابل $\overline{AC} = \overline{DE}$ و B = C = ۹۰ ثابت کنید دو مثلث ABC و DEC هم نهشت هستند.



۱ پاسخ درست را با علامت √ و پاسخ نادرست را با علامت × مشخص کنید.

الف) رابطه فیثاغورس بین اضلاع مثلث متساوی الاضلاع برقرار است.

ب) اگر دو مثلث هم نهشت باشند، می توان آن ها را بر هم منطبق کرد.

پ) در دو مثلث هم نهشت، همه ی اجزای متناظر با هم مساوی اند.

ت) اگر طول و عرض مستطیلی ۴ ، ۳ باشد. قطر مستطیل ۵ است.

ث) اگر دو ضلع و یک زاویه از مثلثی با دو ضلع و یک زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

ج) مجذور یک عدد به صورت جبری $\sqrt{a}$ می باشد.

چ) اعداد ۱/۵ ، ۲، ۲/۵ می توانند اندازه ی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند.

ح) اگر در مثلث قائم الزاویه ای رابطه ی $a^2 = c^2 - b^2$ بین اضلاع برقرار باشد، وتر مثلث b می باشد.

خ) در مثلث قائم الزاویه مجذور هر ضلع برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.

د) رابطه فیثاغورس فقط در مثلث قائم الزاویه برقرار است.

ذ) اگر ضلع مربعی ۳۵ سانتی متر باشد، قطر آن مساوی $\sqrt{50}$ است.

ر) اگر اندازه های دو ضلع قائمه ی یک مثلث قائم الزاویه ۳۰ و ۴۰ سانتی متر باشد، وتر این مثلث برابر ۵۰ سانتی متر است.

ز) رابطه فیثاغورس در همه ی مثلث ها برقرار است.

ژ) اگر ضلع مربعی مساوی یک باشد، اندازه ی قطر مربع مساوی $\sqrt{2}$ می باشد.

س) مثلثی با ضلع های ۱۰، ۲۰، ۳۰ سانتی متر می تواند قائم الزاویه باشد.

ش) اعداد ۴/۵ و ۶ و ۷/۵ می توانند اندازه ی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشد.

ص) اگر شکلی را با یک بردار در صفحه انتقال دهیم، شکل بدست آمده با شکل اولیه هم نهشت است.

ض) برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه ۵ حالت هم نهشتی وجود دارد.

ط) حالت (ض. ز. ض) برای هم نهشتی مثلث قائم الزاویه نیست.

ظ) حالت های (و. ز.) . (و. ض.) حالت هم نهشتی مثلث قائم الزاویه است.

ع) حالت (ز.ز.ز.) یکی از حالت های هم نهشتی دو مثلث است.

۲ جملات را کامل کنید:

الف) برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه علاوه بر برابری وترها یک ..... یا یک ..... نیاز است.

ب) هر نقطه روی نیمساز زاویه از ..... به یک فاصله است.

پ) اگر در مثلث قائم الزاویه رابطه ی $a^2 + c^2 = b^2$ برقرار باشد، وتر این مثلث با حرف ..... نشان داده می شود.

ت) هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از ..... به یک فاصله است.

ث) اگر قطرهای یک لوزی ۱۲ و ۱۶ باشد، محیط لوزی ..... سانتی متر است.

ج) در هر مثلث قائم الزاویه مجذور..... برابر است با ..... مجذورهای دو ضلع دیگر.

چ) در مثلث..... ..... مجذور بزرگ ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

ح) اگر دو ضلع و زاویه ..... از مثلثی با اجزای متناظرشان در مثلثی دیگر برابر باشند می گوییم دو مثلث هم نهشتند.

خ) در صورتی که قطر مربعی ۱۰ سانتی متر باشد، اندازه ی ضلع آن مساوی $\sqrt{.....}$..... است.

د) اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند ..... بر شکل دیگری منطبق کنیم می گوئیم این دو شکل هم نهشت اند.

۳ دور گزینه صحیح خط بکشید.

الف) اندازه ی ضلع مربعی ۳ سانتی متر است. اندازه ی قطر این مربع کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{۱۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۱۸}$

ب) در مثلث قائم الزاویه ای بین اضلاع رابطه ی $a^۲ = b^۲ - c^۲$ برقرار است وتر این مثلث کدام گزینه است.

۱) a ۲) b ۳) c ۴) هیچ کدام

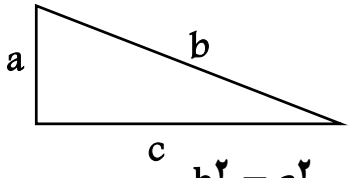
پ) اندازه ی هر ضلع مثلث متساوی الاضلاعی ۶ سانتی متر است. اندازه ی ارتفاع این مثلث کدام گزینه است؟

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

ت) کدام یک از گزینه های زیر می تواند اندازه ی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشد؟

۱) ۱۵، ۱۳، ۹ ۲) ۵، ۴، ۳ ۳) ۸، ۴، ۳ ۴) ۱۴، ۱۲، ۵

ث) در مثلث قائم الزاویه در شکل مقابل کدام رابطه درست است؟



۱) $a^۲ = b^۲ + c^۲$ ۲) $c^۲ = b^۲ + a^۲$ ۳) $b^۲ = a^۲ + c^۲$ ۴) $b^۲ = a^۲ - c^۲$

ج) کدام دسته از اعداد زیر می توانند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند؟

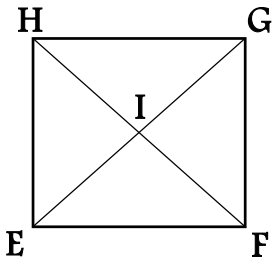
۱) ۲، ۳، ۴　　۲) ۴، ۵، ۶　　۳) ۸، ۱۰، ۶　　۴) ۵، ۶، ۷

م) کدام دسته از اعداد زیر می توانند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند؟

۱) ۲، ۳، ۴　　۲) ۱۳، ۱۲، ۵　　۳) ۶، ۴، ۱۲　　۴) ۱۰، ۷، ۶

چ) اندازه قطر مربعی ۴ سانتی متر است. طول ضلع این مربع کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{۶}$　　۲) $\sqrt{۸}$　　۳) $\sqrt{۱۰}$　　۴) $\sqrt{۳۲}$



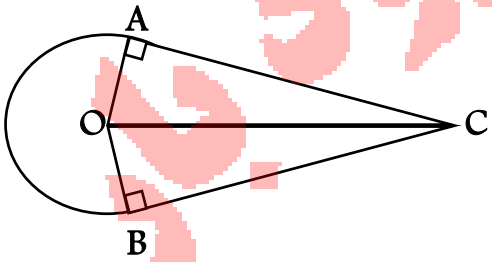
ح) درباره مربع EFGH کدام گزینه زیر نادرست است؟

۱) $\Delta IEF \cong \Delta HIE$　　۲) $\Delta GHF \cong \Delta HIG$　　۳) $\Delta HEF \cong \Delta HGE$　　۴) $\Delta IEF \cong \Delta HIG$

د) کدام یک از گزینه های زیر یک حالت هم نهشتی برای مثلث ها است؟

۱) تساوی دو ضلع و زاویه بین آنها　۲) تساوی سه ضلع　۳) تساوی سه زاویه　۴)گزینه های ۱ و ۲

۴ با توجه به شکل عبارت ها را کامل کنید . (O مرکز دایره است)



الف) ..... =OA چون .....

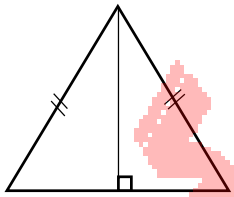
ب) OC ضلع ..... دو مثلث است.

پ) مثلث ..... =..... چون .....

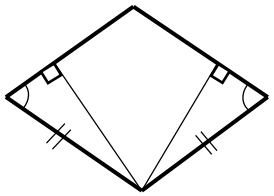
ت) پس .... بنا به حالت .....

۵ در کدام شکل اطلاعات برای بیان هم نهشتی کافی نیست؟ در مواردی که اطلاعات کافی است، نام حالت را بنویسید.

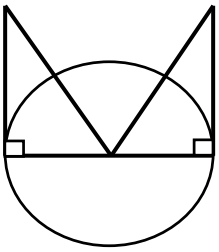
الف)



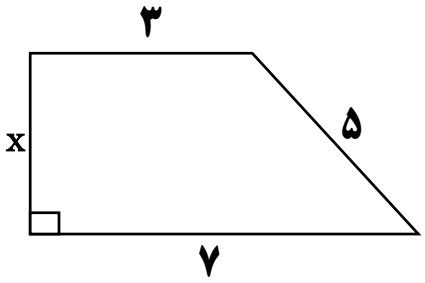
ب)

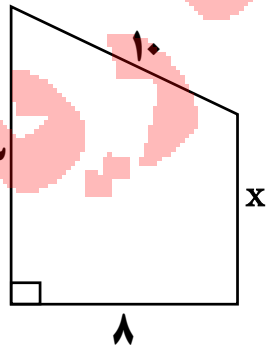


پ)



۶ مقدار x را پیدا کنید.

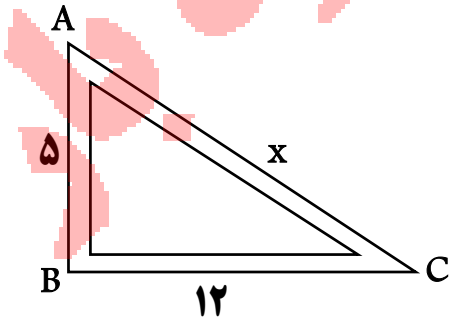




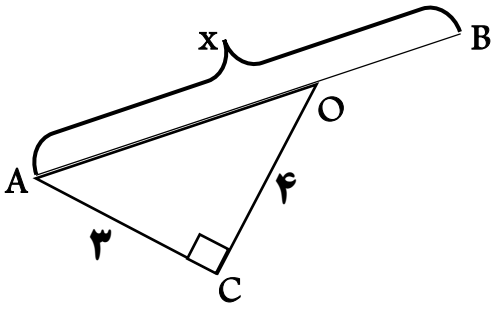
۷ ارتفاع مثلث متساوی الساقینی را حساب کنید که اندازه هر ساق آن ۱۵ و قاعده آن ۱۲ است.

۸ قطر یک مستطیل ۲۶ سانتی متر و عرض آن ۱۰ سانتی متر است. طول مستطیل را بدست آورید.

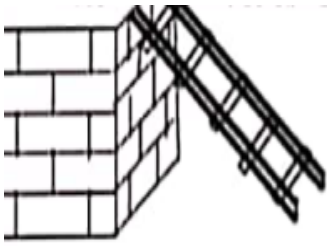
۹ در گونیای مقابل، طول AC را بدست آورید.



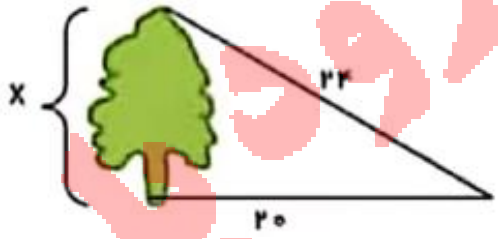
۱۰ اگر O وسط پاره خط AB باشد. اندازه AB را بدست آورید.



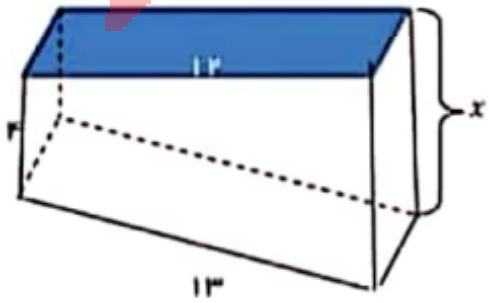
۱۱ در شکل مقابل طول نردبان ۱۰ متر و فاصله نردبان از دیوار ۸ متر می باشد بلندی دیوار را بدست آورید.



۱۲ در شکل مقابل ارتفاع درخت را تا یک رقم اعشار حساب کنید.



۱۳ گودی قسمت عمیق استخر را حساب کنید.



گروه ریاضی روژان

۱۴ دو شکل زیر هم نهشت هستند، با چه تبدیل هایی می توان شکل A را بر شکل B منطبق کرد؟

گروه ریاضی رودبار