

فصل (۴)

جبر و معادله

امام صادق (ع) دوست را فقط بر اسراری مطلع کن که اگر دشمنت از آن آگاه می شد برایت

ضرری نداشت، چرا که دوست هم گاهی دشمن می شود.

هوالمحق

خداوند انسان را خلیفه بی خود در روی زمین خوانده است. آیا شما بزرگی و عظمت خود را انکار می کنید؟

عبارت جبری

تشکیل شده از اعداد و حروف یا هر عبارتی که شامل یک یا چند متغیر باشند. $6+x$ ، $\frac{3}{2x}$

یک جمله ای

هر عبارت به صورت ax^n که n یک عدد صحیح نامنفی و a یک عدد حقیقی می باشد را یک جمله ای گویند. a ضریب، x متغیر، n = درجه جمله)

📖 **مثال** $5x^2$ ، $\sqrt{7}x^2$ و $25x^2y$ یک جمله ای هستند.

در $\sqrt{5}x^3$ ← ضریب $\sqrt{5}$ ، متغیر x و درجه ۳ می باشد.

👉 **توجه:** با دلیل مشخص کنید که چرا عبارات زیر تک جمله ای نیستند.

$$\sqrt{x} \quad \sqrt{-4x^2} \quad \frac{7}{x} \quad \frac{6}{\cdot}x^2 \quad 5x^{-2} \quad \frac{1}{x^2-1}$$

📖 **نکته:** هر عدد حقیقی یک جمله ای است که متغیر ندارد یا اینکه متغیر آن می تواند هر متغیری با توان صفر باشد.

👉 **نتیجه** اینکه درجه ی تمام اعداد حقیقی صفر است. $\sqrt{7} = \sqrt{7} y^0$ **مثال** $9=9X^0$

نکته: در یک جمله می توان بیشتر از یک متغیر داشت که در این صورت درجه جمله نسبت به همه ی متغیرها

برابر است با مجموع درجات آنها.

مثال
$$\begin{cases} 5x^2y^4 \longrightarrow 2+4=6 \\ 6x^3yz \longrightarrow 3+1+1=5 \end{cases}$$

یک جمله ای های متشابه : جمله هایی که متغیر آنها یکسان و هم

درجه باشند را متشابه می نامند.

نکته: یک جمله ایهای متشابه را می توان با یکدیگر جمع یا تفریق کرد.

مثال سه جمله ی متشابه مثل : $\sqrt{2}x^2yz^3$ ، $-\frac{2}{3}z^2yx^2$ ، $-yx^2z^2$

توجه: $5x^2y$ و $5xy^2$ متشابه نیستند.

تمرین عبارات جبری زیر را ساده کنید.

الف) $3a - 5b + 4a - 9b =$

ب) $7a^2 + 3a - a^2 + 5a + 1 =$

ج) $+3ab - 5ab^2 - 2ab + ab^2 =$

د) $3x - \frac{2}{3}x + \frac{x}{2} =$

هـ) $\frac{4}{5}x^2z^2 - \frac{x^2z^2}{2} + x^2z^2 =$

ر) $-xy^2 + \frac{1}{2}x^2y - 5y^2x - 8x^2y + x^2y =$

بررسی چهار عمل اصلی روی تک جمله ای ها

جمع یا تفریق : $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n \rightarrow 6x^r \pm 11x^r = (6 \pm 11)x^r$

ضرب : $ax^n \times bx^m y = (a \times b)x^{n+m} y \rightarrow \frac{1}{4}x^f \times (-3)x^r y = -\frac{3}{4}x^f y$

تقسیم : $\frac{ax^n}{bx^m} = \left(\frac{a}{b}\right)x^{n-m} \rightarrow \frac{35x^r}{7 \cdot x} = \left(\frac{5}{1}\right)x^r$

تمرین (حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

(۱) $(3ab)(-5ab^r) =$

(۲) $(5a^r b)^r =$

(۳) $\left(-\frac{2}{3}a^r b^r\right)^r =$

(۴) $(\sqrt{2}x^r y^r)^r =$

(۵) $(\sqrt{5} \frac{m^r n^r}{m^{-1}})^r =$

(۶) $\left(\frac{2}{5}x^r y^r z^r\right)\left(-\frac{1}{2}xyz^r\right) =$

(۷) $\frac{\sqrt[3]{48x^3 y^5}}{\sqrt{3y^r x^{-r}}}$

توجه : برای ضرب و تقسیم عبارات جبری هیچ محدودیتی نیست یعنی نیازی به جمله های متشابه نداریم.

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای

در این حالت جمله را در هر یک از جملات ضرب می کنیم. (خاصیت پخش ضرب در جمع و تفریق)

$$m(a + b - c) = ma + mb - mc$$

مثال $5xy(x^r - 3xy^r + y - 5) =$

ضرب چند جمله ای در چند جمله ای

در این حالت باید تک تک جملات آن ها را در یکدیگر ضرب کنیم.

$$(a+b)(m+n+p) = a(m+n+p) + b(m+n+p) = am + an + ap + bm + bn + bp$$

مثال $(x-y)(3x+y-1) =$

تمرین (اگر $A = (x+y-1)$ و $B = (x+y)$ باشند ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$AX =$$

$$-BA =$$

فاکتورگیری

تبدیل یک عبارت به صورت حاصلضرب دو عبارت است. (تبدیل چند جمله به یک جمله)

در واقع فاکتورگیری برعکس پخش کردن است.

در فاکتورگیری به دنبال عامل مشترک هستیم ، آنها هم بزرگترین عامل مشترک.

برای پیدا کردن جمله های داخل پرانتز هر جمله سمت چپ تساوی را به عامل فاکتور تقسیم می کنیم.

$$\underbrace{a^2b + a^2c - a^2d}_{\text{سه جمله}} = a^2 \times \underbrace{(b + ac - ad)}_{\text{یک جمله}}$$

↑
عامل فاکتور

تمرین (هر عبارت را به صورت حاصلضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$ab - ac + ad =$$

$$5a^2 + 6a =$$

$$x^2y^2z + xy^2z - xy^2z^2 =$$

$$12a^2x^2 - 18ax^2 + 6a^2x^2 =$$

$$\sqrt{7}x + \sqrt{7}y - \sqrt{7}z =$$

تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای

$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$$

مثال)
$$\frac{42x^3y^5 - 36x^4y^7 + x^3y^2}{6x^3y^2}$$

تقسیم چند جمله ای به چند جمله ای

از صورت و مخرج فاکتورگیری کرده و سپس ساده می کنیم.

مثال)
$$\frac{x^4y^7 - x^3y^5}{-x^2y^3 + xy}$$
 (اگر ساده نشد تا سال آینده صبر می کنیم!)

محاسبه ی مقادیر عددی

وقتی در یک عبارت جبری از متغیرهایی مثل x, y, \dots استفاده می شود به این معنی است که این متغیرها می توانند جایگزین اعداد متفاوتی شوند و به همین دلیل قابل تغییر بودن به آن ها متغیر می گوئیم.

تمرین مقدار عددی عبارات زیر را به ازاء مقادیر داده شده ، حساب کنید.

$$x = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad y = -\sqrt{2}; \quad x^2 - y^2 =$$

$$a = 3, b = -4 \rightarrow -b^2 - 2ab = -$$

$$a = -2, \quad \frac{5a^4 + 11a^6}{4a^{3A} - 2a^{3A}}$$

$$a = 3 \quad b = -2a \quad c = ab$$

$$A = (a-b)(c-a) = \dots$$

اتحادها

تساوی های جبری هستند که به ازای همه ی مقادیر ممکن و حقیقی درست هستند و سرعت محاسبات ما را بیش تر

می کنند.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

۱ - اتحاد نوع اول : «مربع مجموع دو جمله ای»

$$(a+b)^2 =$$

$$(2x+5)^2 =$$

$$(4x^2+3y^2)^2 =$$

$$(2\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 =$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

۲ - اتحاد نوع دوم : «مربع تفاضل دو جمله ای»

$$(a-b)^2 =$$

$$\text{مثال } (\sqrt{7}-3)^2 =$$

$$(7x-2y)^2 =$$

$$(5\sqrt{2}-\sqrt{8})^2 =$$

$$(1999 \times 1999) =$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

۳ - اتحاد نوع سوم : «مزدوج»

(اثبات)

$$(\sqrt{35}-\sqrt{17})(\sqrt{35}+\sqrt{17}) =$$

$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=$$

$$(a^r-b^r)(a^r+b^r)=$$

$$(\sqrt{7}+2\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2 =$$

$$(\sqrt{199}-10)^{1000} \times (\sqrt{199}+10)^{1000} =$$

$$9 \times 11 \times 101 \times 1001 =$$

معادله

معادله یک تساوی جبری است که به ازاء بعضی مقادیر عددی یک تساوی درست می شود.

مثلاً: تساوی جبری $2x+3=13$ به ازاء $x=5$ یک تساوی درست می شود و معادله نام دارد.

📖 **مثال:** معادله $x^2+5=21$ به ازاء $x=4$ و $x=-4$ یک تساوی درست می شود.

📖 **مثال:** آیا $x=2$ جواب معادله زیر است؟ چرا؟

$$\frac{x-1}{3} - \frac{5-x}{5} = \frac{4}{7}$$

خیر زیرا معادله را به یک تساوی نادرست تبدیل کرد.

$$x=2 \Rightarrow \frac{2-1}{3} - \frac{5-2}{5} = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15} \neq \frac{4}{7}$$

یادآوری

📖 **نکته (۱)** اگر به طرفین یک تساوی، عددی را اضافه یا کم کنیم حاصل باز هم درست می شود.

$$\text{اگر } a=b \Rightarrow a+k=b+k \text{ و اگر } a=b \Rightarrow a-k=b-k$$

نکته (۲) اگر دو طرف یک تساوی را در عددی ضرب کنیم حاصل یک تساوی درست خواهد بود.

$$\text{اگر } a = b \Rightarrow a \times k = b \times k$$

نکته (۳) اگر دو طرف یک تساوی را بر عددی غیر صفر تقسیم کنیم حاصل یک تساوی درست می شود.

$$\text{اگر } a = b \Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$$

تعریف: اگر در یک معادله حداکثر توان مجهول ۱ باشد به آن معادله، معادله ی درجه (۱) می گویند.

$$\text{مانند: } 3x - 7 = 11 \text{ یا } \frac{2x - 1}{3} + \frac{x}{5} = 1$$

*معادله ی درجه یک حداکثر یک جواب دارد یعنی اینکه یا یک جواب دارد یا جواب ندارد.

$$\text{(جواب ندارد) غیر ممکن } x + 7 = x \Rightarrow 7 = 0 \text{ یک جواب } 2x + 5 = 17 \Rightarrow x = 6$$

تعریف: معادله ای که بزرگترین توان مجهول آن ۲ باشد معادله ی درجه ۲ نامیده می شود.

$$\text{(مثال)} \quad x^2 + 3x = 10 \text{ یا } x^2 - 1 = 24$$

معادله درجه ۲ حداکثر دو جواب دارد. یعنی یا دو جواب دارد یا یک جواب یا صفر جواب

(مثال) معادلات زیر را حل کنید.

دو جواب ۵- و ۵ $x^2 + 2 = 27 \Rightarrow x^2 = 27 - 2 = 25 \Rightarrow x = 5$ و $x = -5$ (الف)

با حدس ۲ $x^2 + x = 6 \Rightarrow x = 2$ (ب)

جواب ندارد $x^2 + 12 = 3 \Rightarrow x^2 = -9$ (ج)

برخی معادلات خاص

(الف) اگر حاصل ضرب دو یا چند عبارت صفر شود آنگاه حداقل یکی از آن عبارات صفر است.

$$\text{مثال } (2a - 8)(5b + 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 8 = 0 \rightarrow a = 4 \\ \text{یا} \\ 5b + 15 = 0 \rightarrow b = -3 \end{cases} \text{ جواب های معادله}$$

ب) هر عبارتی که به توان زوج برسد همواره نامنفی است.

* اگر جمع دو یا چند عبارت نامنفی صفر شود آنگاه همه آن عبارات صفر هستند.

$$(3x-15)^4 + (x^2-1)^6 + (x^3+27)^8 = 0$$

معادله ۴ جواب دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-15=0 \rightarrow x=5 \\ x^2-1=0 \rightarrow x=+1, x=-1 \\ x^3+27=0 \rightarrow x^3=-27 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

ج) معادلات کسری: اگر کسری مساوی صفر باشد پس صورت آن کسر صفر می شود.

* در معادلات کسری بعد از یافتن جواب باید جواب را در مخرج امتحان کنیم جوابی قابل قبول است که مخرج را صفر نکند.

$$\text{مثال) } \frac{(-2a-12)(a^2-25)}{(2a+10)(6-a)} = 0 \Rightarrow \text{صورت} = 0 \Rightarrow (-2a-12)(a^2-25) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a-12=0 \rightarrow a=-6 & \text{ق ق} \\ a^2-25=0 \rightarrow a=5 \text{ و } a=-5 & \text{غ ق ق مخرج را صفر می کند.} \end{cases}$$

معادله دو جواب قابل قبول دارد

👉 **توجه:** معادله های توانی را در فصل توان خواهیم خواند.

تمرین های فصل (۱۴)

(۱) هر مسأله زیر را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

الف) برای تهیه کارت عروسی، قیمت ثابت ۵۰۰۰۰ تومان و برای هر کارت چاپ شده ۷۰۰ تومان باید پرداخت شود هزینه n کارت چقدر می شود؟

ب) اگر از عدد x مجذور آن کم شود حاصل برابر نصف معکوس آن عدد می شود. رابطه را بنویسید. (کنکور)

ج) سه نفر توافق کردند که تعداد n سکه ی یکسان داخل یک کیسه را به روش زیر بین خود تقسیم کنند. آن چه اولی برمی دارد، یک سکه بیش از نصف سکه هاست. دومی یک سوم باقی مانده را برمی دارد و سهم سومی، دو برابر سهم دومی می باشد سهم سومی را برحسب n بنویسید. (مسابقات ریاضی جهانی)

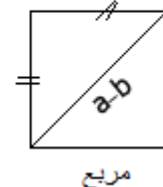
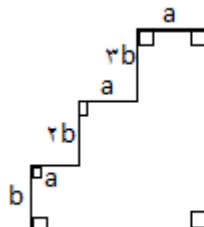
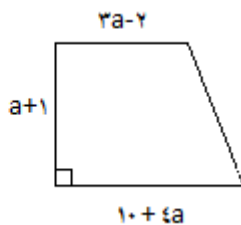
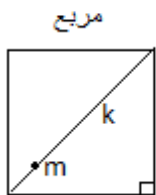
(۲) عبارات جبری زیر را به صورت کلامی بنویسید.

$$\frac{\sqrt{a+b+c}}{2} \text{ (الف)}$$

$$(a-b)^2 \text{ (ب)}$$

$$a^2 + b^2 \text{ (ج)}$$

(۳) مساحت هر شکل را به صورت عبارت جبری بنویسید.



۴) جمله n ام در هر دنباله زیر را بنویسید.

الف) $۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots$

ب) $۲, ۸, ۱۸, ۳۲, ۵۰, \dots$

ج) $۲, ۳, ۵, ۹, ۱۷, ۳۳, \dots$

د) $۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, \dots$

ه) $۴ \quad ۹ \quad ۱۴ \quad ۱۹ \quad \dots$

ر) $۱ \quad ۳ \quad ۹ \quad ۲۷ \quad ۸۱ \quad \dots$

ز) $۲ \quad ۶ \quad ۸ \quad ۱۸ \quad ۵۴ \quad \dots$

ن) $۲ \quad ۵ \quad ۱۰ \quad ۱۷ \quad ۲۶ \quad \dots$

۵) برای ساختن شکل های روبرو از چوب کبریت استفاده شده است. (مسابقات جهانی تیمز)



الف) شکل n ام چند چوب کبریت دارد؟

ب) در چندمین شکل ۳۰۳ چوب کبریت وجود دارد؟

۶) شکل n ام از چند مربع تشکیل شده است. (المپیاد ریاضی)

ب) شکل n ام چند چوب کبریت تشکیل شده است؟ (المپیاد ریاضی)

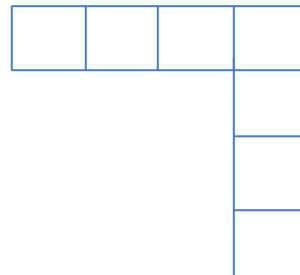
ج) اگر تعداد چوب کبریت ها ۱۸۰۴ تا باشد چند مربع خواهیم داشت؟ (المپیاد ریاضی)



(۱)



(۲)



(۳)

۷ - عبارات جبری زیر را ساده کنید.

$$\frac{3ab}{8} - \frac{5ab}{4} - ab - \frac{ab}{2} =$$

$$7xy - 6(y - 3x) - (-8x^2) =$$

$$(x + 3)(x - 1) =$$

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) =$$

$$[4a^5b^4 + 3a^7b \times (-2)a^2b^3]^7 =$$

$$\left(\frac{a^5b^{14}}{a^4b^{11}} + a^7b^3 \times a^2b^3 \right)^4 =$$

$$18a^{21} - [3a^5 - a^7(5a^2 - 6a^2)2]^7 =$$

$$\frac{3}{4}a^7(8a - 12a^2) - 2a(a^2) =$$

$$(3a - 2)(b + 3) =$$

۸) جاهای خالی را به طور مناسب پر کنید.

$$12a + \dots - 3b + \dots = 3a + 3b$$

$$6(2m + \dots) - 2(\dots + 3k) = 6m + 6k$$

۹) عبارات زیر را به صورت حاصلضرب بنویسید (تجزیه کنید)

$$18nyz - 9xy^2 =$$

$$1 \cdot a^2b^2 + 15a^2b^2 - 5a^2b^2 =$$

$$a(b+c) - d(b+c) + (b+c) =$$

$$m(a-b) + (c+d)(a-b) =$$

$$m^5 + m^4 - \frac{m^6}{5} =$$

۱۰) حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

$$(a+5)^2 =$$

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{7})(3\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

$$(2x-y)^2 =$$

$$(3-\sqrt{6})^2 (\sqrt{6}+3)^2 =$$

$$(3x-5)(3x+5) =$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 =$$

$$(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 =$$

$$99 \times 101 =$$

$$(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4) =$$

۱۱) هر عبارت را کامل کنید.

$$9a^2 + 4b^2 + 12ab = (\square + \circ)$$

$$c^2 - 9d^2 = (\square + \circ) + (\square - \circ)$$

$$\dots + 25m^2 - 2mn = (2n - \circ)^2$$

۱۲) هر عبارت زیر را به صورت حاصلضرب بنویسید.

$$36a^2 - b^2 = \dots$$

$$a^2 - 8ab + 16b^2 =$$

$$m^2 - n^2m =$$

$$9m^2 - 36mn + 36n^2 =$$

(۱۳) اگر $a = 1 - \sqrt{3}$ و $b = 1 + \sqrt{3}$ مقدار عددی عبارت $a^2 + b^2 - 2ab$ را به دست آورید.

(۱۴) مقدار عددی عبارت $(a-b)^{10} - (b-a)^{10}$ به ازاء $a = \sqrt{7}$ و $b = \sqrt{3}$ چقدر می شود؟

(۱۵) مقدار عددی عبارت مقابل به ازاء $x = 13$ چقدر می شود؟

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 30) = \dots$$

(۱۶) اگر $a = 12$ و $b = 16$ و $c = 20$ و $p = \frac{a+b+c}{2}$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

(۱۷) اگر $a = -3$ و $b = -2$ باشد حاصل $-3a^2 - b^2$ و $a^3 - b^3$ را به دست آورید.

(۱۸) اگر $x - y = 4$ باشد حاصل $(y - 3y + 3x)^2$ را به دست آورید.

(۱۹) اگر $x - 2 = y$ باشد حاصل $(x^2 - 2xy + y^2)$ را به دست آورید.

(۲۰) اگر $a + b = 11$ و $b + c = 10$ و $c + a = 12$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $(5a + 5b + 5c)^2 =$

(۲۱) اگر $a^2 + b^2 = 10ab$ باشد حاصل عبارت مقابل را بنویسید.

$$A = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 = \dots$$

(۲۲) اگر $x^2 + y^2 = 7$ و $2xy = 5$ باشد حاصل $x^4 + y^4$ را به دست آورید.

(۲۳) اگر $a^2 + a^{-2} = 10$ باشد حاصل $a^4 + a^{-4}$ را به دست آورید.

(۲۴) معادلات زیر را حل کنید.

$$2x + 6\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 14$$

$$\frac{3}{4}(8x - 4) = \frac{5}{2}(4x + 2)$$

$$6x - 3(x - 1) = 2x + 5$$

$$\frac{3x - 7}{5x + 3} = \frac{4}{3}$$

$$(x - 2)(x + 4) = (x - 3)(x - 1)$$

$$4X + 8X + 12X + \dots + 48X + 4 = 784$$

$$\frac{5X-2}{7} - \frac{2X-3}{5} = \frac{X+1}{2}$$

$$\frac{5}{6}X = \frac{2X+1}{2} - \frac{X-2}{3}$$

$$\frac{1}{4X-3} = \frac{1}{3X-4}$$

$$\frac{X}{X-1} = \frac{X-2}{X-4}$$

۲۵) طول مستطیلی از عرض آن ۱۰ سانتی متر بیشتر است. اگر محیط آن ۹۲ سانتی متر مربع باشد مساحت مستطیل؟
(با تشکیل معادله)

۲۶) سن مادر علی ۴۸ و سن علی ۱۰ سال است. پس از چند سال سن مادر سه برابر سن فرزندش می شود؟ (معادله)

(۲۷) هفت عدد صحیح متوالی داریم. اگر مجموع سه عدد کوچکتر ۳۳ شود مجموع سه عدد بزرگتر را بیابید. (معادله)

(۲۸) در یک قلک ۳۳۰۰ ریال سکه ۱۰۰ ریالی و ۲۵۰ ریالی موجود است. اگر تعداد سکه ها ۲۱ باشد از هر نوع چند سکه داریم. (معادله)

(۲۹) عددی در تقسیم بر ۳ و ۵ به ترتیب ۲ و ۱ واحد باقی مانده می آورد. آن عدد را با تشکیل معادله به دست آورید به شرطی جمع خارج قسمتها ۱۸ شود.

(۳۰) در یک بازی جریمه هر خطا سه برابر جریمه ی خطای قبلی است. اگر یک بازیکن چهار بار خطا کند و در کل ۴۰۰۰۰ تومان جریمه شود جریمه ی اولین خطا چقدر بوده است؟ (معادله)

(۳۱) معادلات زیر را حل کنید (معادلات خاص)

$$\frac{4(3x-6)+12}{5x^2-3x-2} = 0$$

$$(2x-6)(3x-18)(x^2-1) = 0$$

$$(x^3+8)(2x-1)^4 = 0$$

$$(x^2 - 49)^0 = .$$

$$16x^2 - (3x - 6)^2 = .$$

$$(x+3)^0 + (y-1)^0 + (2x-y-z)^0 = .$$

$$\frac{(2x-1)(x^2 - \sqrt{13})}{(2x^2 - 26)} = .$$

$$(x^2 + 25)^6 + (x^2 + 1)^4 + (x^2 - 1 \cdot x + 25)^3 = .$$

دهقان