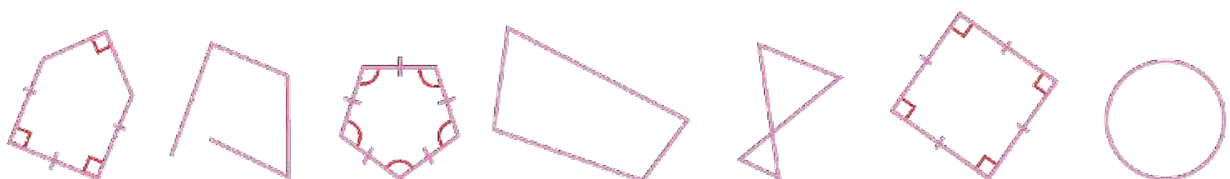
فصل ۳ چندضلعی ها

چند ضلعی

در صفحه به هر خط شکسته بسته ، چند ضلعی گفته می شود به شرط آنکه ضلع ها یکدیگر را قطع نکنند ؛ مگر در رأس ها که دو ضلع به هم می رسند .



ز　　و　　ه　　د　　ج　　ب　　الف

- ✓ شکل (ج) چند ضلعی نیست . چرا ؟ چون ضلع های آن یکدیگر را قطع کرده اند .
- ✓ شکل (و) چند ضلعی نیست . چرا ؟ چون خط شکسته بسته نمی باشد .
- ✓ شکل (الف) چند ضلعی نیست . چرا ؟ چون خط شکسته نمی باشد .

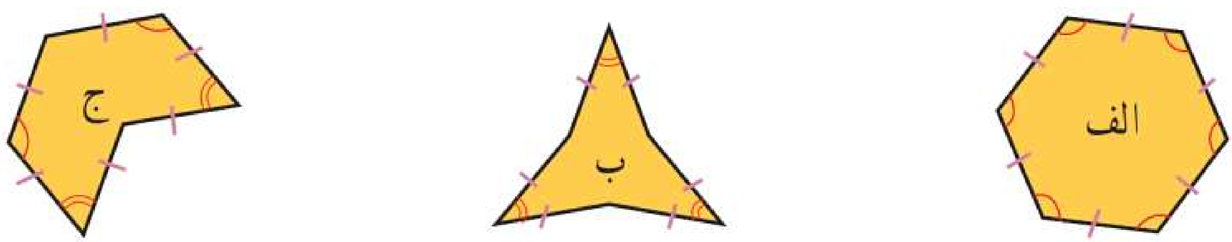
- اگر در یک چند ضلعی همه ضلع ها با هم و همه زاویه ها با هم مساوی باشند ، می گوییم آن چند ضلعی منتظم است.

ه　　ب

چند ضلعی محدب و مقعر

- چند ضلعی محدّب (کوژ) : چند ضلعی که زاویه های آن کوچکتر از ۱۸۰ درجه باشد.
- چند ضلعی مقعر (کاو) : چند ضلعی که دست کم یک زاویه ی آن بزرگتر از ۱۸۰ درجه باشد .
- چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که دارای ضلع ها و زاویه های مساوی باشد .

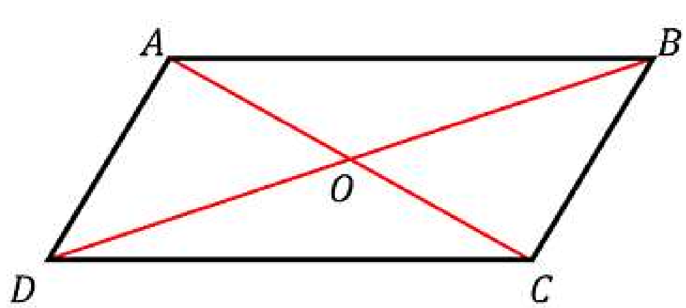
مثال : با توجه به شکل های زیر جدول کامل شده را مشاهده و درکلاس بحث نمایید.



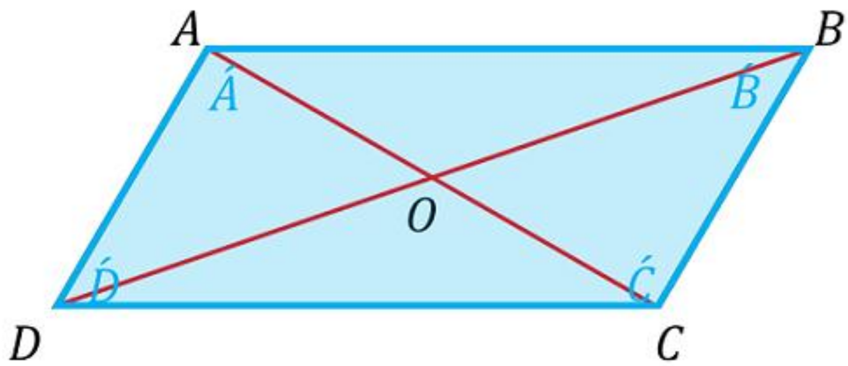
مقعر	محدّب	غیر منتظم	منتظم	شکل
✗	✓	✗	✓	الف
✓	✗	✓	✗	ب
✓	✗	✓	✗	ج

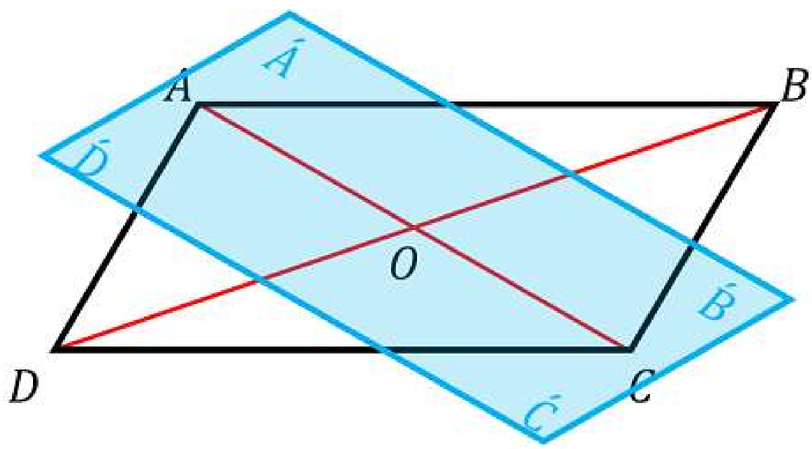
دوران ۱۸۰ درجه یک چند ضلعی حول مرکز تقارن

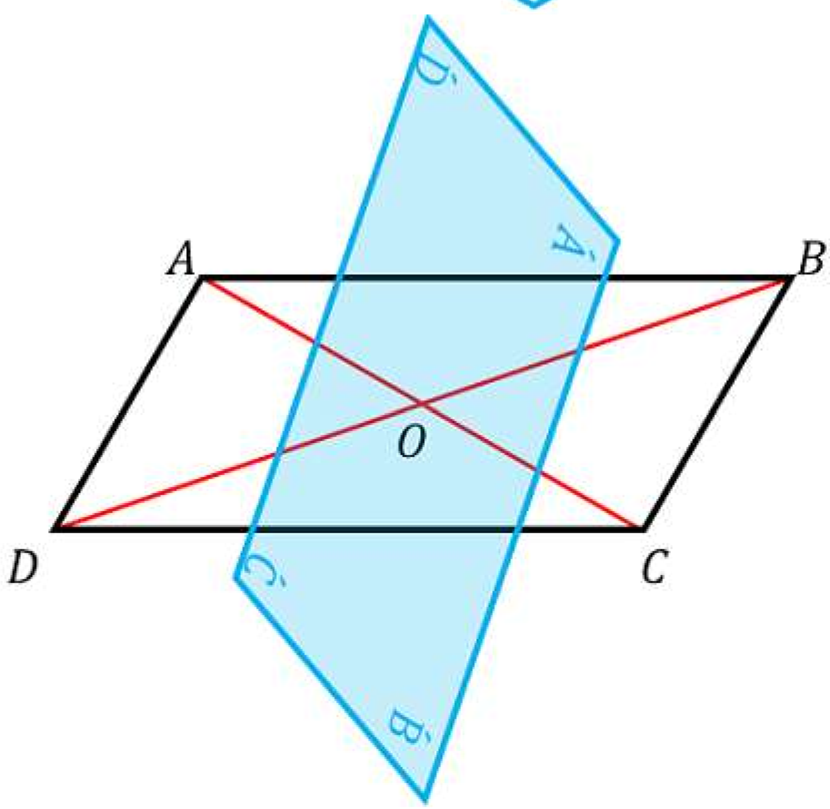
در شکل زیر می خواهیم یک متوازی الاضلاع را حول نقطه ی محل برخورد قطر های آن ، یعنی نقطه O به اندازه ۱۸۰ بچرخانیم و دوران دهیم.

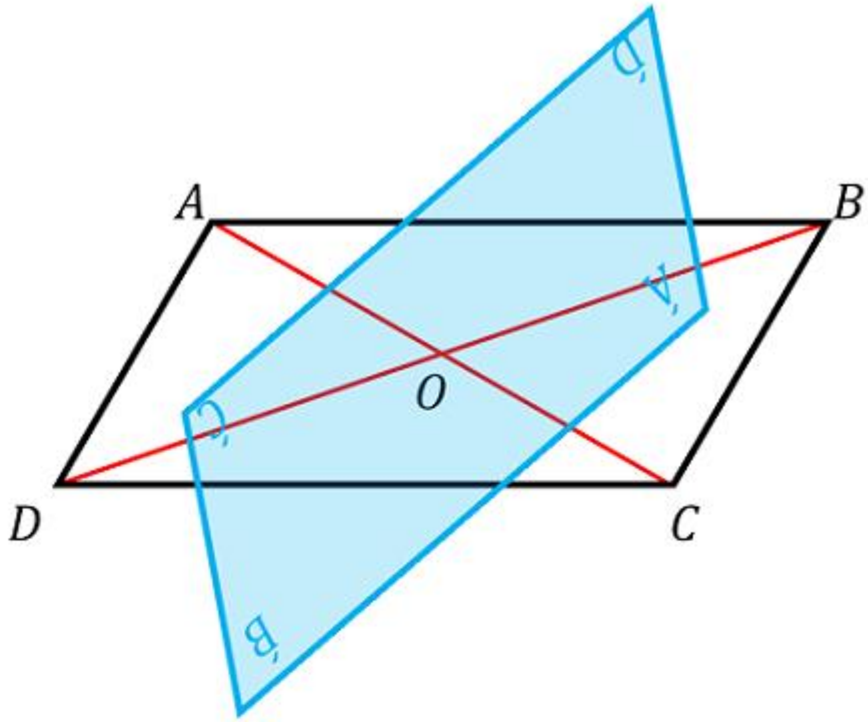


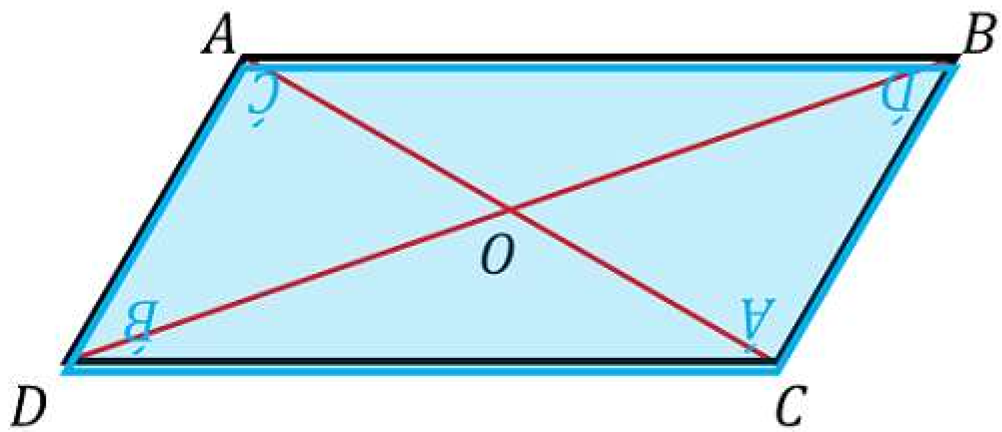
به مراحل زیر توجه نمایید و در مورد آن در کلاس بحث نمایید.









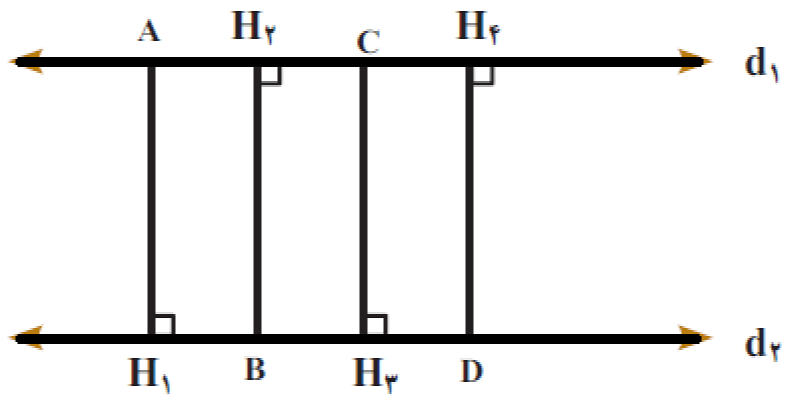


اگر نتیجهٔ دوران ۱۸۰ درجه‌ای یک شکل حول یک نقطه روی آن منطبق شود، می‌گوییم شکل مرکز تقارن دارد و نقطهٔ مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.

در شکل های بالا ، نقطه O ، مرکز دوران متوازی الاضلاع ABCD می باشد.

خطوط موازی

دو خط واقع بر یک صفحه را موازی می گوییم هر گاه آن دو خط بر هم منطبق باشند و یا هیچ نقطه ی مشترکی نداشته باشند .مانند دو خط d ۱ و d ۲ که با هم موازیند.

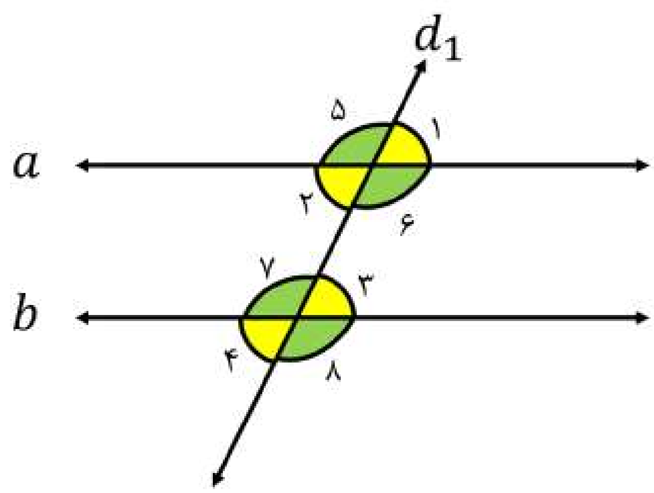


- ✓ **همانطور که در شکل بالا مشاهده می کنیم ، نقاط A و C فواصل یکسانی را از نقاط B و D دارند.**
- ✓ **در واقع در شکل بالا تمامی نقاط مشخص شده روی دو خط در فواصل یکسانی نسبت به هم قرار گرفته اند.**

- ❖ **در شکل زیر ، دو خط a و b موازی هستند .**

$$a \parallel b$$

- ❖ **به خط d_1 خط مورب می گویند.**



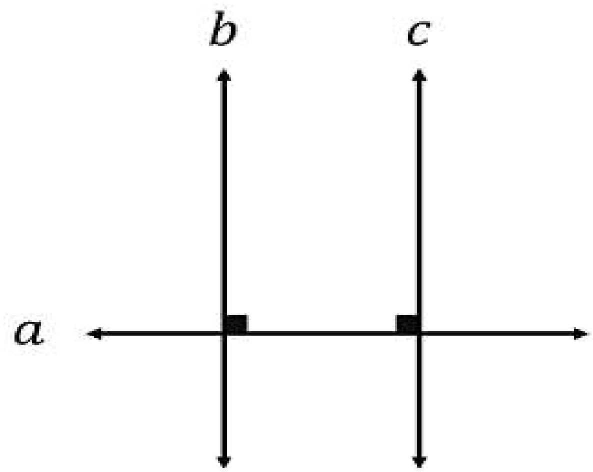
✓ هر خطی که دو خط موازی را قطع کند ، با آن ها زاویه مساوی می سازد.

- زاویه های تند با هم برابر هستند $\hat{۴} = \hat{۳} = \hat{۲} = \hat{۱}$
- زاویه های باز با هم برابر هستند $\hat{۸} = \hat{۷} = \hat{۶} = \hat{۵}$

تعامد (عمود بودن)

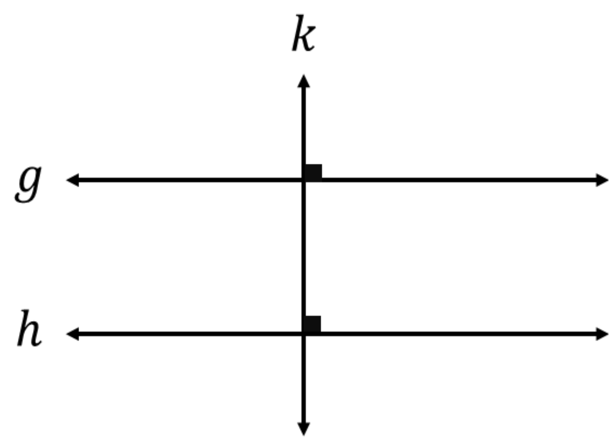
➢ دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند.

$$\left.\begin{matrix} b \perp a \\ c \perp a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow b \parallel c$$



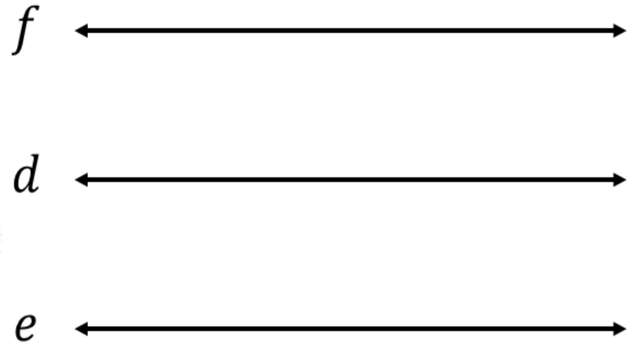
➢ اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.

$$\left.\begin{matrix} g \parallel h \\ k \perp h \end{matrix}\right\} \Longrightarrow k \perp g$$

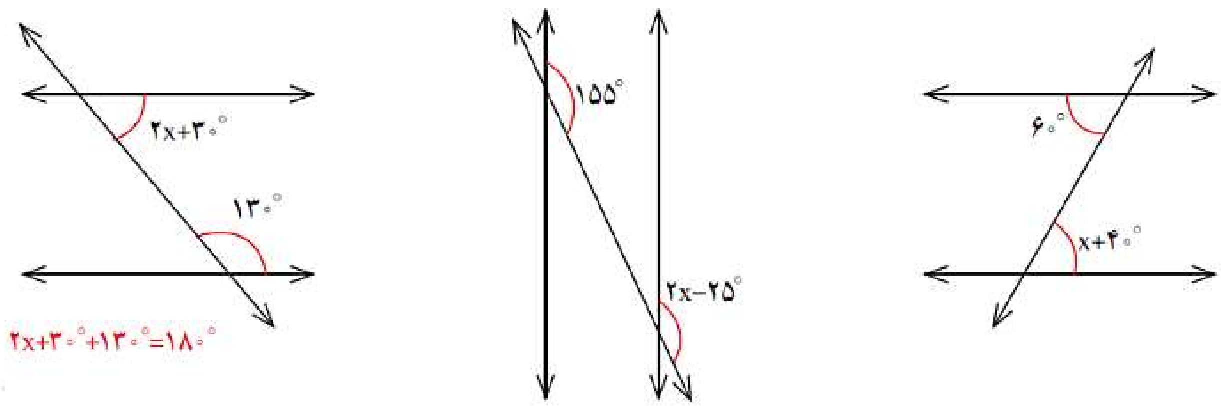


- دو خط موازی با یک خط با هم موازی اند.

$$\left.\begin{matrix} d \parallel e \\ d \parallel f \end{matrix}\right\} \Longrightarrow e \parallel f$$



تمرین : مانند نمونه حل شده ، مقدار x را بیابید.

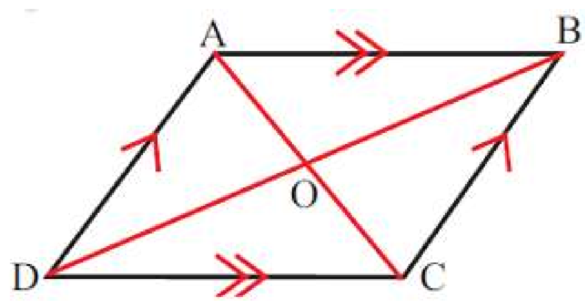


چهار ضلعی های مهم

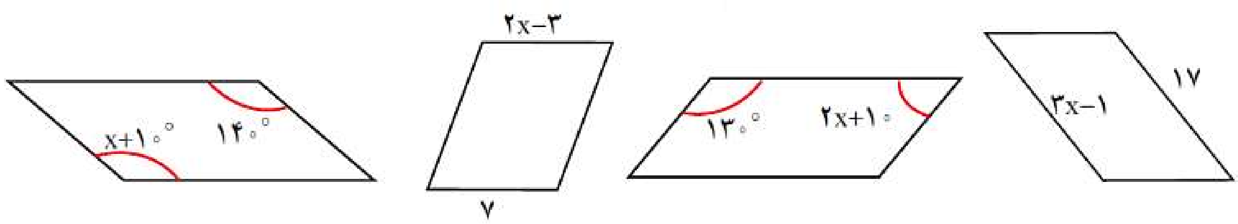
متوازی الاضلاع

- ✓ چهار ضلعی است که اضلاع آن دو به دو موازی باشند.
- ✓ در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل اند و زاویه های مجاور مقابل مساویند .

- ✓ در هر متوازی الاضلاع ضلع های مقابل با هم برابرند.
- ✓ در هر متوازی الاضلاع قطر ها یکدیگر را نصف می کنند.

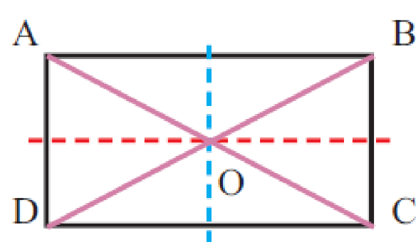


تمرین : شکل های زیر متوازی الاضلاع هستند ، با تشکیل معادله مقدار x را بیابید.



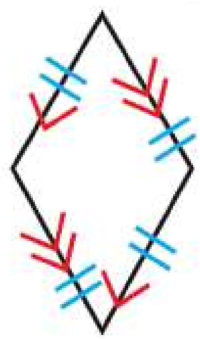
مستطیل

- ✓ چهار ضلعی که تمام زاویه های آن قائمه باشد به عبارت دیگر مستطیل متوازی الاضلا عی است که یک زاویه ی قائمه داشته باشد .
- ✓ چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خواص متوازی الاضلاع را داراست .
- ✓ قطر های مستطیل با هم برابرند.



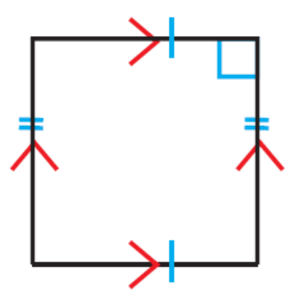
لوزی

- ✓ چهار ضلعی که چهار ضلع آن مساوی باشند لوزی است .
- ✓ چون لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس همه ی خواص متوازی الاضلاع را داراست.
- ✓ قطرهای لوزی بر هم عمودند.
- ✓ هر قطر لوزی نیمساز دو زاویه ی مقابل لوزی است .



مربع

- ✓ چهار ضلعی است که چهار ضلع آن مساوی و چهار زاویه ی آن قائمه هستند .
- ✓ بنابراین مربع هم نوعی لوزی، هم نوعی مستطیل و در نتیجه نوعی متوازی الاضلاع است. پس تمام خواص آن ها را داراست.

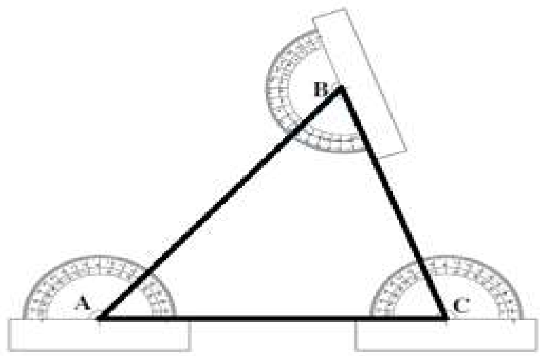


زاویه داخلی

زاویه هایی که درون یک چند ضلعی قرار دارند ، زاویه های داخلی آن چند ضلعی نامیه می شوند.

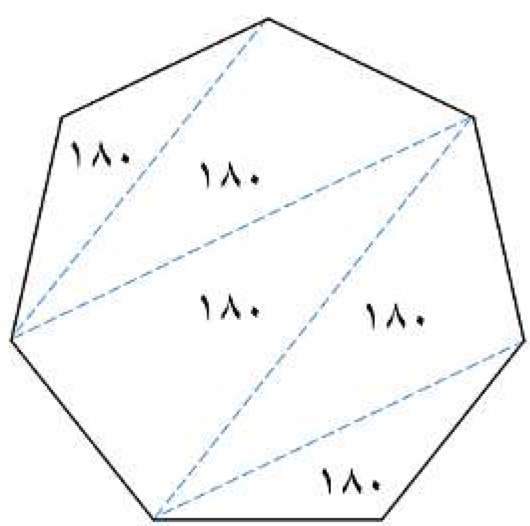
- **مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با ۱۸۰ درجه می باشد.**

به عنوان مثال ، **شکل زیر نشان می دهد که ۷۰= C و ۶۰ = B و ۵۰ = A می باشد. (مقادیر بر حسب درجه می باشند.) پس ۱۸۰= A + B + C می باشد.**



- **حال اگر تعداد اضلاع چند ضلعی ما بیشتر شد ، چگونه می توانیم مجموع زوایای داخلی آن چند ضلعی را محاسبه کنیم؟**
- **به عنوان مثال** ، **هفت ضلعی زیر را در نظر بگیرید ، مانند شکل ، آن را به چند مثلث تجزیه می کنیم. از آنجا که می دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است ، پس مجموع زوایای داخلی هر کدام از مثلث ها را با یکدیگر جمع می کنیم.**

روش اول



$$۵ \times ۱۸۰^{\circ} = ۹۰۰^{\circ}$$

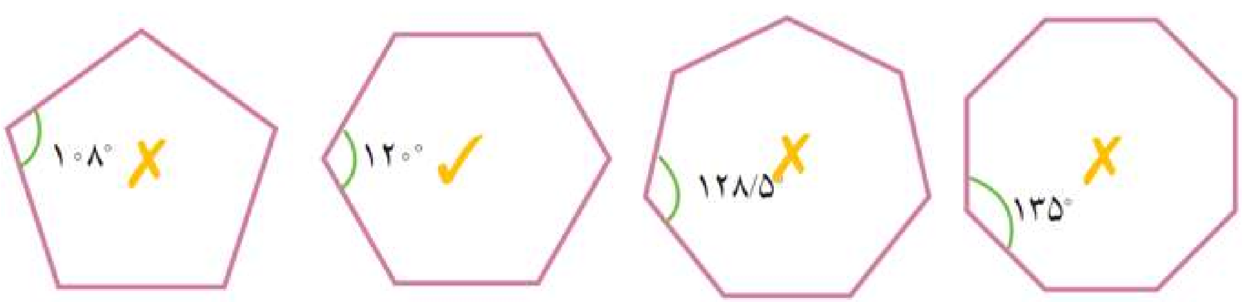
➢ **روش دوم**

$$180 \times (\text{تعداد اضلاع} - 2) = \text{مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی}$$

$$(۷ - ۲) \times ۱۸۰^{\circ} = ۹۰۰^{\circ}$$

تمرین : مجموع زوایای داخلی یک دوازده ضلعی منتظم را با استفاده از دو روش گفته شده در بالا بدست آورید.

یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.

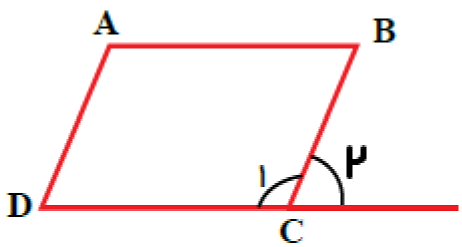


$۳۶۰ \div ۱۳۵ \simeq ۲/\overline{۶}$ $\quad$ $۳۶۰ \div ۱۲۸/۵ \simeq ۲/۸$ $\quad$ $۳۶۰ \div ۱۲۰ = ۳$ $\quad$ $۳۶۰ \div ۱۰۸ \simeq ۳/\overline{۳}$

➢ **نکته : تنها چند ضلعی هایی که زاویه ی داخلی آن ها شمارنده (مقسوم علیه) صحیح ۳۶۰ درجه است، برای کاشی کاری مناسب هستند.**

زاویه خارجی

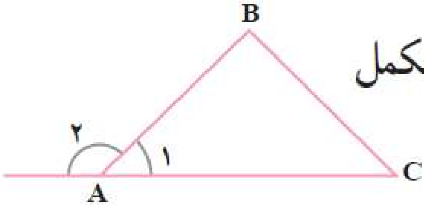
در شکل زیر ضلع DC در خارج از چهار ضلعی ABCD امتداد داده شده است و با ضلع BC تشکیل زاویه ای به نام C_2 را می دهد که به این زاویه ، زاویه خارجی می گویندکه مجموع آن با زاویه C_1 برابر با ۱۸۰ درجه میشود. پس دو زاویه C_1 و C_2 مکمل یکدیگر هستند.



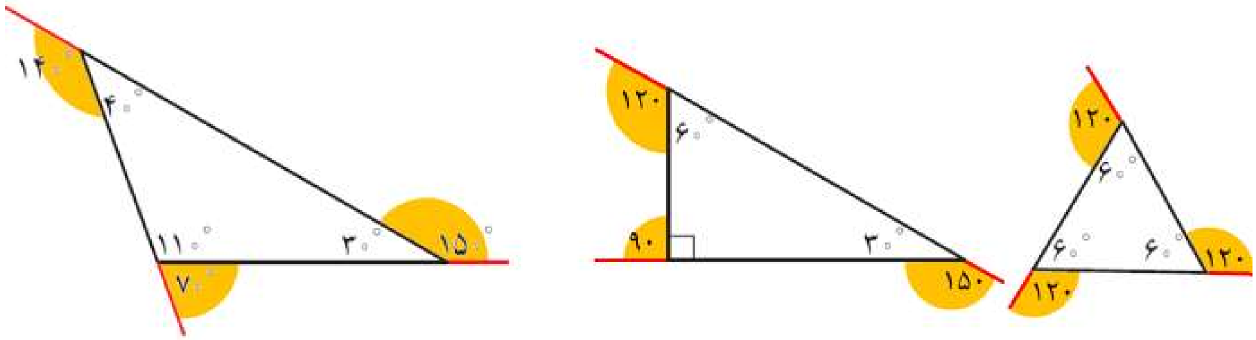
نکته بسیار مهم : به طور کلی در هر مثلث ، اندازه هر زاویه خارجی از مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن بدست می آید.

به عنوان مثال در شکل زیر ، زاویه A_2 از مجموع دو زاویه B و C بدست می آید.

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ & \text{مجموع زاویه‌های مثلث} \\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ & \text{زاویه‌های مکمل} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$



✓ مجموع زاویه های خارجی مثلث برابر ۳۶۰ درجه می باشد.



$۱۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

$۱۲۰^\circ + ۹۰^\circ + ۱۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

$۱۴۰^\circ + ۷۰^\circ + ۱۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

❖ حال اگر تعداد اضلاع زیاد شود و ما یک n ضلعی داشته باشیم ، چطور می توانیم مجموع زوایای خارجی آن n ضلعی را حساب کنیم؟

❖ با استفاده از فرمول های زیر می توانیم ، موارد اشاره شده در این فرمول ها را محاسبه کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی n ضلعی $= n \times ۱۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ n$
مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی $= (n-۲) \times ۱۸۰^\circ = n \times ۱۸۰^\circ - ۲ \times ۱۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ n - ۳۶۰^\circ$
مجموع زاویه‌های خارجی n ضلعی $= ۱۸۰^\circ n - (۱۸۰^\circ n - ۳۶۰^\circ) = ۱۸۰^\circ n - ۱۸۰^\circ n + ۳۶۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

تمرین : اندازه زاویه های خارجی و داخلی یک هشت ضلعی منتظم را بدست آورید.