فصل دوم - ریاضی ۸

حساب عددهای طبیعی

مدرس: جوان

دبیرستان غیر دولتی نیک‌نام

فصل ۲ حساب
عددهای طبیعی

یادآوری
عددهای اول

تعیین
عددهای اول

۱- یادآوری اعداد اول:

برای بدست آوردن درک درستی از یک «عدد اول» به مثال زیر توجه کنید:

مثال: در یک مدرسه دو کلاس هشتم (الف) با ۲۳ دانش‌آموز و کلاس هشتم (ب) با ۲۴ دانش‌آموز وجود دارد:

❖ **کلاس هشتم (ب):** معلم ریاضی این کلاس می‌تواند ۲۴ دانش‌آموز خود را به گروه‌های با تعداد برابر تقسیم کرده و توسط گروه‌بندی به آموزش آنها بپردازد. مثلاً:

۴ گروه ۶ نفری یا **۳ گروه ۸ نفری**

زیرا عدد ۲۴ را می‌توان به صورت ۶×۴ یا ۸×۳ نوشت.

ادامه مثال قبل:

❖ **کلاس هشتم (الف):** معلم ریاضی این کلاس نمی‌تواند ۲۳ دانش‌آموز خود را به گروه‌های با تعداد برابر تقسیم کند؛ زیرا عدد ۲۳ را نمی‌توان به صورت ضرب دو عدد کوچکتر از خود نوشت.

در ادامه به معرفی خواص عددهایی چون ۲۳ می‌پردازیم. لذا، به دو مفهوم مهم زیر توجه کنید:

➢ عدد ۶ را می‌توان به صورت **۳** × **۲** یا **۶** × **۱** نوشت. به هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۶ یک **«مقسوم علیه»** یا **«شمارنده»** عدد ۶ گفته می‌شود.

➢اگر عددی طبیعی مانند ۷ و ۲۳ فقط دارای دو شمارنده باشد، یعنی عدد ۱ و خودش، در این صورت به آن یک **«عدد اول»** گفته می‌شود. عددهای ۳، ۵، ۱۱ و ۳۱ مثال‌های دیگری از اعداد اول هستند.

یادآوری اعداد اول

- فعالیت ۱

می‌خواهیم ۱۹ نفر از دانش‌آموزان را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم، آیا می‌توانیم این تعداد را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم؟

- یک گروه ۱۹ نفره
- ۱۹ گروه یک نفره

اگر تعداد دانش‌آموزان ۷ نفر باشند، چه گروه‌هایی می‌توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

- یک گروه ۷ نفره
- ۷ گروه یک نفره

اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه‌هایی می‌توانیم تشکیل دهیم؟

- یک گروه ۱۵ نفره
- ۱۵ گروه یک نفره
- ۳ گروه ۵ نفره
- ۵ گروه ۳ نفره

نکته:

- عدد ۱ عددی اول محسوب نمی‌شود؛ زیرا فقط یک شمارندهٔ طبیعی دارد.

- عددهای طبیعی که به صورت ضرب شمارنده‌های کوچکتر از خود نوشته می‌شوند، را عدد **«مرکب»** گویند. به عنوان نمونه عددهای ۲۴ و ۶۳ مرکب هستند، زیرا می‌توان نوشت:

۸×۳ = ۲۴ و **۹×۷ = ۶۳**

در نتیجه توجه کنید که: **عدد ۱ نه اول است و نه مرکب!**

نکته:

- عدد ۲ تنها عددی است که هم زوج و هم اول می‌باشد؛ زیرا سایر عددهای زوج بر ۲ بخش‌پذیر بوده و بنابراین نمی‌توانند عدد اول باشند.

- هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ لااقل دو شمارنده دارد؛ عدد ۱ و خودش. به خصوص:

عدد ۱ شمارندهٔ مشترک تمام اعداد است!

ب.م.م:

- بزرگترین شمارندهٔ مشترک یا همان بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد مانند ۲۸ و ۴۹ را با نماد (۴۹ ,۲۸) نشان می‌دهیم: **۷ = (۴۹ ,۲۸)**

در زبان فارسی برای اختصار آن را به صورت مخفف **«ب.م.م»** می‌نویسیم. برای اینکه ب.م.م دو عدد را حساب کنیم ابتدا اعداد را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم و سپس عامل‌های اول مشترک دو عدد را مشخص کرده ، حاصل ضرب آنها ب.م.م دو عدد می‌باشد.

بعلاوه: اگر ب.م.م دو عدد برابر ۱ باشد، آن دو عدد را **«نسبت به هم اول»** گویند. به عنوان نمونه‌ها:

۱ = (۱۱ ,۴) و **۱ = (۱۵ ,۸)**

بنابراین ۴ و ۱۱ نسبت به هم اول‌اند؛ همچنین عددهای ۸ و ۱۵ نسبت به هم اول می‌باشند.

نکاتی درباره ب.م.م دو عدد:

- اگر دو عدد بر هم بخش‌پذیر باشند ب.م.م دو عدد برابر است با عدد کوچکتر.

(۶ ,۳۰) = ۶

- ب.م.م هر عدد غیر از یک با عدد یک برابر است با یک.

(n ,۱) = ۱

- ب.م.م دو عدد مثل هم برابر است با خود عدد.

(n ,n) = n

- ب.م.م دو عددی که عامل مشترک نداشته باشند برابر است با عدد یک.

(۷ ,۱۲) = ۱

ک.م.م:

- برای اینکه ک.م.م دو عدد را حساب کنیم ابتدا اعداد را به عامل‌های اول تجزیه می کنیم و سپس عامل‌های اول مشترک دو عدد را مشخص کرده، حاصل ضرب عامل‌های اول مشترک و همه عامل‌های غیر مشترک ک.م.م دو عدد می‌باشد.

مثال: ب.م.م و ک.م.م دو عدد زیر را حساب کنید.

[۸۴ , ۶۰] = ۲×۳×۳×۷×۵ = ۴۲۱

۶۰ = ۲×۳×۳×۵

۸۴ = ۲×۳×۳×۷

(۸۴ , ۶۰) = ۲×۳×۳= ۱۲

۶۰ = ۲×۳×۳×۵

۸۴ = ۲×۳×۳×۷

نکاتی درباره ک.م.م دو عدد:

- اگر دو عدد بر هم بخش‌پذیر باشند ک.م.م دو عدد برابر است با عدد بزرگتر.

[۱۲ ,۳۶] = ۳۶

- ک.م.م هر عدد غیر از یک با عدد یک برابر است با خود عدد.

[n ,۱] = n

- ک.م.م دو عدد مثل هم برابر است با خود عدد.

[n ,n] = n

- ک.م.م دو عددی که عامل مشترک نداشته باشند برابر است با حاصل ضرب آن دو عدد.

[۷ ,۹] = ۶۳

نکته:

- دو عدد اول مختلف همیشه نسبت به هم اول هستند، مانند: **(۱۳ ,۱۷) = ۱**
- به یاد بیاورید که کوچکترین مضرب مشترک **(ک.م.م)** دو عدد از تقسیم:

$$\text{ک.م.م} = \frac{\text{ضرب دو عدد}}{\text{ب.م.م}}$$

بدست می‌آید. در حالتی که ب.م.م برابر ۱ باشد:

$$\text{ک.م.م} = \frac{\text{ضرب دو عدد}}{۱} = \text{ضرب دو عدد}$$

- در نتیجه:

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها از ضربشان در یکدیگر بدست می‌آید.

به عنوان نمونه ک.م.م دو عدد ۱۳ و ۱۷ عبارت است از: **[۱۳ ,۱۷] =۱۳ ×۱۷ = ۲۲۱**

نکته:

یکی از استفاده‌های مهم از ک.م.م دو عدد، هنگام مخرج مشترک گرفتن است.

مثال: محاسبات زیر را توسط مخرج مشترک‌گیری توسط ک.م.م انجام دهید.

الف) $\frac{۵}{۱۲}-\frac{۷}{۱۶}$

ب) $\frac{۷}{۸}+\frac{۵}{۹}$

الف) توجه کنید که ۴ = (۱۶ ,۱۲) و بنابراین مخرج مشترک مناسب برای این قسمت عدد ۴ /۱۲× ۱۶= [۱۶ ,۱۲]

یا ۴۸ است. پس می‌نویسیم:

$$\frac{۷}{۱۶}-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۷\times۳}{۴۸}-\frac{۵\times۴}{۴۸}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۸}=\frac{۱}{۴۸}$$

ب) در مورد عددهای ۹ و ۸ توجه کنید که ۱ = (۹ ,۸) و در نتیجه مخرج مشترک (ک.م.م) همان ضرب مخرج‌ها یعنی ۷۲ = ۸ × ۹ است. لذا:

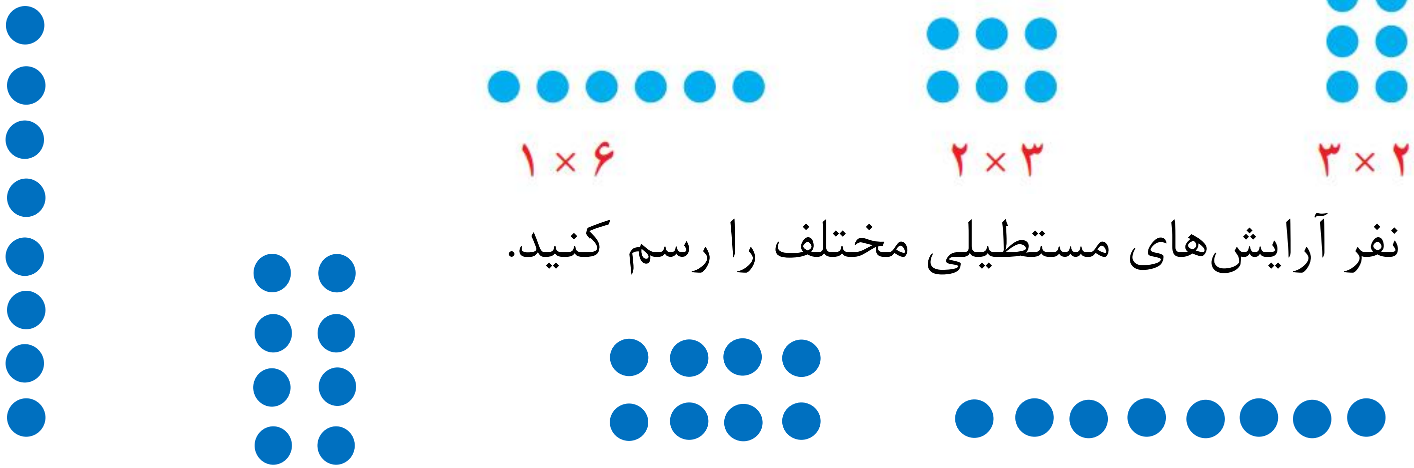
$$\frac{۵}{۹}+\frac{۷}{۸}=\frac{۵\times ۸}{۷۲}+\frac{۷\times ۹}{۷۲}=\frac{۴۰+۶۳}{۷۲}=\frac{۱۰۳}{۷۲}$$

■ فعالیت ۲

تعدادی از سربازان می‌خواهند رژه بروند. فرمانده آنها آرایش‌های مستطیلی مختلف برای گروه‌های شش نفره را روی کاغذ کشیده است.

۶×۱   ۳×۲   ۲×۳   ۱×۶

شما هم برای ۸ نفر آرایش‌های مستطیلی مختلف را رسم کنید.

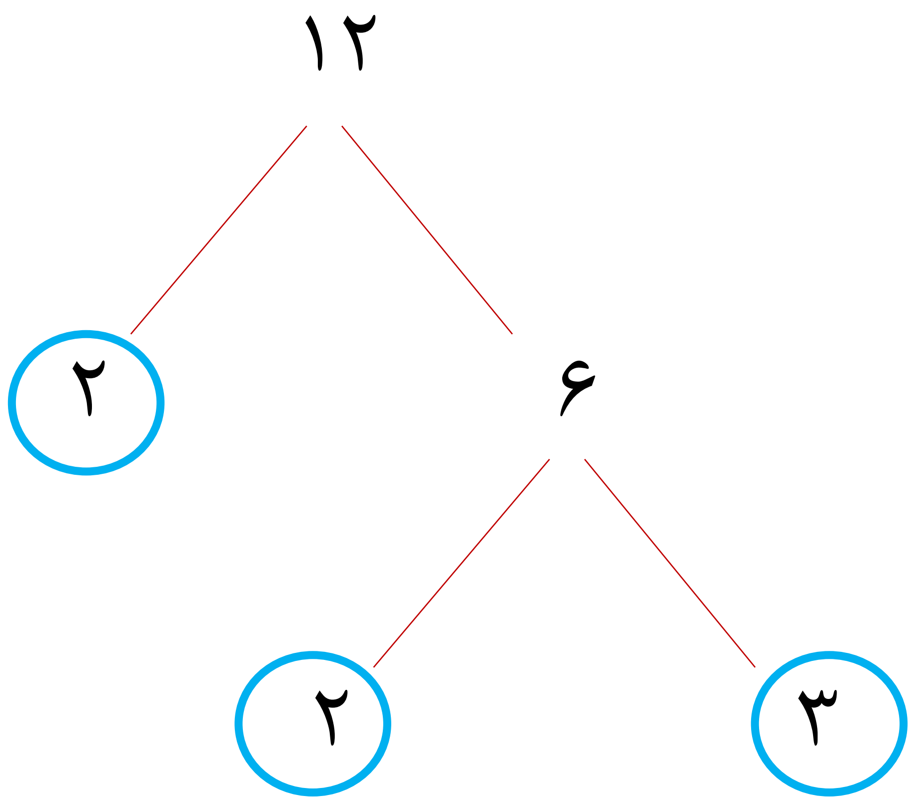


۱ × ۸   ۲ × ۴   ۴ × ۲   ۸ × ۱

برای ۵ نفر هم آرایش‌های ممکن را رسم کنید.

۱ × ۵   ۵ × ۱

▪ فعالیت ۳



۳ × ۲ × ۲ = ۱۲

۲- تعیین اعداد اول:

مثال الف) مضرب‌های مثبت عدد ۳ را در نظر بگیرید.

تمام مضرب‌های عدد ۳ عبارتند از: ...,۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸

اولین مضرب، خودِ ۳ بوده که اول است؛ ولی سایر مضارب بر ۳ بخش‌پذیر بوده و بنابراین هیچ یک اول نیستند.

مثال ب) مضرب‌های مثبت عدد ۴ را در نظر بگیرید.

مضرب‌های عدد ۴ به صورت زیر هستند: ...,۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰

مشاهده می‌شود که هیچ یک از مضارب ۴ و از جمله خودش اول نیستند.

نتیجه:

- اگر عددی اول باشد، تمام مضارب مثبت آن غیر از خودش عددهای مرکب هستند.
- اگر عددی اول نباشد، تمام مضارب مثبت آن (به همراه خودش) همگی عددهایی مرکب هستند.

نکتهٔ مهم:

هر عدد مرکب لااقل یک شمارندهٔ اول دارد که مجذورش از آن عدد مرکب بزرگتر نباشد. به دو نمونهٔ زیر توجه کنید:

- ۳۵ عددی مرکب است و مقسوم علیه‌های آن عبارتند از: **۱, ۵, ۷, ۳۵**

مشاهده می‌کنید که عدد ۵ عددی اول بوده و در ضمن **۲۵** = $\mathbf{۵^{۲}}$ از ۳۵ بزرگتر نیست.

- ۹ عددی مرکب است و مقسوم علیه‌های آن عبارتند از: **۱, ۷, ۴۹**

باز هم مشاهده می‌کنید که عدد ۷ عددی اول بوده و در ضمن **۴۹** = $\mathbf{۷^{۲}}$ از ۴۹ بزرگتر نیست.

نتیجه:

برای تعیین اول بودن یا نبودن عددی مانند ۹۷ چنین عمل می‌کنیم:

- اولین عددِ اول ۲ است و $۲^{۲} < ۹۷$. بنابراین: بخش‌پذیری ۹۷ بر ۲ باید بررسی گردد که البته ۹۷ بر ۲ بخش‌پذیر نیست.
- عدد اول بعدی ۳ است و $۳^{۲} < ۹۷$. بنابراین: بخش‌پذیری ۹۷ بر ۳ باید بررسی گردد که ۹۷ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.
- عدد اول بعدی ۵ است و $۵^{۲} < ۹۷$. باید: بخش‌پذیری ۹۷ بر ۵ باید بررسی گردد که ۹۷ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.
- عدد اول بعدی ۵ است و $۷^{۲} < ۹۷$. باید: بخش‌پذیری ۹۷ بر ۷ باید بررسی گردد که با تقسیم ۹۷ بر ۷ در می‌یابیم که ۹۷ بر ۷ نیز بخش‌پذیر نیست.
- عدد اول بعدی ۱۱ است ولی $۱۱^{۲} > ۹۷$. لذا: **نیازی نیست که بخش‌پذیری ۹۷ بر ۱۱ را بررسی کنیم!**

بعلاوه: **چون ۹۷ بر هیچکدام از عددهای اول کوچکتر از ۱۱ بخش‌پذیر نبود، بنابراین ۹۷ عددی اول است.**

روش غربال:

مثال: عددهای اول از ۱ تا ۲۰ را تعیین کنید.

۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰, ۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰

گام‌های زیر را باید برداشت:

- **عدد ۱ را خط می‌زنیم، چون اول نیست.**
- **عدد بعدی ۲ است که اول بوده و باقی می‌ماند. اما تمام مضارب آن ۴، ۶، ۸ و . . . خط می‌خورند:**

~~۱~~,۲,۳,~~۴~~,۵,~~۶~~,۷,~~۸~~,۹,~~۱۰~~,۱۱,~~۱۲~~,۱۳,~~۱۴~~,۱۵,~~۱۶~~,۱۷,~~۱۸~~,۱۹,~~۲۰~~

- **عدد خط نخورده‌ی بعدی ۳، عددی اول است. بنابراین باید تمام مضارب آن غیر از خودش را خط بزنیم:**

~~۱~~,۲,۳,~~۴~~,۵,~~۶~~,۷,~~۸~~,~~۹~~,~~۱۰~~,۱۱,~~۱۲~~,۱۳,~~۱۴~~,~~۱۵~~,~~۱۶~~,۱۷,~~۱۸~~,۱۹,~~۲۰~~

➢ **گام مهم: عدد خط نخوردهٔ بعدی ۵ است، ولی چون: $۲۰ < ۲۵ = ۵^۲$ بنابراین نیازی به بررسی و حذف مضارب ۵ نیست.**

نتیجه‌ی مهم:

برای تعیین اعداد اول از ۱ تا عددی مانند ۵۰ سه گام زیر را انجام می‌دهیم.

- عدد ۱ را حذف می‌کنیم.

- اولین عددی که اول بوده و مجذور آن بزرگتر از ۵۰ باشد، عدد ۱۱ است:

$$۱۱^{۲} = ۱۲۱ > ۵۰$$

- بنابراین کافی است مضارب عددهای اول که از ۱۱ کوچکتر هستند (یعنی ۲، ۳، ۵ و ۷) را حذف کنیم. عددهایی که باقی بمانند همگی اول خواهند بود.

~~۱~~	۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
۲۱	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~
۳۱	~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	~~۳۵~~	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~
۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	~~۴۹~~	~~۵۰~~

۱ – عدد یک را خط می‌زنیم چون نه اول است و نه مرکب.

۲ – مضرب‌های مرکب عدد ۲ را خط می‌زنیم.

۳ – مضرب‌های مرکب عدد ۳ را خط می‌زنیم.

۴ – نیازی به خط زدن مضرب های عدد ۴ نیست، چون قبلا خط خورده‌اند.

۵ – مضرب‌های مرکب عدد ۵ را خط می‌زنیم.

۶ – نیازی به خط زدن مضرب‌های عدد ۶ نیست، چون قبلا خط خورده‌اند.

۷ – مضرب‌های مرکب عدد ۷ را خط می‌زنیم.

۸ – نیازی به خط زدن مضرب‌های اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ نیست، چون قبلا خط خورده‌اند.

۹ – نیازی به خط زدن مضرب‌های عدد ۱۱ نیست، چون مربع عدد ۱۱ از ۵۰ بزرگتر است .

- اعداد باقیمانده اول هستند، زیرا مضرب مرکب هیچ عدد طبیعی نیستند.

تعیین اول یا مرکب بودن یک عدد

- در روش غربال دانستیم که اگر عددی طبیعی مضرب مرکب اعداد اول کوچکتر از خودش که مربع آنها کمتر از آن عدد است، نباشد، اول است.
- به عنوان مثال می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا ۴۷ اول است یا مرکب؟
  - آیا ۴۷ مضرب مرکب ۲ می‌باشد؟چرا؟ خیر، زیرا بر ۲ بخش‌پذیر نمی‌باشد (رقم یکان آن زوج نمی‌باشد.)
  - آیا ۴۷ مضرب مرکب ۳ می‌باشد؟چرا؟ خیر، زیرا بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌باشد (جمع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر نیست.)
  - آیا ۴۷ مضرب مرکب ۵ می‌باشد؟چرا؟ خیر، زیرا بر ۵ بخش‌پذیر نمی‌باشد (رقم یکان آن ۰ یا ۵ نمی‌باشد.)
  - آیا لازم است بررسی کنیم که۴۷ مضرب مرکب ۷ می‌باشد؟چرا؟ خیر ، زیرا ۴۷ از مربع عدد ۷ (۴۹) کوچکتر می‌باشد.

- پس می‌توان نتیجه گرفت که عدد ۴۷ اول است.