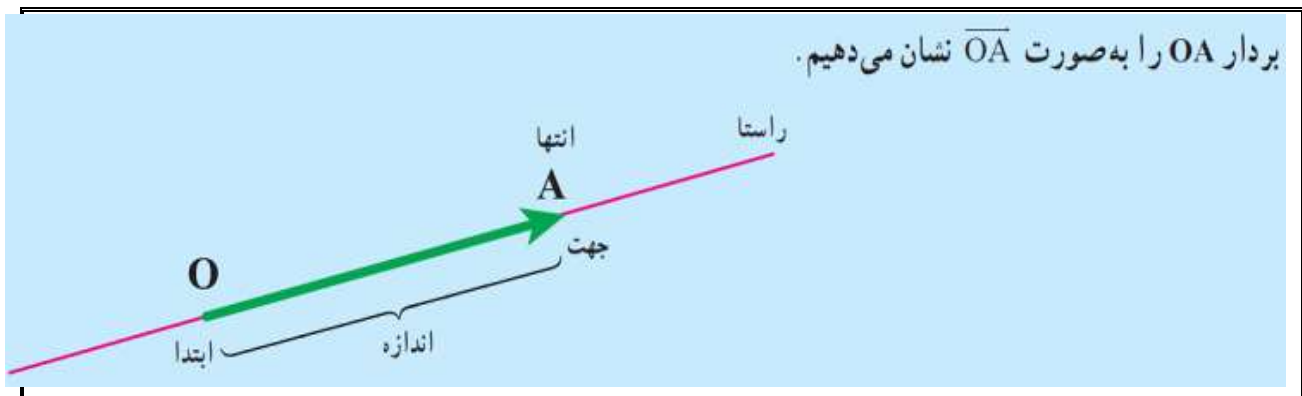


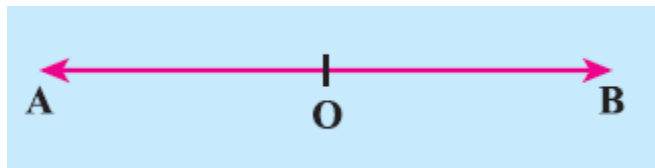


## فصل ۸ بردار و مختصات

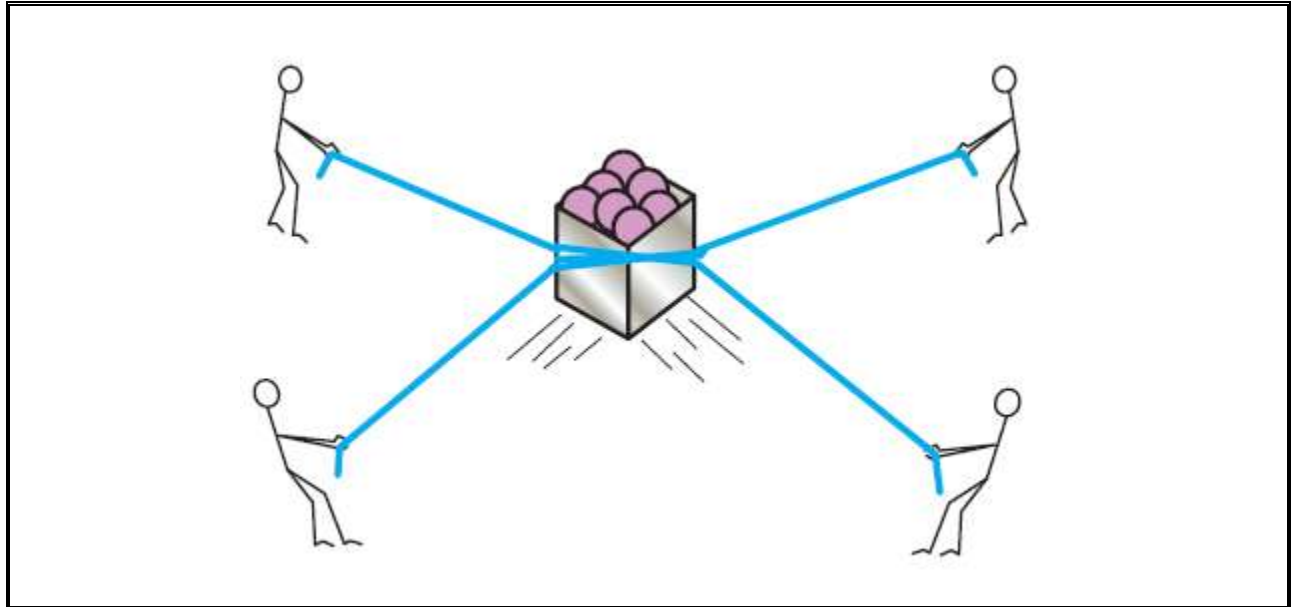
در ریاضیات به پاره خط جهت دار بردار می گوئیم ، مانند شکل زیر :



. تعریف : دو بردار را که از نظر اندازه با یکدیگر برابر و هم راستا بوده ولی جهشان بر عکس یکدیگر است ، بردارهای قرینه می گویند.

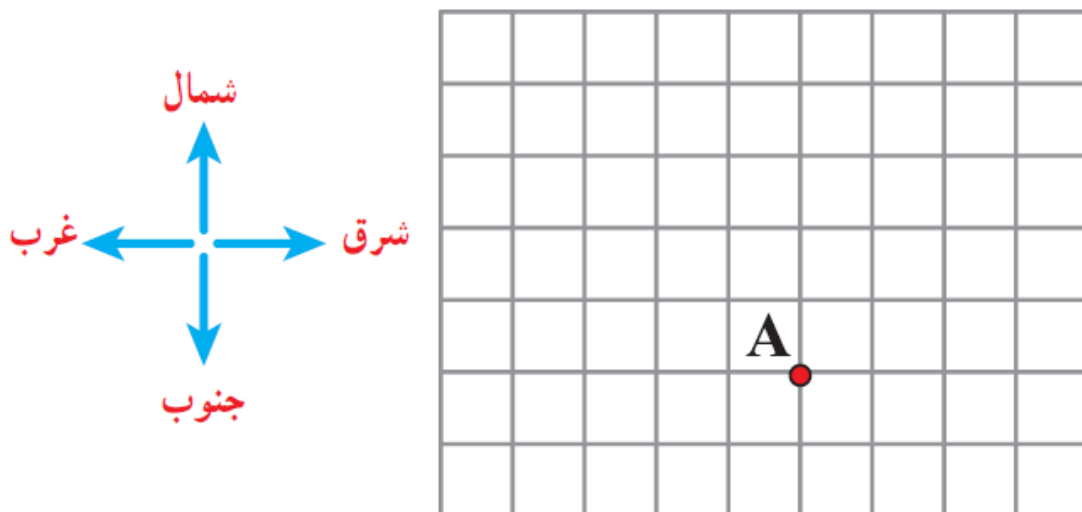


. تمرین: در تصویر زیر چهار شخص، هر یک به طور جداگانه در حال کشیدن یک جعبه هستند، نیروهایی که به این جعبه وارد می شود را با بردار نشان دهید.

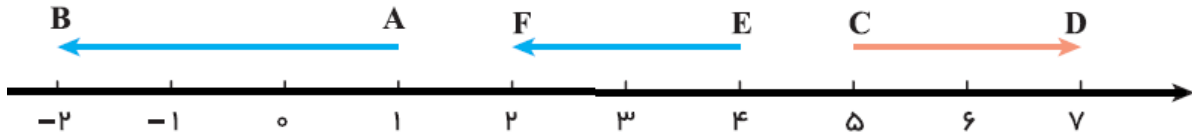


. کار در کلاس: با توجه به 4 جهت نشان داده شده (شمال، جنوب، غرب، شرق)، می خواهیم از نقطه A به صورت زیر حرکت کنیم:

از نقطه A، 3 واحد به سمت شرق، 2 واحد به سمت شمال، 4 واحد به غرب و 3 واحد به سمت جنوب حرکت کنید، موقعیت جدید نقطه A را مشخص کنید.



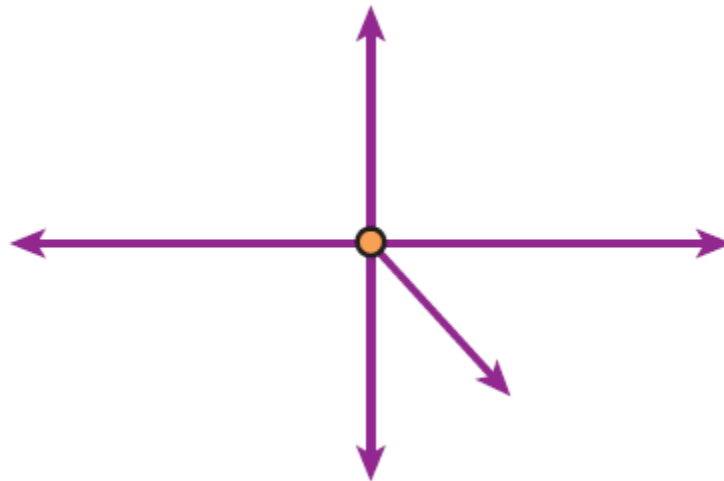
. مثال: بردار  $AB$ ،  $(-3)$  است، یعنی به اندازه 3 واحد در جهت منفی حرکت کرده ایم، ابتدای این بردار  $(+1)$  و انتهای آن  $(-2)$  است. به محور زیر دقت کنید:



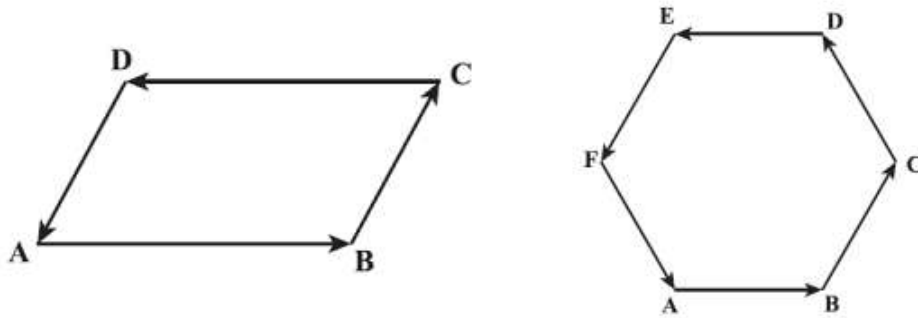
. مثال: همانطور که در محور زیر نمایان است، سه بردار هم اندازه داریم که هم راستا و هم جهت هستند و به یک اندازه (به اندازه 3 واحد) در جهت مثبت محور حرکت می کنند.



بحث در کلاس: با توجه به بردارهای نشان داده شده در شکل، با دلیل و منطق توضیح دهید که جسم به چه سمتی حرکت می کند؟



. تمرین : در شکل های زیر بردار های قرینه را با اسم مشخص کنید.



. مختصات

برای آسان تر شدن استفاده از نقشه ، می توان صفحه نقشه را با خطوط افقی و عمودی خانه بندی کرد. هر یک از خطوط افقی و عمودی با یک عدد مشخص می شوند . به این ترتیب ، هر نقطه از صفحه نقشه را می توان با دو عدد مربوط به ستون و ردیف آن نقطه مشخص کرد ، مثلا در نقشه زیر ، استان تهران با دو نقطه (30) روی محور افقی و (50) روی محور عمودی مشخص می شود.



عدد (30) را طول این محل و عدد (50) را عرض این محل می نامیم.

حال اگر بخواهیم این دو عدد را (که تشکیل یک نقطه از نقشه می دهند) به صورت ریاضی تعریف کنیم، از واژه نقطه مختصات استفاده می کنیم. در واقع طول و عرض هر محل را به صورت رو به رو می نویسیم:

[ طول  
عرض ]

پس مختصات تهران در نقشه بالا را می توان به صورت  $\begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$  نوشت.

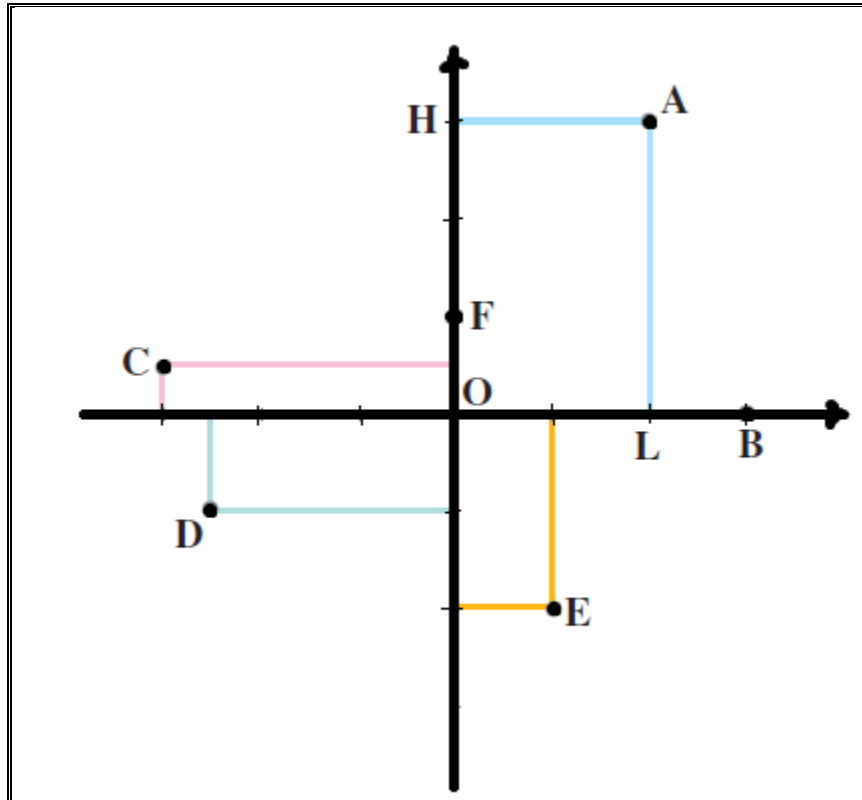
. تمرین: با توجه به نقشه بالا مختصات شهرهای یزد، اصفهان و کرمانشاه را بدست آورید.

برای مشخص کردن کردن نقاط صفحه می توانیم از محورهای مختصات استفاده کنیم.

با توجه به محور مختصات رسم شده، نقطه O محل تلاقی دو محور افقی (محور طول یا X) و عمودی (محور عرض یا Y) است که به این نقطه O، مبدا مختصات گفته می شود.

به عنوان مثال اگر بخواهیم نقطه ای مانند A را در روی این محور مختصات مشخص کنیم باید از A به موازات محور افقی و محور عمودی خطوطی را رسم کنیم تا محور را در نقاط L و H قطع کند. روی محور طول، L نقطه نمایش (+2) است و روی محور عرض، H نقطه نمایش (+3) است.

در واقع طول نقطه A، (+2) است و عرض نقطه A، (+3) است.



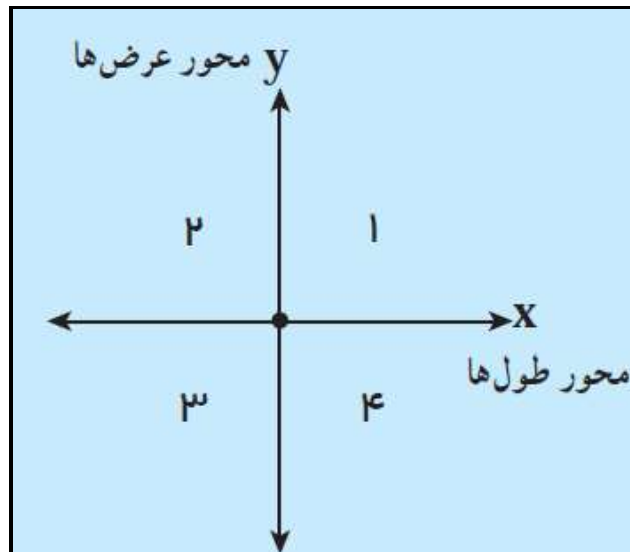
بنابراین، مختصات A،  $\begin{bmatrix} +۲ \\ +۳ \end{bmatrix}$  است:  $A = \begin{bmatrix} +۲ \\ +۳ \end{bmatrix}$

. تمرین: با توجه به محور مختصات رسم شده در توضیحات بالا، جدول زیر را کامل کنید.

F	E	D	C	B	
					طول x
					عرض y
					مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

به شکل محور مختصات زیر توجه کنید، همانطور که مشاهده می کنید، قسمت هایی از این محور مختصات با اعداد 1، 2، 3 و 4 نام گذاری شده اند. در واقع:

- 1- به ناحیه شماره 1، ناحیه اول یا ربع اول گفته می شود.
- 2- به ناحیه شماره 2، ناحیه دوم یا ربع دوم گفته می شود.
- 3- به ناحیه شماره 3، ناحیه سوم یا ربع سوم گفته می شود.
- 4- به ناحیه شماره 4، ناحیه چهارم یا ربع چهارم گفته می شود.



نکاتی در مورد محور مختصات (شکل بالا):

- 1- هر نقطه که در ناحیه ی اول قرار گیرد، طول و عرض مثبت است.
- 2- هر نقطه که در ناحیه ی دوم قرار گیرد، طول منفی و عرض مثبت است.
- 3- هر نقطه ای که در ناحیه ی سوم قرار گیرد، طول و عرض منفی است.
- 4- هر نقطه ای که در ناحیه ی چهارم قرار گیرد طول مثبت و عرض منفی است.
- 5- هر نقطه ای که روی محور طول قرار گیرد، عرضش صفر است.
- 6- هر نقطه ای که روی محور عرض قرار گیرد، طولش صفر است.

تمرین: مختصات هر یک از نقاط داده شده را توسط محورهای مختصات رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 6/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -2 \end{bmatrix}$$



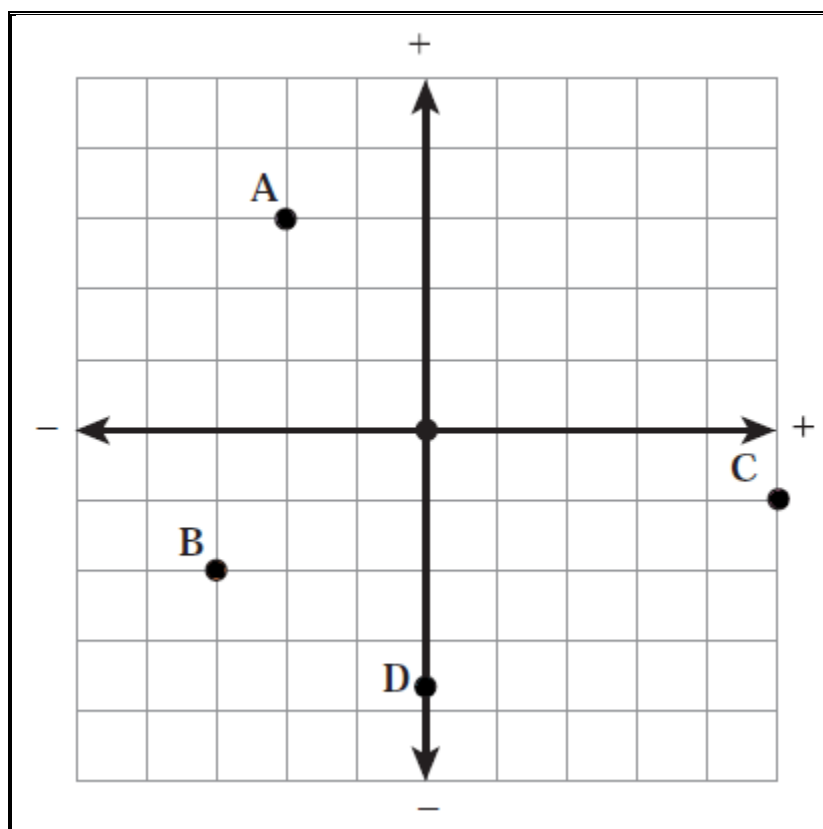
تمرین: مختصات نقاط نشان داده شده در شکل زیر را بنویسید و مختصات نقاط داده شده زیر را در شکل بیابید.

$$E = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

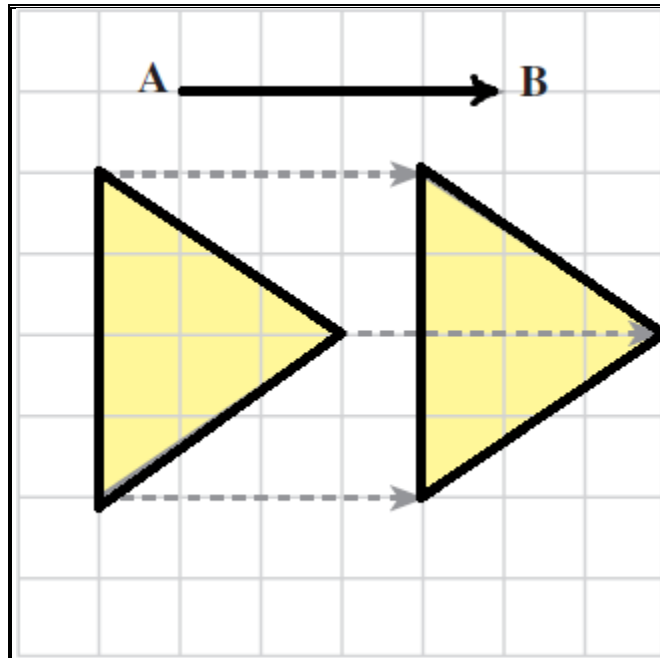
$$G = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

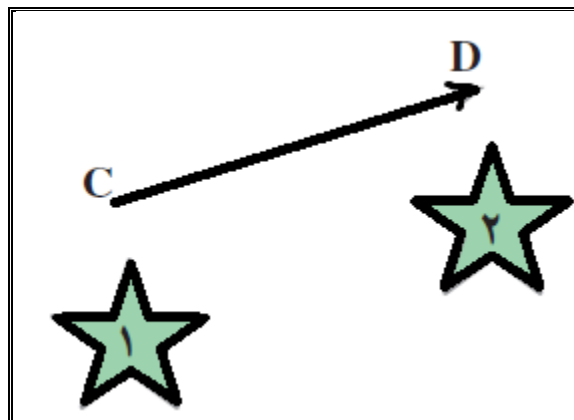


برداری انتقال

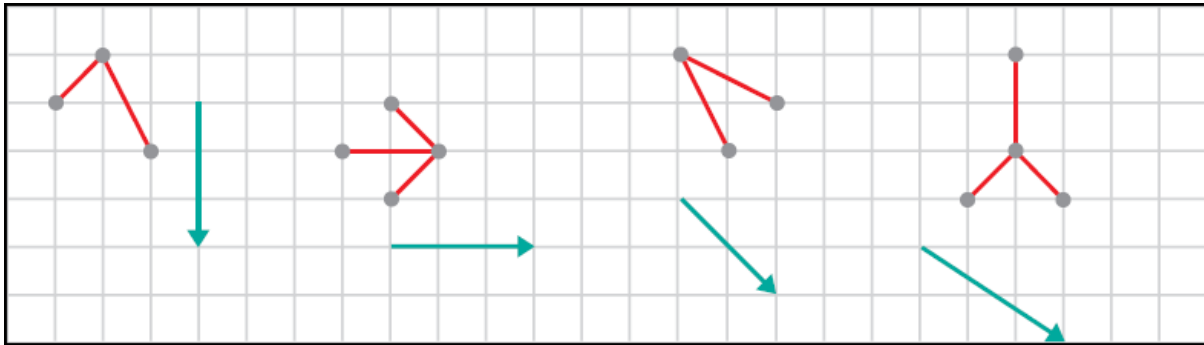
در شکل زیر مثلث سمت چپ به سمت راست انتقال یافته است، این تغییر مکان یک (( انتقال )) است، انتقال یعنی تغییر مکان، اندازه و جهت مشخص. برداری که شکل را در مسیر مشخص انتقال می دهد، بردار انتقال می نامند. در این شکل بردار  $\vec{AB}$  این انتقال را مشخص می کند و بردار انتقال نامیده می شود.



در این شکل، اگر ستاره (1) با بردار  $\vec{CD}$  انتقال داده شود، بر ستاره (2) منطبق می شود.

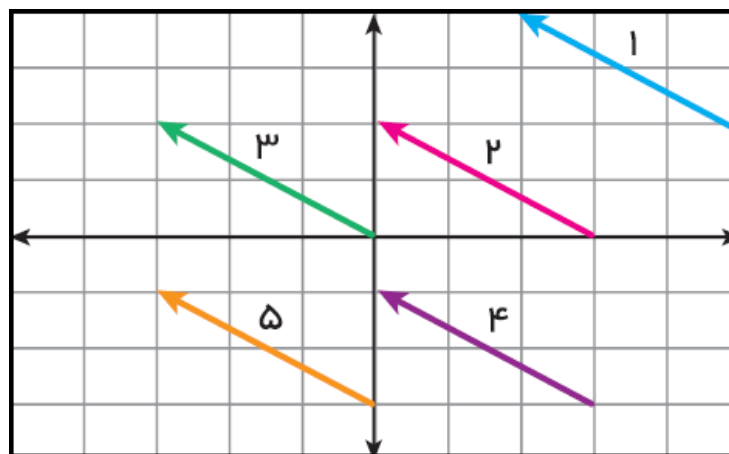


. تمرین: هر شکل را با بردار انتقال مربوط انتقال دهید.



. نکته بسیار مهم: با مشخص بودن مختصات ابتدا، مختصات بردار و مختصات انتهای یک بردار میتوان یک جمع متناظری برای بردار نوشت و به کمک این جمع و معلوم بودن دو مختصات می توان مختصات قسمت سوم (قسمت نامعلوم) را پیدا نمود.

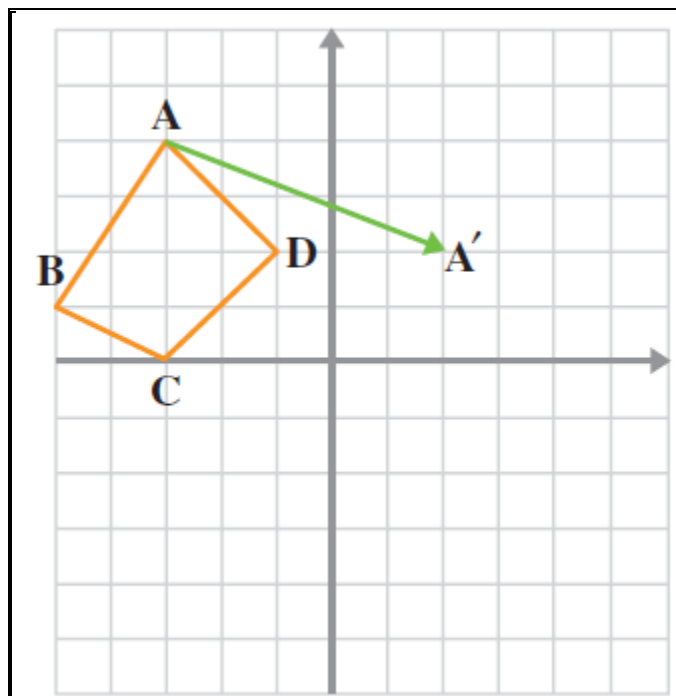
. بحث و تمرین در کلاس: با توجه به شکل زیر چه رابطه ای بین ابتدا، انتها و مختصات بردار وجود دارد؟ جدول را کامل کنید.



بردار	۱	۲	۳	۴	۵
مختصات ابتدا					
مختصات بردار					
مختصات انتها					

. تمرین : با استفاده از شکل زیر تساوی های زیر را کامل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



در تمرین بالا چهار ضلعی ABCD را با بردار انتقال AA' انتقال دهید و چهار ضلعی بدست آمده را A'B'C'D' بنامید. مختصات بردار انتقال و مختصات نقاط جدید را که در زیر آمده است، بیابید.

$$\vec{AA'} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}, D' = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

به رابطه نوشته شده زیر بین مختصات نقاط توجه کنید، همانطور که مشاهده می کنید مختصات ابتدای بردار با مختصات بردار (که همان بردار انتقال است) جمع شده و مختصات انتهای بردار بدست آمده است.

انتهای بردار    مختصات بردار    ابتدای بردار

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$-2 + x = 3$$

$$1 + y = -4$$

برای جمع کردن نقاط مختصاتی بایستی مقادیر طول ها را با هم (X ها با هم جمع شوند) و مقادیر عرض ها را با هم (Y ها را با هم جمع شوند) جمع کرد.

سوال: آیا می توانید مقدار X و Y را در بالا بدست آورید؟

. تمرین : با توجه به مختصات نوشته شده در زیر ، مختصات نقاط جدید را بدست آورید.

$$\begin{array}{ccc}
 \left. \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \text{بردار انتقال} & \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \end{array} & \left. \begin{array}{l} A' = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} & B' = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \\ C' = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

. تمرین : حاصل جمع های زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 \\ +8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

. تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$