فصل هفتم

توان و جذر

- آشنایی با توان
- ترتیب عملیات و عددهای توان‌دار
- ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار
- جمع و تفریق عددهای توان‌دار
- تجزیه و عددهای توان‌دار
- مقایسه‌ی عددهای توان‌دار
- جذر و ریشه
- رادیکال‌های تودرتو

آشنایی با توان

درگذشته بیش‌تر محاسبه‌ها با عمل جمع انجام می‌شد. این کار دشواری‌های خاص خودش را داشت. برای مثال اگر قیمت یک گوسفند یک سکه بود و کسی می‌خواست ۱۰۰۰ رأس گوسفند بخرد، برای محاسبه‌ی قیمت نهایی باید هزار بار یک را با خودش جمع می‌کرد. این روش نه‌تنها زمان‌بر بود بلکه احتمال اشتباه را در محاسبه بالا می‌برد. به همین دلیل پس از گذشت سده‌ها و کسب تجربه‌های بسیار انسان عمل ضرب را به‌عنوان راهی برای خلاصه‌نویسی چندین بار عمل جمع یک عدد با خودش اختراع کرد. برای مثال $۳+۳+۳+۳$ را می‌توان به‌طور خلاصه به شکل ۴×۳ نوشت. به‌طور مشابه عمل توان نیز راهی برای خلاصه‌نویسی چندین بار عمل ضرب یک عدد با خودش به شمار می‌رود. برای نمونه $۲\times۲\times۲$ را می‌توان به‌طور خلاصه به شکل $۲^۳$ نوشت. پس درواقع بالانویسی که در سمت راست یک عدد قرار دارد، نشان از تعداد دفعه‌های ضرب آن عدد در خودش است.

به این مطلب نیز باید اشاره‌کنیم که $۲^۳$ را به شکل ۲ به توان ۳ می‌خوانیم. ۲ را پایه و ۳ را توان یا نما می‌نامیم.

<u>مثال ۱:</u> حاصل عبارت‌های داده‌شده را حساب کنید.

الف) $۱۰^۱$ ب) $۱^{۱۰}$ پ) $۰^{۱۰}$

پاسخ:

الف) $۱۰^۱=۱۰$

ب) $۱^{۱۰}=۱\times۱\times۱\times۱\times۱\times۱\times۱\times۱\times۱\times۱=۱$

پ) $۰^{۱۰}=۰\times۰\times۰\times۰\times۰\times۰\times۰\times۰\times۰\times۰=۰$

با حل این مثال به چند پیامد مهم می‌توان دست‌یافت:

پیامد ۱: حاصل هر عدد به توان ۱ برابر همان عدد می‌شود. پس می‌توان گفت که اگر عددی توان نداشته باشد، توان آن عدد برابر یک است.

پیامد ۲: عدد ۱ به هر توانی برسد حاصل برابر ۱ می‌شود.

پیامد ۳: عدد صفر به توانی غیر از عدد صفر برسد حاصل برابر صفر می‌شود. درواقع در ریاضیات صفر به توان صفر $\left(۰^۰\right)$ تعریف‌نشده است.

مثال ۲: حاصل را به دست آورید.

الف) $۳^۴$ ب) $(-۲)^۳$ پ) $(-۳)^۴$ ت) $-۳^۴$

پاسخ:

الف) $۳^۴=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$

ب) $(-۲)^۳=(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=-۸$

پ) $(-۳)^۴=(-۳)\times(-۳)\times(-۳)\times(-۳)=۸۱$

ت) $-۳^۴=-۳\times۳\times۳\times۳=-۸۱$

پیامد ۴: اگر عددی منفی به توان عددی فرد برسد، حاصل منـفی و اگر به توان عددی زوج برسد، حاصل مثبت می‌شود.

پیامد ۵: اگر بخواهیم عددی منفی را به توان برسانیم باید آن را داخل پرانتز قرار دهیم. همان‌طور که دیدیم در $(-۳)^۴$ توان ۴ برای -۳ است و به این معنی است که -۳ را چهار بار در خودش ضرب کنیم. ولی در $-۳^۴$ توان ۴ برای ۳ است و علامت منفی به توان نمی‌رسد.

مثال ۳: حاصل را به دست آورید.

الف) $\frac{۴^۲}{۵}$ ب) $\frac{۴}{۵^۲}$ پ) $(\frac{۴}{۵})^۲$ ت) $(۰/۱۲)^۲$

پاسخ:

الف) $\frac{۴^۲}{۵}=\frac{۴\times۴}{۵}=\frac{۱۶}{۵}$

ب) $\frac{۴}{۵^۲}=\frac{۴}{۵\times۵}=\frac{۴}{۲۵}$

پ) $\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲=\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴\times۴}{۵\times۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$

ت) $(۰/۱۲)^۲=۰/۱۲\times۰/۱۲=۰/۰۱۴۴$

پیامد ۶: اگر بخواهیم یک کسر یا یک عدد اعشاری را به توان برسانیم، باید آن را درون پرانتز قرار دهیم. همان‌طور

که در قسمت پ مثال ۳ دیدیم، می‌توانیم بگوییم: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$. البته توجه می‌کنیم که در اینجا مخرج کسر یعنی b نباید برابر با صفر باشد. (چرا؟)

کار در کلاس ۱: حاصل عبارت‌های داده‌شده را به دست آورید.

الف) $(۰/۲)^۲$ ب) $(۰/۲)^۳$ پ) $(۰/۰۲)^۳$

الف) چه رابطه‌ای بین تعداد اعشار عدد پایه، توان و تعداد اعشار حاصل وجود دارد؟

ب) با توجه به قسمت قبل و مثال‌های حل‌شده روشی ساده در به توان رساندن عددهای اعشاری بیان کنید.

● **قانون توان صفر:** حاصل هر عدد به توان صفر برابر با یک می‌شود. برای مثال $۶^۰=۱$ یا $\left(۶^۳+۱۳۲۴^{۱۰۵}-۲۰\right)^۰=۱$ دلیل این مطلب را در ادامه بیان می‌کنیم. در اینجا بار دیگر تکرار می‌کنیم که پایه نباید صفر باشد، چراکه در ریاضیات $۰^۰$ تعریف‌نشده است.

● **مربع یک عدد:** همان‌طور که می‌دانیم برای به دست آوردن مساحت یک مربع باید طول یک ضلع آن را در خودش ضرب کنیم؛ یعنی برای مربعی به ضلع x مساحت مربع برابر $x^۲$ می‌شود. به همین دلیل توان دوم هر عددی را مربع یا مجذور آن عدد می‌نامیم. برای مثال مربع عدد ۳ مساوی $۳^۲$ یعنی ۹ است.

● **مکعب یک عدد:** توان سوم هر عددی را مکعب آن عدد می‌نامیم. برای مثال مکعب عدد ۳ مساوی $۳^۳$ یعنی ۲۷ است.

کار در کلاس ۲: دلیلی ریاضی برای نام‌گذاری توان سوم یک عدد به مکعب آن عدد بیان کنید.

مثال ۴: اختلاف مربع و مکعب عدد ۴ را به دست آورید.

پاسخ: مربع عدد ۴ برابر $۴^۲$ و مکعب آن برابر $۴^۳$ است؛ بنابراین:

$$۴^۳-۴^۲=۶۴-۱۶=۴۸$$

ترتیب عملیات و عددهای توان‌دار

مثال ۵: حاصل را به دست آورید

الف) $۳\times۲^۳-۱۴\div۷$　　　ب) $۲^۲+\left(۲\times۳^۲\right)+۱^۵$

پاسخ: در فصل عددهای صحیح با ترتیب عملیات آشنا شدیم. دیدیم که ضرب و تقسیم نسبت به جمع و تفریق مقدم‌اند. چون توان نیز نشان از عمل ضرب دارد، اگر یک عبارت شامل عدد توان‌دار باشد، عمل به توان رسانی زودتر از عمل ضرب انجام می‌شود. پس داریم:

الف) $۳\times۲^۳-۱۴\div۷=۳\times۸-۲=۲۴-۲=۲۲$

ب) $۲^۲+\left(۲\times۳^۲\right)+۱^۵=۴+\overset{۱۸}{\cancel{۲\times۹}}+۱=۲۳$

مثال ۶: حاصل عبارت‌های داده‌شده را به دست آورید.

الف) $۷^۲-\left(۳\times۲\right)^۲$　　　ب) $۵^۳\div\left(۳+۲\right)^۲$

پاسخ:

الف) $۷^۲-\left(۳\times۲\right)^۲=۴۹-۶^۲=۴۹-۳۶=۱۳$

ب) $۵^۳\div\left(۳+۲\right)^۲=۵^۳\div۵^۲=۱۲۵\div۲۵=۵$

هشدار: همان‌طور که دیدیم اگر یک پرانتز توان داشته باشد، ابتدا باید حاصل عبارت داخل پرانتز را به دست آوریم سپس آن را به توان برسانیم. رعایت این مطلب در پرانتزهایی که شامل جمع و تفریق‌اند بسیار بااهمیت است. درواقع نمی‌توان توان بیرون پرانتز را قبل از به دست آوردن حاصل جمع یا تفریق عبارت داخل پرانتز، روی تک‌تک جمله‌ها نوشت. به‌عبارت‌دیگر: $\left(۳+۲\right)^۲\neq۳^۲+۲^۲$ چراکه $\left(۳+۲\right)^۲=۵^۲=۲۵$ ولی $۳^۲+۲^۲=۹+۴=۱۳$.

البته اگر بین عددهای داخل پرانتز فقط عامل ضرب وجود داشته باشد، می‌توانیم توان را از بیرون پرانتز برداشته و روی تک‌تک عددهای داخل پرانتز قرار دهیم. برای مثال $\left(۳\times۲\right)^۲$ را می‌توانیم به شکل $۳^۲\times۲^۲$ بنویسیم. توجه می‌کنیم که در هر دو روش درنهایت حاصل یکسانی به دست می‌آید: $\left(۳\times۲\right)^۲=۶^۲=۳۶$ و $۳^۲\times۲^۲=۹\times۴=۳۶$

کار در کلاس ۳: حاصل عبارت‌های داده‌شده را به دست آورید.

الف) $-۳(-۴+۵)^{۳}+(۱۸^{۳}-۱۴^{۵})^{۰}$

ب) $(۱۰-۱۲)^{۲}-(۵-۳)^{۲}+۲$

پ) $(-۴)^{۲}-۲(۱-۳)^{۲}-۵^{۲}$

ضرب عددهای توان‌دار

ضرب دو عدد توان‌دار فقط در دو حالت امکان‌پذیر است. یکی زمانی که پایه‌های دو عدد برابرند و دیگری زمانی که توان‌های آن‌ها مساوی‌اند.

مثال ۷: حاصل را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۳^{۲}\times۳^{۵}$ ب) $(-۲)^{۳}\times(-۲)^{۲}\times(-۲)$

پاسخ:

الف) $۳^{۲}\times۳^{۵}=۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۳^{۷}$

ب) $(-۲)^{۳}\times(-۲)^{۲}\times(-۲)=(-۲)\times(-۲)\times(-۲)\times(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=(-۲)^{۶}=۲^{۶}$

پیامد ۷: اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که در ضرب عددهای توان‌دار با پایه‌ها مساوی، برای به دست آوردن حاصل یکی از پایه‌ها را نوشته و توان عددهای داده‌شده را باهم جمع می‌کنیم. درواقع $۳^{۲+۵}=۳^{۷}$ و $(-۲)^{۳+۲+۱}=(-۲)^{۶}$. توجه می‌کنیم که حاصل $(-۲)^{۶}$ و $۲^{۶}$ یکسان است (چرا؟).

مثال ۸: حاصل را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\left(۲\frac{۱}{۵}\right)^{۳}\times(۲/۲)^{۴}\times\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۲}$ ب) $\frac{۴}{۹}\times\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}$

پاسخ:

الف) $\left(۲\frac{۱}{۵}\right)^{۳}\times(۲/۲)^{۴}\times\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۲}=\left(\frac{۱۱\times۲}{۵\times۲}\right)\times\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۴}\times\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۲}=\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۳}\times\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۴}\times\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۲}=\left(\frac{۲۲}{۱۰}\right)^{۹}$

ب) $\frac{۴}{۹}\times\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\times\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}=\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۷}$

کار در کلاس ۴: از قسمت (الف) مثال قبل چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

پیامد ۸: اکنون می‌توانیم دلیل اینکه حاصل هر عدد به توان صفر برابر یک می‌شود را بیان کنیم. بیاید حاصل $۳^۵ \times ۳^۰$ را به دست آوریم. طبق آنچه گفتیم چون پایه‌ها مساوی‌اند، برای به دست آوردن حاصل باید یکی از پایه‌ها را نوشته و سپس توان‌ها را باهم جمع کنیم: $۳^۵ \times ۳^۰ = ۳^{۰+۵} = ۳^۵$. همان‌طور که می‌بینیم $۳^۰$ تأثیری در $۳^۵$ ندارد، یعنی انگار نقش عدد یک را بازی می‌کند. پس $۳^۰ = ۱$. این مطلب برای تمامی عددها برقرار است.

کار در کلاس ۵: حاصل هر عبارت را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۵^۳ \times ۵^۴$

ب) $a \times a \times a \times a$

پ) $(a+b)\times(a+b)^۲\times(b+a)$

ت) $(۱/۲)^۵ \times \left(\frac{۶}{۵}\right)^۲ \times \left(۱\frac{۱}{۵}\right)$

مثال ۹: حاصل $۳^۵ \times ۲^۵$ را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

پاسخ:

$$۳^۵\times۲^۵=۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=(۳\times۲)\times(۳\times۲)\times(۳\times۲)\times(۳\times۲)\times(۳\times۲)=(۳\times۲)^۵=۶^۵$$

پیامد ۹: در ضرب عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی، یکی از توان‌ها را نوشته پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$۳^۵\times۲^۵=(۳\times۲)^۵=۶^۵$$

هشدار: همان‌طور که گفتیم ضرب عددهای توان‌دار تنها در دو حالت امکان‌پذیر است. یکی زمانی که پایه‌ها مساوی‌اند و دیگری زمانی که توان‌ها مساوی‌اند؛ بنابراین $۸ \times ۲^۳ = ۱۶^۴$ که اشتباه رایج دانش‌آموزان است، به‌طور کامل غلط است. در حل این مسئله باید ابتدا ۸ را به‌صورت یک عدد توان دار بنویسیم. می‌دانیم که $۲^۳ = ۸$ پس $۸ \times ۲^۳ = ۲^۳ \times ۲^۳$. در اینجا هم پایه‌ها مساوی‌اند و هم توان‌ها، ولی همان‌طور که گفتیم نمی‌توانیم هر دو قانون را هم‌زمان استفاده کنیم و حاصل هیچ‌گاه برابر $۴^۶$ نمی‌شود. اگر از قانون پایه‌های مساوی استفاده کنیم، حاصل برابر

$۲^۶=۲^{۳+۳}$ می‌شود و اگر از قانون توان‌های مساوی استفاده کنیم، حاصل برابر $(۲\times۲)^۳=۴^۳$ می‌شود. توجه می‌کنیم که مقدار $۲^۶$ و $۴^۳$ یکسان است و حاصل هر دو برابر ۶۴ می‌شود.

__کار در کلاس ۶:__ حاصل را به‌صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۵^۲\times۵\times۵^۳\times۵$
ب) $۲\times۳\times۶^{۱۳}$

پ) ۴۹×۷^۴
ت) $۲^۵\times۳^۵\times۵^۵$

ث) $۳^۵\times۳^۵\times۶^۳$
ج) $۶^{۲+۳}\times۳^{۴\times۲-۳}$

__مثال ۱۰:__ حاصل عبارت $\left(۲^۳\right)^۴$ را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

پاسخ:

$$\left(۲^۳\right)^۴=۲^۳\times۲^۳\times۲^۳\times۲^۳=۲^{۳+۳+۳+۳}=۲^{۱۲}$$

پیامد ۱۰: با حل مثال قبل می‌توان به این نتیجه رسید که هرگاه عددی توان‌دار دوباره به توان برسد، توان‌ها در هم ضرب می‌شوند. به این مطلب **قانون توان در توان** می‌گوییم. درواقع در مثال قبل $\left(۲^۳\right)^۴=۲^{۳\times۴}=۲^{۱۲}$

__کار در کلاس ۷:__ قانون توان در توان را به کمک عبارت‌های جبری نمایش دهید.

__مثال ۱۱:__ حاصل را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\left(\left(۵^۲\right)^۳\right)^{۴-۳}$
ب) $۳۶^۳\times۶^۵$
پ) $۳^{۱۱}\times۴^۷\times۸^{۱۱}\times۶^۷$

پاسخ:

الف) $\left(\left(۵^۲\right)^۳\right)^{۴-۳}=\left(\left(۵^۲\right)^۳\right)^۱=۵^{۲\times۳\times۱}=۵^۶$

ب) $۳۶^۳\times۶^۵=\left(۶^۲\right)^۳\times۶^۵=۶^۶\times۶^۵=۶^{۱۱}$

پ) $۳^{۱۱}\times۴^۷\times۸^{۱۱}\times۶^۷=۳^{۱۱}\times\left(۲^۲\right)^۷\times\left(۲^۳\right)^{۱۱}\times\left(۲\times۳\right)^۷=۳^{۱۱}\times۲^{۱۴}\times۲^{۳۳}\times۲^۷\times۳^۷=۲^{۵۴}\times۳^{۱۸}=\left(۲^۳\right)^{۱۸}\times۳^{۱۸}=۲۴^{۱۸}$

<u>مثال ۱۲:</u> حاصل عبارت $۲^{۳^{۴}}$ را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

پاسخ: $۲^{۳}$ داخل پرانتز قرار نگرفته است، پس $۲^{۳}$ به توان ۴ نرسیده، بلکه توان ۳ به توان ۴ رسیده است؛ بنابراین نمی‌توانیم ۳ را در ۴ ضرب کنیم. در اینجا باید ۳ را به توان ۴ برسانیم: $۲^{۳^{۴}} = ۲^{۸۱}$

پیامد ۱۱: اگر توان عددی خودش عدد توان‌دار باشد، از بالا شروع کرده و عددها را به ترتیب به توان می‌رسانیم. به این مطلب **قانون توانِ توان** می‌گوییم.

<u>مثال ۱۳:</u> حاصل $(۱۵)^{۱^{۲^{۳}}}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(۱۵)^{۱^{۲^{۳}}} = (۱۵)^{۱^{۸}} = (۱۵)^{۱} = ۱۵$$

<u>کار در کلاس ۸:</u> در هر مورد حاصل را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۴^{۱۱} \times ۸$

ب) $۳^{۲^{۲}} \times ۲^{۴} \times ۶^{۳}$

تقسیم عددهای توان‌دار

تقسیم عددهای توان‌دار نیز مانند ضرب آن‌ها در دو حالت برابر بودن پایه‌ها و برابر بودن توان‌ها امکان‌پذیر است. در تقسیم عددهای توان‌دار ابتدا علامت تقسیم را به خط کسری تبدیل می‌کنیم و سپس به‌راحتی عامل‌های مشترک صورت و مخرج را ساده می‌کنیم.

<u>مثال ۱۴:</u> حاصل را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۳^{۵} \div ۳^{۲}$

ب) $۲^{۴} \div ۲^{۶}$

پاسخ:

الف) $$۳^{۵} \div ۳^{۲} = \frac{۳^{۵}}{۳^{۲}} = \frac{\cancel{۳} \times \cancel{۳} \times ۳ \times ۳ \times ۳}{\cancel{۳} \times \cancel{۳}} = \frac{۳^{۳}}{۱} = ۳^{۳}$$

ب) $$۲^{۴} \div ۲^{۶} = \frac{۲^{۴}}{۲^{۶}} = \frac{\cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲}}{\cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times ۲ \times ۲} = \frac{۱}{۲^{۲}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

پیامد ۱۲: اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که در تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌ها مساوی، برای به دست آوردن حاصل، یکی از پایه‌ها را نوشته و اختلاف توان عددهای داده‌شده را درجایی که توان بزرگ‌تری دارد، قرار می‌دهیم؛ یعنی اگر توان بزرگ‌تر در صورت بود، اختلاف را در توان صورت و اگر در مخرج بود، در توان مخرج قرار می‌دهیم؛ مانند: $۳^۳ = \frac{۳^۳}{۱} = \frac{۳^{۵-۲}}{۱}$ یا $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲^۲} = \frac{۱}{۲^{۶-۴}}$

<u>مثال ۱۵</u>: حاصل $\frac{۷^{۱۵}\times۴^{۱۲}}{۷^۶\times۴^۳}$ را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

پاسخ: پایه‌ها مساوی‌اند پس باید توان‌ها را از یکدیگر کم کنیم. توجه می‌کنیم که هم برای پایه‌ی ۷ و هم برای پایه‌ی ۴ توان بزرگ‌تر در صورت قرار دارد، پس:

$$\frac{۷^{۱۵}\times۴^{۱۲}}{۷^۶\times۴^۳}=۷^{۱۵-۶}\times۴^{۱۲-۳}=۷^۹\times۴^۹=۲۸^۹$$

<u>مثال ۱۶</u>: حاصل $\frac{۷^۶\times۴^{۱۲}}{۷^{۱۵}\times۴^۳}$ را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

پاسخ: این پرسش از تغییر جای $۷^{۱۵}$ و $۷^۶$ در مثال قبل به‌دست‌آمده است؛ بنابراین چون برای پایه‌ی ۷ توان بزرگ‌تر در مخرج قرار دارد، باید اختلاف توان‌های ۷ را در مخرج بنویسیم:

$$\frac{۷^۶\times۴^{۱۲}}{۷^{۱۵}\times۴^۳}=\frac{۴^{۱۲-۳}}{۷^{۱۵-۶}}=\frac{۴^۹}{۷^۹}=\left(\frac{۴}{۷}\right)^۹$$

<u>مثال ۱۷</u>: حاصل $۱۵^۴\div۳^۴$ را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

پاسخ: در اینجا نیز مانند قبل ابتدا علامت تقسیم را به خط کسری تبدیل می‌کنیم. سپس با باز کردن صورت و مخرج عامل‌های مشترک را ساده می‌کنیم:

$$۱۵^۴\div۳^۴=\frac{۱۵^۴}{۳^۴}=\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۵}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۵}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۵}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۵}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}}=۵^۴$$

پیامد ۱۳: در تقسیم عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی یکی از توان‌ها را نوشته، پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$۱۵^۴\div۳^۴=\frac{۱۵^۴}{۳^۴}==\left(\frac{۱۵}{۳}\right)^۴=۵^۴$$

<u>مثال ۱۸</u>: حاصل را به شکل عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{۲^۷\times۶^{۱۴}}{۶^{۱۰}\times۲^{۱۱}}$

ب) $\frac{۵^۶\times۲^{۲۴}}{۵^{۱۵}\times۲^۶}$

پ) $\left(۳\times۴۵^۸\right)\div\left(۱۵^۸\times۳^۷\right)$

پاسخ:

الف) $\dfrac{\cancel{2^{8}}^{\,1}\times\cancel{6^{13}}^{\,6^{3}}}{\cancel{6^{10}}_{\,1}\times\cancel{2^{11}}_{\,2^{3}}}=\dfrac{6^{3}}{2^{3}}=\left(\dfrac{6}{2}\right)^{3}=3^{3}$

ب) $\dfrac{\cancel{5^{6}}^{\,1}\times\cancel{2^{24}}^{\,2^{18}}}{\cancel{5^{15}}_{\,5^{9}}\times\cancel{2^{6}}_{\,1}}=\dfrac{2^{18}}{5^{9}}=\dfrac{\left(2^{2}\right)^{9}}{5^{9}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{9}$

پ) $\left(3\times45^{8}\right)\div\left(15^{8}\times3^{7}\right)=\dfrac{\cancel{3}^{\,1}\times\cancel{45^{8}}^{\,3^{8}}}{\cancel{15^{8}}_{\,1}\times\cancel{3^{7}}_{\,3^{6}}}=\dfrac{3^{8}}{3^{6}}=3^{2}$

<u>کار در کلاس ۹</u>: حاصل عبارت‌های داده‌شده را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times6^{3}$

ب) $\left(6^{5}\div3^{5}\right)\div2^{3}$

پ) $\dfrac{6^{8}\div6^{3}}{2^{3}\times2^{2}}$

ت) $\left(a^{20}\div a^{5}\right)\div\left(a^{7}\div a^{2}\right)$

ث) $15^{11}\div3^{11}\times25^{2}\div5^{9}$

<u>مثال ۱۹</u>: ثلث عدد 3^{12} را به شکل عددی توان‌دار بیان کنید.

پاسخ: ثلث یک عدد یعنی یک‌سوم آن عدد، بنابراین باید 3^{12} را بر ۳ تقسیم کنیم: $\dfrac{3^{12}}{3}=3^{11}$

جمع و تفریق عددهای توان‌دار

در حالت کلی قانونی برای جمع و تفریق عددهای توان‌دار وجود ندارد. برای به دست آوردن حاصل عبارت‌های جمع و تفریق باید ابتدا حاصل تک‌تک آن‌ها به دست آورده، سپس حاصل نهایی را محاسبه کنیم.

<u>مثال ۲۰</u>: حاصل $2^{2}-2^{3}+2^{4}$ را بیابید.

پاسخ: $2^{2}-2^{3}+2^{4}=4-8+16=12$

<u>مثال ۲۱</u>: حاصل عبارت $2^{20}+2^{20}+2^{20}+2^{20}$ را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

پاسخ: همان‌طور که می‌دانیم عمل ضرب به‌عنوان راهی برای خلاصه‌نویسی چندین بار عمل جمع یک عدد با

خودش است؛ بنابراین در جمع و تفریق عددهای توان‌دار اگر یک عدد چند بار با خودش جمع شده باشد، به‌راحتی آن را به ضرب تبدیل کرده و حاصل را به دست می‌آوریم.

$$2^{20}+2^{20}+2^{20}+2^{20}=4\times2^{20}=2^{2}\times2^{20}=2^{22}$$

مثال ۲۲: حاصل عبارت $(2^{20}+2^{20}+2^{20})(3^{20}+3^{20})$ را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

پاسخ: در هر پرانتز مانند مثال قبل عمل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم:

$$(2^{20}+2^{20}+2^{20})(3^{20}+3^{20})=3\times2^{20}\times2\times3^{20}=2^{21}\times3^{21}=6^{21}$$

کار در کلاس ۱۰: حاصل عبارت داده‌شده را به‌صورت عددی توان‌دار به دست آورید.

$$\frac{5^{40}+5^{40}+5^{40}}{25^{15}+25^{15}+25^{15}}$$

تجزیه به عامل‌های اول و عددهای توان‌دار

● مجذور کامل

عددی را مجذور کامل می‌نامیم هرگاه در تجزیه‌ی آن به عامل‌های اول تمام توان‌ها زوج باشند؛ مانند:

$$2^{4}\times3^{6}\times11^{2}$$

● مکعب کامل

عددی را مکعب کامل می‌نامیم هرگاه در تجزیه‌ی آن به عامل‌های اول تمام توان‌ها مضرب ۳ باشند؛ مانند:

$$2^{6}\times3^{9}\times5^{12}$$

مثال ۲۳: کوچک‌ترین عددی که باید در $2^{18}\times6^{4}\times10^{3}$ ضرب شود تا حاصل هم مربع کامل و هم مکعب کامل شود، چند است؟

پاسخ: برای این کار باید توان‌ها مضربی از ۶ باشند. همچنین باید توجه کنیم که در تجزیه پایه‌ها عددی اول باشند.

$$2^{18}\times6^{4}\times10^{3}=2^{18}\times2^{4}\times3^{4}\times2^{3}\times5^{3}=2^{25}\times3^{4}\times5^{3}$$

پس برای این‌که توان‌ها مضربی از ۶ شوند باید آن را در $2^{5}\times3^{2}\times5^{3}$ ضرب کنیم.

کار در کلاس ۱۱: عدد ۲۲۴ را حداقل در چه عددی ضرب کنیم تا حاصل مجذور کامل شود؟

- **تعداد صفرهای سمت راست یک عدد**

اگر یک عدد در سمت راست خود صفر داشته باشد، در تجزیه‌ی آن‌هم عامل ۲ و هم عامل ۵ وجود دارد؛ پس برای پی بردن به تعداد صفرهای سمت راست یک عدد به عامل‌های ۲ و ۵ در تجزیه‌ی آن عدد توجه می‌کنیم. توان هرکدام که کم‌تر بود، همان تعداد صفرهای سمت راست عدد است.

مثال ۲۴: عدد $A=۴^{۷}\times ۲۵^{۴}\times ۹$ در سمت راست خود چند صفر دارد؟

پاسخ: $A=۴^{۷}\times ۲۵^{۴}\times ۹=\left(۲^{۲}\right)^{۷}\times \left(۵^{۲}\right)^{۴}\times ۳^{۲}=۲^{۱۴}\times ۵^{۸}\times ۳^{۲}$

توان عامل ۵ برابر هشت و توان عامل ۲ برابر چهارده است. پس A در سمت راست خود هشت صفر دارد.

کار در کلاس ۱۲: عدد $۲^{۱۴}\times ۵^{۸}$ چندرقمی است؟

مقایسه‌ی عددهای توان‌دار

۱- اگر دو عدد توان‌دار با پایه‌ی مثبت توان‌های مساوی داشته باشند، عددی بزرگ‌تر است که پایه‌اش بزرگ‌تر باشد.

$(۰/۱)^{۳}<(۰/۲)^{۳}$ و $۱۰^{۵}>۷^{۵}$

۲- اگر دو عدد توان‌دار پایه‌های مساوی بزرگ‌تر از یک داشته باشند، عددی بزرگ‌تر است که توانش بزرگ‌تر است.

$۱۵^{۱۰}>۱۵^{۷}\ ,\ (۵/۴)^{۱۳}>(۵/۴)^{۸}$

۳- اگر دو عدد توان‌دار پایه‌هایی مساوی و بین صفر و یک (عدد اعشاری مثبت کوچک‌تر از واحد) داشته باشند، عددی بزرگ‌تر است که توانش کوچک‌تر است.

$(۰/۲)^{۳}>(۰/۲)^{۵}\ ,\ (\frac{۱}{۵})^{۷}>(\frac{۱}{۵})^{۱۰}$

مثال ۲۵: دو عدد $۴^{۱۰۰}$ و $۸^{۶۷}$ را مقایسه کنید.

پاسخ: با توجه به قانون‌های ذکرشده برای مقایسه‌ی عددهای توان‌دار باید پایه‌ها یا نماها مساوی باشند. در اینجا با مساوی کردن پایه‌ها مقایسه را انجام می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۴^{۱۰۰}=(۲^{۲})^{۱۰۰}=۲^{۲۰۰} \\ ۸^{۶۷}=(۲^{۳})^{۶۷}=۲^{۲۰۱} \end{array}\right\}\Rightarrow ۸^{۶۷}>۴^{۱۰۰}$$

کار در کلاس ۱۳: عددهای $A=۴^{۱۲}$، $B=۲۷^{۸}$ و $C=۸۱^{۳}$ را مقایسه کنید.

جذر و ریشه

مثال ۲۶: اگر مساحت مربعی ۱۶ سانتی‌متر مربع باشد، طول ضلع آن را به دست آورید.

پاسخ: مساحت مربع مساوی طول ضلع آن مربع، ضرب‌در خودش است. پس اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، مساحت آن برابر $x^{۲}$ می‌شود. بنا به فرض مسئله $x^{۲}=۱۶$ است، پس ما باید عددی را بیابیم که مربع آن برابر ۱۶ شود. نخستین عددی که به ذهن ما می‌رسد ۴ است. ولی باید توجه کنیم که -۴ نیز اگر به توان ۲ برسد حاصل برابر ۱۶ می‌شود. در این پرسش چون طول ضلع از ما خواسته‌شده و طول همواره عددی مثبت است، پس جواب ۴ است.

عددهای ۴ و -۴ را **ریشه‌ی دوم** عدد ۱۶ می‌نامیم. ۴ ریشه‌ی دوم مثبت و -۴ ریشه‌ی دوم منفی عدد ۱۶ است. ریشه‌های دوم عدد ۱۶ را می‌توانیم با $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ نشان دهیم. درواقع $\sqrt{۱۶}=۴$ و $-\sqrt{۱۶}=-۴$ بنابراین برای نمایش ریشه‌ی دوم مثبت یک عدد از نماد $\sqrt{\ }$ استفاده می‌کنیم. نماد $\sqrt{\ }$ را **رادیکال** می‌نامیم. عملی که رادیکال انجام می‌دهد **جذرگیری** نامیده می‌شود.

مثال ۲۷: آیا عدد -۱۶ ریشه‌ی دوم دارد؟

پاسخ: برای یافتن ریشه‌ی دوم عدد -۱۶ باید به دنبال عددهایی باشیم که مربع آن‌ها برابر -۱۶ شود. ولی همان‌طور که می‌دانیم مربع هر عدد همواره دارای علامتی مثبت است. پس -۱۶ ریشه‌ی دوم ندارد. به‌طورکلی ***عددهای منفی ریشه‌ی دوم ندارند.***

مثال ۲۸: حاصل را به دست آورید.

الف) $\sqrt{۳۶}$ ب) $\sqrt{۱۲۱}$ پ) $\sqrt{۰/۰۴}$ ت) $\sqrt{۲}$

پاسخ:

الف) $۶^۲ = ۳۶ \Rightarrow \sqrt{۳۶} = ۶$

ب) $۱۱^۲ = ۱۲۱ \Rightarrow \sqrt{۱۲۱} = ۱۱$

پ) $(۰/۲)^۲ = ۰/۰۴ \Rightarrow \sqrt{۰/۰۴} = ۰/۲$

ت) هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که به‌طور دقیق برابر $\sqrt{۲}$ باشد. عددهای بسیاری مانند $\sqrt{۲}$ می‌توان یافت که جذر دقیق ندارند. درواقع اگر عدد زیر رادیکال مربع کامل نباشد، جذر دقیق وجود نخواهد داشت. به این‌گونه از عددها، **عددهای گنگ** یا **اَصَم** می‌گوییم؛ مانند: $\sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۵}, ...$

پیامد ۱۴: عددهایی مانند ۶، ۱۱ و ۰/۰۴ که جذر کامل دارند را مجذور کامل می‌نامیم.

پیامد ۱۵: عددهای اعشاری مجذور کامل تعداد اعشارشان همواره زوج است؛ مانند: ۱/۲۱، ۰/۰۰۰۴ و ۰/۲۵

مثال ۲۹: حاصل عبارت‌های داده‌شده را بنویسید.

الف) $-\sqrt{۴۹}$ ب) $\sqrt{۱۰۰-۳۶}$ پ) $\sqrt{۱۰۰\times۱۶}$

ت) $\sqrt{۷۲}\times\sqrt{۲}$ ث) $\sqrt{\frac{۹}{۰/۲۵}}$ ج) $\frac{\sqrt{۰/۷۵}}{\sqrt{۳}}$

پاسخ:

الف) $۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow -\sqrt{۴۹} = -۷$

بار دیگر تکرار می‌کنیم که حاصل یک رادیکال هیچ‌گاه عددی منفی نمی‌شود، مگر اینکه علامت منفی پشت رادیکال باشد.

ب) اگر زیر رادیکال عمل جمع یا تفریق بود نمی‌توانیم از تک‌تک عددها جذر بگیریم، بلکه باید ابتدا حاصل عبارت زیر رادیکال را به دست آورده، سپس جذر بگیریم. به‌عبارت‌دیگر $\sqrt{a\pm b}\neq\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ بنابراین $\sqrt{۱۰۰-۳۶}=\sqrt{۶۴}=۸$

پ) اگر زیر رادیکال چند عدد در هم ضرب شده باشند و همگی جذر دقیق داشته باشند، برای ساده شدن محاسبه می‌توانیم رادیکال را روی آن‌ها پخش کنیم و از تک‌تک عددها جذر بگیریم. $\sqrt{۱۰۰\times۱۶}=\sqrt{۱۰۰}\times\sqrt{۱۶}=۱۰\times۴=۴۰$

ت) می‌دانیم تساوی مانند یک ترازو عمل می‌کند. پس بعضی وقت‌ها لازم است برعکس قسمت پ عمل کنیم. به‌عبارت‌دیگر به‌طور کلی می‌توان گفت: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ بنابراین $\sqrt{۷۲}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۴۴}=\sqrt{۱۲^۲}=۱۲$

ث) مانند ضرب اگر زیر رادیکال چند عدد بر هم تقسیم شده باشند و همگی جذر دقیق داشته باشند، برای ساده شدن محاسبه

می‌توانیم رادیکال را روی آن‌ها پخش‌کنیم و از تک‌تک عددها جذر بگیریم. عکس این مطلب نیز بسیاری از وقت‌ها راهگشا خواهد بود. به‌عبارت‌دیگر: $b\neq ۰$ ، $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ بنابراین $\sqrt{\frac{۹}{۰/۲۵}}=\frac{\sqrt{۹}}{\sqrt{۰/۲۵}}=\frac{۳}{۰/۵}=\frac{\frac{۳}{۱}}{\frac{۱}{۲}}=۶$

ج) $\frac{\sqrt{۰/۷۵}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۰/۷۵}{۳}}=\sqrt{۰/۲۵}=۰/۵$

کار در کلاس ۱۴: حاصل را به دست آورید.

الف) $\sqrt{۴\times\frac{۹}{۱۶}}$

ب) $\sqrt{۰/۴\times۰/۹}$

پ) $\sqrt{۲\times۰/۳۲}$

ت) $\sqrt{\frac{۴۸}{۱۶}}$

ث) $\sqrt{\frac{۱/۸}{۵}}$

ج) $\frac{\sqrt{۵}\times\sqrt{۲۰}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}$

مثال ۳۰: جذرهای دقیق زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sqrt{\sqrt{۸۱}}$

ب) $\sqrt{۶۸-\sqrt{۹+\sqrt{۴۹}}}$

پاسخ: در محاسبه‌ی رادیکال‌های تودرتو از آخرین یا همان درونی‌ترین رادیکال شروع به محاسبه می‌کنیم.

الف) $\sqrt{\sqrt{۸۱}}=\sqrt{۹}=۳$

ب) $\sqrt{۶۸-\sqrt{۹+\sqrt{۴۹}}}=\sqrt{۶۸-\sqrt{۹+۷}}=\sqrt{۶۸-۴}=\sqrt{۶۴}=۸$