

دبیرستان شهید مسعودیان

سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴

فصل هفتم توان و جذر

تعریف توان :

عبارتی مانند ؛ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ را در ریاضیات برای ساده تر شدن به صورت 2^5 می نویسیم و آن را چنین می خوانیم ۲ به توان ۵ .

در عبارت 2^5 ، ۲ را پایه و ۵ را توان می نامیم . درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم .
($2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \times 2$)

* از توان به منظور مختصر نویسی ضرب های تکراری یک عدد استفاده می کنند .

* به توان ، نما و قوه هم گفته می شود .

* هر عدد به توان یک برابر خودش می شود :

$$a^1 = a$$

$$1^{52} = 1$$

* عدد یک به توان هر عددی برابر یک می شود :

$$1^2 = 1$$

* هر عدد به توان صفر ، ۱ می شود .

$$0^{15} = 0$$

* عدد صفر به توان هر عددی برابر صفر می شود .

$$0^0 = \text{تعریف نشده}$$

* صفر به توان صفر تعریف نشده است .

نقش پرانتز در اعداد توان دار :

- اگر عددی منفی داخل پرانتز به توان زوج رسید ، حاصل عددی مثبت می شود .

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$$

- اگر توان عددی منفی داخل پرانتز بود ، پرانتز در توان رساندن عدد نقشی ندارد .

$$(-3^2) = -(3 \times 3) = -9$$

- اگر عددی منفی بدون پرانتز به توان برسد ، حاصل عددی منفی می شود .

$$-4^2 = -(4 \times 4) = -16$$

- اگر یک کسر داخل پرانتز به توان برسد ، توان شامل صورت و مخرج هر دو می شود .

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

- اگر کسری داخل پرانتز به توان گرفت ، یا توان در صورت یا مخرج کسر باشد ، پرانتز هیچ نقشی در توان ندارد .

$$\left(\frac{2^3}{5}\right) = \frac{2 \times 2 \times 2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{7}{3^2} = \frac{7}{3 \times 3} = \frac{7}{9}$$

- اگر یک عبارت جبری داخل پرانتز به توان برسد ، توان شامل تک تک جمله های عبارت می شود .

$$(2ab)^2 = 2^2 a^2 b^2 = 4a^2 b^2$$

- اگر جمله ای از یک عبارت جبری توان نداشت ، توانش ۱ می باشد .

$$5a^2 b x^1 = 5a^2 b^1 x^1$$

دبیرستان شهید مسعودیان

سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴

محاسبه عبارت توان دار :

با توجه به درس توان ، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت
(۱) پراگم (۲) توان (۳) ضرب و تقسیم (۴) جمع و تفریق ، انجام می شود.

$$\frac{4^3 \times 4 + 9 - 6}{5^2 + 2^3} =$$

گسترده توانی یک عدد :

در نوشتن گسترده توانی هر عدد ، ارزش مکانی رقمهای
را به صورت توانی از 10^0 می نویسیم .

$$\begin{aligned} 5062 &= 5000 + 60 + 2 \\ &= 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0 \end{aligned}$$

ساده کردن عبارت های توان دار :

۱ - در ضرب عددهای توان دار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را جمع می کنیم .

$$(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^6$$

۲ - در ضرب عددهای توان دار با توان های مساوی ، پایه ها را در هم ضرب و یکی از توان ها را می نویسیم.

$$5^4 \times (-3)^4 = (-15)^4$$

۳ - اگر ظاهر پایه ها مثل هم نبود ، مثلاً یکی عدد و دیگری کسر بود ، سعی میکنیم آنها به یک شکل تبدیل کنیم

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{5}{10}\right)^6 =$$

$$\text{داریم : } \left(\frac{5}{10}\right) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{در نتیجه : } \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

۴ - یک عدد توان دار را در صورت نیاز می توان به صورت ضرب دو یا چند عدد توان دار تبدیل کرد .

$$3^7 = 3^2 \times 3 \times 3^4 \quad \text{یا} \quad 15^4 = 3^4 \times 5^4$$

این خواص کمک به حل بسیاری از سوالات اعداد توان دار می نماید .

الف - اگر $2^{10} = 1024$ باشد ، حاصل 2^{12} را به دست آورید .

$$2^{12} = 2^{10} \times 2^2 = 1024 \times 4 = 4096$$

ب - باز شده عدد توان دار زیر را بنویسید :

$$12^7 = (2 \times 6)^7 = 2^7 \times 6^7$$

ج - ساده کردن عبارت های توان دار :

$$\underbrace{5^2 \times 5^7 \times 7^9}_{\text{ضرب پایه های مساوی}} = \underbrace{5^9 \times 7^9}_{\text{ضرب توان های مساوی}} = 35^9$$

د - پیش بینی ارقام یک عدد توان دار :

اگر $4^5 = 1024$ باشد ، عدد 4^{10} چند رقمی است ؟

اگر 4^5 را 1000 فرض کنیم ، پس داریم :

$$1000 \times 1000 = 1000000$$

در نتیجه 4^{10} ؛ هفت رقمی خواهد بود .

دبیرستان شهید مسعودیان

سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴

ه - استثنای تفریق اعداد توان دار :

$$10^2 - 6^2 = 4^3$$

$$21^2 - 15^2 = 6^3$$

و - استثنای جمع اعداد توان دار :

$$3^9 + 3^9 + 3^9 = 3^9 \times 3 = 3^{10}$$

ز - محاسبه عبارت توان دار به کمک مقدار داده شده:

اگر $2^a = 7$ باشد ، مقدار 2^{a+1} را بدست آورید .

$$2^{a+1} = 2^a \times 2^1 = 7 \times 2 = 14$$

جذر یا ریشه دوم :

- هر گاه عددی در خودش ضرب شود ، این حاصل را **مجذور** و به عددی که در خوش ضرب شده **جذر** میگوییم .
- * هر عدد مثبت دارای دو ریشه ، یکی مثبت و دیگری منفی می باشد . مانند عدد ۲۵ که دو ریشه $+5$ و -5 را دارد .
- * به ریشه دوم مثبت هر عدد **جذر** آن عدد گفته میشود .
- * علامت جذر $\sqrt{\quad}$ است .
- * جذر هر عدد ، برابر است با دو عدد که قرینه یکدیگرند
- * به جذر یک عدد ، ریشه دوم آن نیز گفته میشود .
- * اعداد منفی جذر ندارند . زیرا حاصل ضرب هیچ عددی در خوش ، منفی نمی شود .
- * عدد صفر تنها یک ریشه دارد که آن خود عدد صفر است .

انواع جذر :

جذر کامل :

- * اعداد طبیعی که جذر کامل دارند ؛ یعنی جذر آنها یک عدد طبیعی می شود را مجذور کامل گویند ، مانند ؛ ۱ ، ۴ ، ۹ ، ۱۶ ، ۲۵ و برای رسیدن به جذر کامل از خود سوال کنید چه عددی در خوش ضرب شده که عدد زیر رادیکال را تشکیل داده است ؟ مانند :

$$\sqrt{49} = 7$$

جذر تقریبی :

- * جذرهایی که یک عدد اعشاری شوند .
- برای رسیدن به جذر تقریبی یک عدد ابتدا باید معلوم کنید که عدد زیر رادیکال شما بین کدام دو عدد صحیح قرار گرفته است . مانند $\sqrt{18}$ که بین دو رادیکال $\sqrt{16}$ و $\sqrt{25}$ قرار گرفته یعنی : $\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$ پس $\sqrt{18}$ بین دو عدد ۴ و ۵ قرار گرفته است .
- این فاصله را نصف کرده به توان ۲ برسانید .

بسیار مهم :

- ضمناً می توانید اگر به عدد کوچکتر نزدیک بود ؛ $0/1$ ، $0/1$ به عدد کوچکتر اضافه کنید تا به حدود جذر مورد نظر برسید و اگر به عدد بزرگتر نزدیک بود ؛ $0/1$ ، $0/1$ از عدد بزرگتر کم کنید تا به حدود جذر مورد نظر برسید .

عدد	۴/۵	۴/۱	۴/۲	۴/۳
مجذور	۲۰/۲۵	۱۶/۸۲	۱۷/۶۴	۱۸/۴۹

$$\sqrt{18} \approx 4/2$$

پس داریم :