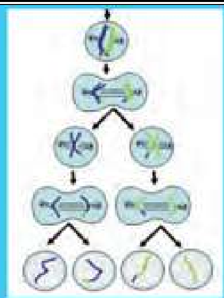

فصل ۷
توان و جذر

. یک کاغذ مستطیل شکل را از وسط تا می کنیم ، اکنون دو قطعه کاغذ روی هم قرار گرفته است. کاغذ را دوباره تا می کنیم و اکنون چهار قطعه کاغذ روی هم قرار می گیرند. اگر کاغذ را یکبار دیگر (مرتبه سوم) تا کنیم ، چند قطعه کاغذ روی هم قرار می گیرند؟

به الگوها و شکل های زیر توجه کنید :

تعداد تا	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد قسمت‌ها	۱	۲	۲×۲	۲×۲×۲	۲×۲×۲×۲

اگر تا زدن را تا هشت بار (مرتبه هشتم) انجام دهیم ، چند کاغذ روی هم قرار می گیرند؟

چه راهی برای خلاصه کردن عبارت های بالا پیشنهاد می کنید؟

همانطور که مشاهده می کنید ، اگر تا کردن کاغذ ها را به همین صورت ادامه بدهیم ، به الگوی زیر می رسیم :

$$\overbrace{۲\times۲\times۲\times\ldots\ldots\times۲}^{\text{n بار}}$$

. نتیجه : عباراتی مانند $2\times2\times2\times2\times2$ را در ریاضیات به صورت 2^5 می نویسیم و آن را چنین می خوانیم : (2 به توان 5) که عدد 2 را پایه و عدد 5 را توان می نامیم.

اعدادی نظیر 2^5 را اعداد توان دار می نامیم.

درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم :

$$۵+۵+۵+۵=۴\times۵$$

$$\overbrace{x+x+x+\ldots+x}^{n\ \text{مرتبه}}=n\times x$$

. نتیجه : پس در حالت کلی در مورد عبارات توان دار داریم :

$$۵\times۵\times۵\times۵=۵^{۴}$$

$$\overbrace{x\times x\times x\times\ldots\times x}^{n\ \text{مرتبه}}=x^{n}$$

. تمرین : با توجه به نمونه داده شده ، طرف دیگر هر تساوی را بنویسید.

$(\frac{۵}{۳})^{۴}=$ $\qquad$ $۴^{۳}=۴\times۴\times۴$

$(-۳)^{۲}=$ $\qquad$ $(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=$

$(\frac{۵+۷}{۹})\times(\frac{۵+۷}{۹})=$ $\qquad$ $(-\frac{۲}{۷})^{۵}=$

. نکته 1 : برای انجام چهار عمل اصلی روی اعداد توان دار ، ابتدا بایستی مقدار هر عدد توان دار را محاسبه نموده و سپس عملیات مورد نظر را انجام دهیم : (مانند دو مثال زیر)

$$۵^{۳} - ۲^{۷} = ۱۲۵ - ۱۲۸ = -۳$$

$$۱۰^{۲} \div ۳^{۳} = ۱۰۰ \div ۲۷ = \frac{۱۰۰}{۲۷}$$

1- حاصل هر عدد به توان یک برابر با خود آن عدد است.

$$(\frac{۳}{۴})^{۱} = \frac{۳}{۴}, (-۵)^{۱} = -۵$$

2- عدد یک به هر توانی برسد ، حاصل برابر با یک است.

$$۱^{۱۰۰} = ۱, ۱^{۱۱} = ۱$$

3- هر عدد (به غیر از عدد صفر) که به توان صفر برسد ، حاصل برابر با یک است.

$$(-۷)^{\circ} = ۱, (۱۰۰۰)^{\circ} = ۱$$

4- با معکوس کردن پایه هر عدد توان دار ، توان آن قرینه می شود.

$$(\frac{۳}{۴})^{-۲} = (\frac{۴}{۳})^{۲}$$

5- حاصل هر عدد منفی به توان زوج ، برابر با عددی مثبت است.

$$(-۵)^{۲} = +۲۵$$

6- حاصل هر عدد منفی به توان فرد ، برابر با عددی منفی است.

$$(-۵)^{۳} = -۱۲۵$$

7- اگر کسر کوچکتر از واحدی به توان بزرگتر برسد ، حاصل آن کوچکتر می شود :

$$(\frac{۱}{۵})^{۷} < (\frac{۱}{۵})^{۳} < (\frac{۱}{۵})^{۱} < (\frac{۱}{۵})^{۰} < (\frac{۱}{۵})^{-۵}$$

8- به توان دوم هر عددی ، مجذور یا مربع آن عدد گفته می شود.

$$\text{مجذور } (-۷) = (-۷)^{۲} = ۴۹$$

9- به توان سوم هر عددی ، مکعب آن عدد گفته می شود.

$$\text{مکعب } (-۷) = (-۷)^{۳} = -۳۴۳$$

. ضرب و تقسیم اعداد توان دار

در ضرب اعداد توان دار بایستی به نکات زیر توجه کرد :

1- در ضرب اعداد توان دار اگر پایه ها با یکدیگر برابر باشند ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^x \times a^y = a^{x+y} , (-۷)^۴ \times (-۷)^{-۱۲} = (-۷)^{-۸}$$

2- در ضرب اعداد توان دار اگر پایه ها با هم برابر نباشند (توان ها با هم برابر باشند) ، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^x \times b^x = (a \times b)^x , (-۳)^۹ \times (+۰/۲)^۹ = (-۰/۶)^۹$$

در تقسیم اعداد توان دار بایستی به نکات زیر توجه کرد :

1- در تقسیم اعداد توان دار ، اگر پایه ها با یکدیگر برابر باشند ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از یکدیگر کم می کنیم.

$$a^x \div a^y = a^{x-y} , ۴^۳ \div ۴^{۱۰} = ۴^{۳-۱۰} = ۴^{-۷} = (\frac{۱}{۴})^۷$$

2- در تقسیم اعداد توان دار ، اگر پایه ها با هم برابر نباشند (توان ها با هم برابر باشند) ، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^x \div b^x = (a \div b)^x = (\frac{a}{b})^x$$

$$(-۳)^۷ \div ۱۵^۷ = (-۳ \div ۱۵)^۷ = (-\frac{۳}{۱۵})^۷ = (-\frac{۱}{۵})^۷$$

. مقایسه اعداد توان دار با پایه های مساوی

با فرض اینکه a عددی مثبت است و m و n اعداد صحیح هستند و m بزرگتر از n باشد ، داریم :

اگر $a > ۱$ باشد، آنگاه $a^m > a^n$ است. مثال: $۷^{۱۱} > ۷^۵ , ۵^{-۳} > ۵^{-۱۰}$

اگر $a = ۱$ باشد، آنگاه $a^m = a^n$ است. مثال: $۱^{۱۱} = ۱^۵ , ۱^۰ = ۱^{-۲۰}$

اگر $a < ۱$ باشد، آنگاه $a^m < a^n$ است. مثال: $(\frac{۱}{۳})^۷ < (\frac{۱}{۳})^۲ , (\frac{۵}{۹})^{-۳} < (\frac{۵}{۹})^{-۴}$

. مقایسه اعداد توان دار با توان های مساوی

با فرض اینکه n عددی صحیح و a و b اعدای گویا باشند و a بزرگتر از b باشد،داریم :

نکته: اگر $n>0$ باشد آنگاه $a^n > b^n$ است. مثال: $(\frac{3}{5})^4 > (\frac{3}{7})^4$, $(\frac{3}{5})^{\frac{1}{3}} > (\frac{3}{7})^{\frac{1}{3}}$

نکته: اگر $n=0$ باشد، آنگاه $a^n = b^n = 1$ است. مثال: $1 = (\frac{3}{7})^0 = (\frac{3}{5})^0$

نکته: اگر $n<0$ باشد، آنگاه $a^n < b^n$ است. مثال: $(\frac{3}{5})^{-3} < (\frac{3}{7})^{-3}$ زیرا $(\frac{5}{3})^3 < (\frac{7}{3})^3$ است.

. تمرین : حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$(\frac{1}{2})^5 \times 3^5 =$ $\qquad$ $(\frac{2}{3})^6 \times (\frac{3}{4})^6 =$ $\qquad$ $2^4 \times 3^4 =$

$x^2 \times y^2 =$ $\qquad$ $(-2)^5 \times 3^5 =$ $\qquad$ $(-2)^7 \times (-1)^7 =$

$(-4)^1 \times (-4)^5 =$ $\qquad$ $(-2)^4 \times (-2)^2 =$ $\qquad$ $5^3 \times 5^4 =$

$1.5^4 \times (\frac{3}{2})^4 =$ $\qquad$ $(\frac{1}{2})^5 \times 0.5^2 =$ $\qquad$ $7^3 \times 7 =$

. تمرین : کدام یک درست و کدام یک نادرست می باشد؟

$(-\frac{2}{3})^0 + (\frac{1}{3})^0 > 1$ $\qquad$ $(2\frac{1}{2})^0 > (-\frac{1}{2})^2$ $\qquad$ $(3+2)^0 = 2^0 + 3^0$

$4^0 < (-2)^2$ $\qquad$ $2^0 + 3^0 + 5^0 = 1$ $\qquad$ $4 + 2^0 = 6$

. تمرین : حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$(۰/۴)^۶ \times (۰/۴)^۴$	$۵^۲ \times ۵^۳$	$۴^۵ \times ۴^۳$
$(۰/۳)^۷ \div (۰/۳)^۵$	$(\frac{۲}{۳})^۵ \div (\frac{۲}{۳})^۴$	$۷^۶ \div ۷^۴$
$(\frac{۲}{۵})^۳ \times (\frac{۱۵}{۲})^۳$	$۹^۷ \times ۶^۷$	$۵^۹ \times ۷^۹$
$۵^۳ \div ۱۰^۳$	$۳^۶ \div ۴^۶$	$۸^۴ \div ۵^۴$

. جذر

می دانیم که به توان دوم هر عددی مجذور آن عدد گفته می شود ، عکس مجذور کردن را جذرگیری می گویند.

به طور مثال جذر 49 عدد (7+) می باشد زیرا مجذور عدد (7+) عدد 49 است.

در ریاضیات برای محاسبه جذر حسابی (ریشه مثبت) یک عدد ، از نمادی به نام رادیکال ($\sqrt{\ }$) استفاده می شود.

در واقع رادیکال یک عدد ، (ریشه دوم) آن عدد را می دهد.

یعنی عدد (7+) ریشه دوم عدد 49 می باشد.

به مثال های زیر توجه کنید :

$$\sqrt{۲۵} = ۵ \text{ ، } \sqrt{۴۹} = ۷ \text{ و } \sqrt{۰/۰۶} \simeq ۰/۲۴$$

. محاسبه جذر اعداد توان دار

برای محاسبه جذر اعداد توان دار می توان از روش زیر استفاده کرد :

$$(a>0)\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$$

نکته 1 : در عبارت نوشته شده بالا ، m را توان و n را فرجه رادیکال می نامیم.

نکته بسیار مهم : هر عددی که زیر رادیکال قرار می گیرد بایستی مثبت باشد نه منفی.

. نکته 2 : اگر در بالای رادیکال مقدار فرجه را ننوشته بودند ، همیشه مقدار فرجه را عدد 2 در نظر می گیریم.

. نکته 3 : جذر حاصل ضرب چند عدد نا منفی برابر با حاصل ضرب جذر آن اعداد می باشد.

$$\sqrt{a\times b\times c\times \dots}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\dots$$

. به مثال های زیر توجه نمایید :

الف) $\sqrt{۲۵\times ۸۱}=۵\times ۹=۴۵$

ب) $\sqrt{۰/۱۶}=\sqrt{۰/۰۱\times ۱۶}=۰/۱\times ۴=۰/۴$

. تمرین : حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$\sqrt{۹\times ۸۱} =$ ______　　$\sqrt{۴\times ۳۶} =$ ______

$\sqrt{۱۰۰\times ۱۶} =$ ______　　$\sqrt{۴۹\times ۴} =$ ______

$\sqrt{\frac{۱۲۱\times ۹}{۱۰۰}} =$ ______　　$\sqrt{\frac{۲۵}{۶۴}} =$ ______

. جذر تقریبی

می خواهیم بدانیم که جذر عدد 28 بین چه مقادیری است؟ برای این کار ابتدا باید گفت عدد 28 بین کدام یک از اعدادی است که جذر کامل دارند؟

همانطور که می دانیم عدد 28 بین اعداد 25 و 36 است. (اعداد 25 و 36 دارای جذر کامل هستند.)

پس جذر عدد 28 بین جذر اعداد 25 و 36 است ، یعنی بین $\sqrt{۲۵}$ و $\sqrt{۳۶}$ است.

به جدول زیر دقت نمایید :

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

. تمرین : $\sqrt{۵۸}$ بین کدام دو عدد است؟

. تمرین : ریشه دوم عدد 30 بین کدام دو عدد است؟

. تمرین : ریشه دوم عدد 40 را اگر با مقدار (1+) جمع کنیم ، بین کدام دو عدد قرار می گیرد؟