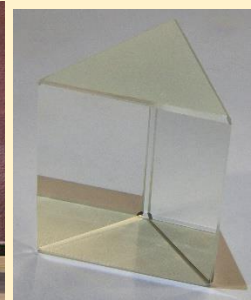


در درس علوم حجم را چگونه تعریف می کردید؟ « فضایی که جسم اشغال می کند.»
به اطراف خود با دقت نگاه کنید. آیا چیزی را می توانید پیدا کنید که حجم نداشته باشد؟ به شکل های زیر دقت کنید.



همه این شکل ها دارای حجم هستند، زیرا فضایی را اشغال می کنند. حال به شکل های زیر دقت کنید.



در ردیف دوم هم شکل هایی می بینید که همه دارای حجم هستند. تفاوت ردیف اول با ردیف دوم چیست؟ اگر به شکل ها خوب نگاه کنید متوجه می شوید که در ردیف دوم شکل ها منظم تر و مشخص هستند.

« حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد. حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده دارند.»

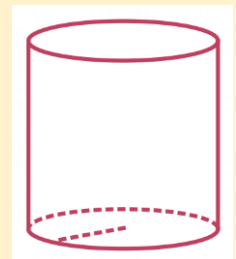
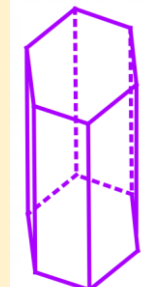
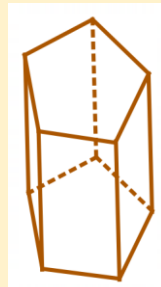
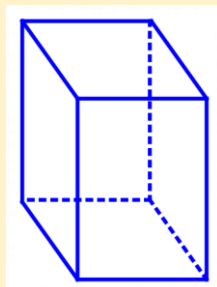
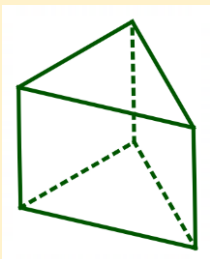
در شکل های بالا، ردیف اول شکل های غیرهندسی هستند و ردیف دوم همه شکل های هندسی هستند. با کمی دقت می توانید تفاوت آنها را ببینید.

تمرین (۱):

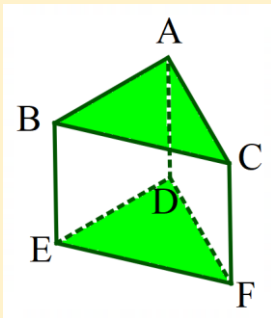
به اطراف خود خوب نگاه کنید و نام پنج حجم غیرهندسی و پنج حجم هندسی را بنویسید.

فعالیت :

به شکل های زیر نگاه کنید. چه ویژگی مشترکی در همه آنها می بینید؟

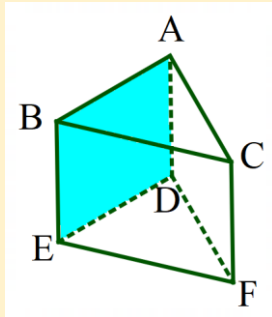
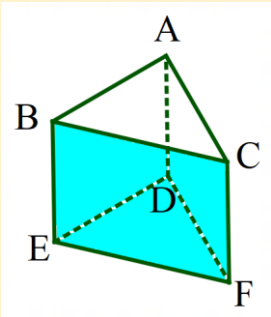
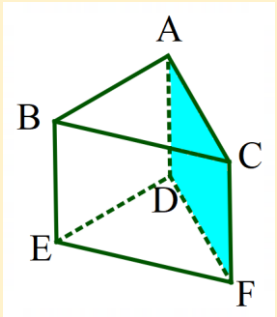


این حجم ها منشور نام دارند. همانطور که می بینید بالا و پایین این شکل ها با هم برابر است. به این دو سطح موازی که در بالا و پایین منشور قرار دارد قاعده می گویند. به سطح های اطراف آن وجه های جانبی می گویند. به محل برخورد سطح ها یال و به نقطه برخورد هر سه سطح راس می گویند.

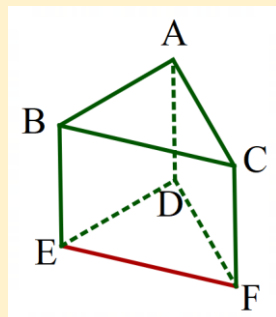
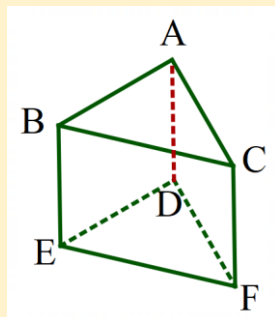
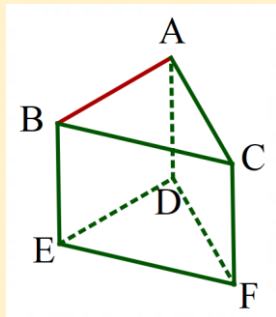


الف) در منشور مقابل قاعده ها مشخص شده اند. در اینجا قاعده ها مثلث هستند.

DEF و ABC

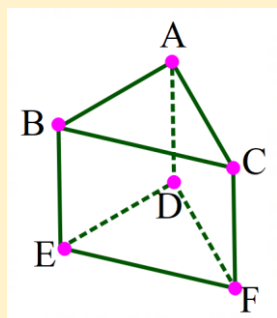


ب) در منشور مقابل وجه های جانبی مشخص شده اند. این منشور ۳ وجه جانبی دارد، پس منشور را سه پهلو می نامیم.



ج) در شکل های مقابل سه تا از یال ها را در این منشور نشان داده ایم. این شکل ۹ یال دارد.

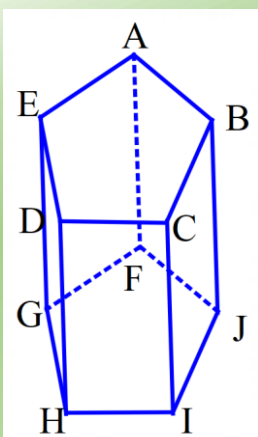
AB, AC, BC
 BE, AD, CF
 DE, DF, EF



د) در شکل مقابل راس های این منشور با نقاط به رنگ صورتی مشخص شده است. این شکل ۶ راس داد.

A, B, C, D, E, F

تمرین (۲):



در منشور مقابل موارد خواسته شده را بنویسید.

الف) تعداد وجه های جانبی:

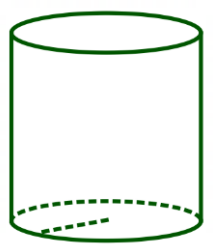
ب) راس ها:

ج) یال ها:

د) قاعده ها:

فعالیت :

شکل مقابل را استوانه می نامیم.

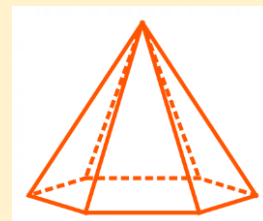
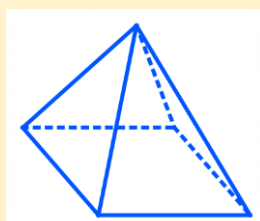
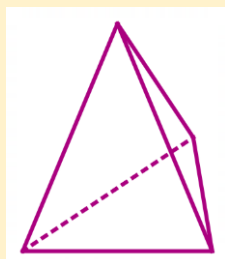


استوانه هم نوعی منشور است، زیرا دو قاعده به شکل دایره که با هم موازی و برابرند، دارد.

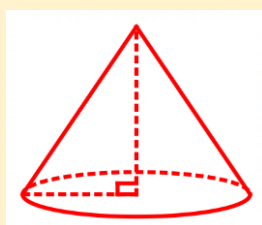
تمرین (۳): توضیح دهید چرا استوانه یال و راس ندارد؟

فعالیت :

به شکل های زیر نگاه کنید. چه ویژگی مشترکی در همه آنها می بینید؟

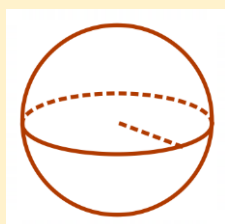


تمامی این شکل ها فقط یک قاعده دارند، وجه های جانبی آنها نیز به شکل مثلث است و به همین خاطر راس آنها تیز است.



این شکل ها را حجم های هرمی یا هرم می نامیم.

اگر قاعده هرم، دایره باشد آن را مخروط نامیده می شود.



شکل مقابل را کره می نامیم.

می ببیند که این شکل اصلاً قاعده ندارد و از هر طرف به آن نگاه کنیم دایره می بینیم.

تمرین (۴):

با توجه به شکل های مقابل ، برای موارد زیر نام شکل ها را بنویسید.

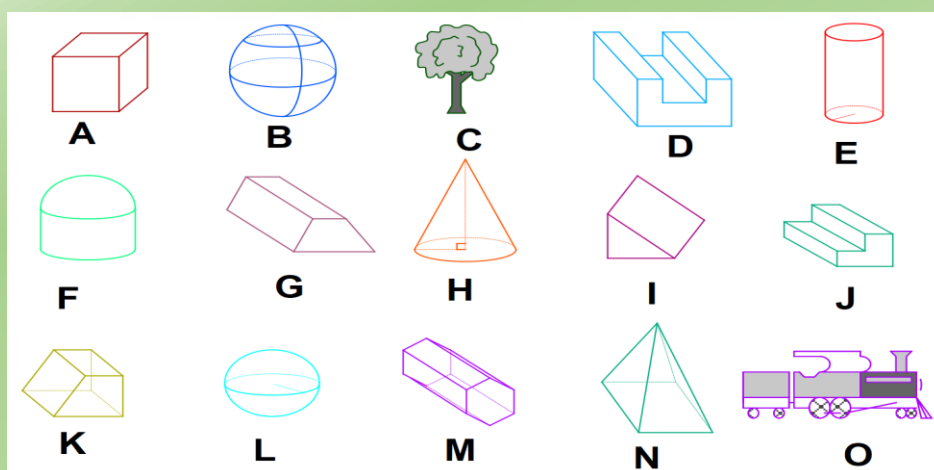
الف) غیرهندسی:

ب) منشور:

ج) هرم:

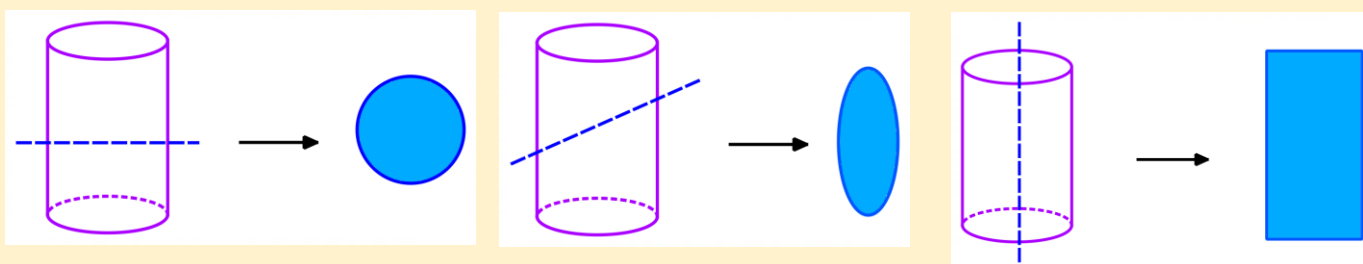
د) کره:

ه) ترکیبی:



فعالیت :

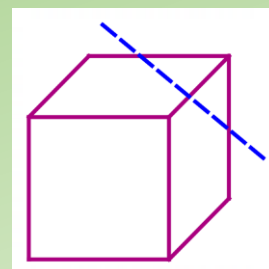
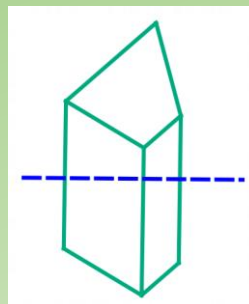
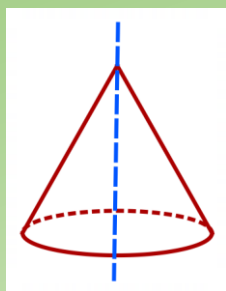
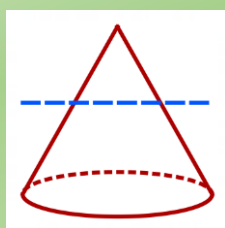
استوانه ای از خمیر مجسمه سازی درست کرده ایم. می توانید از سیب زمینی یا خیار یا هویج هم استفاده کنید. با یک چاقو مانند شکل های زیر آن را برش می زنیم. سطح برش خورده به چه شکلی است؟ می توانید سطح برش خورده را رنگ کنید و روی یک کاغذ بزنید تا شکل آن را ببینید.



به این کار مقطع زدن می گویند.

تمرین (۵):

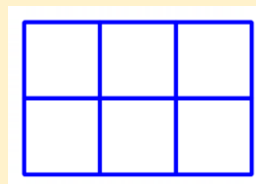
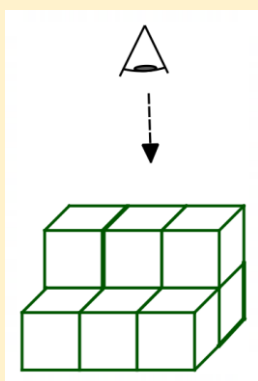
حجم های زیر را از محل نقطه چین مقطع زده ایم. شکل سطحی را که برش خورده است بکشید.



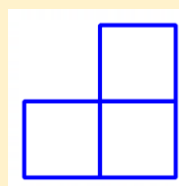
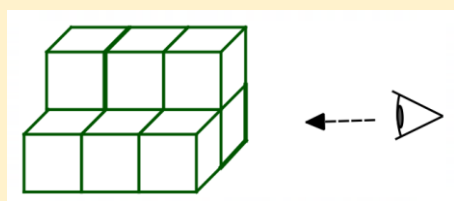
فعالیت :

شکل مقابل از بالا چگونه دیده می شود؟

منظور این است که اگر کاملاً عمود به این حجم نگاه کنیم چه شکلی می بینیم.



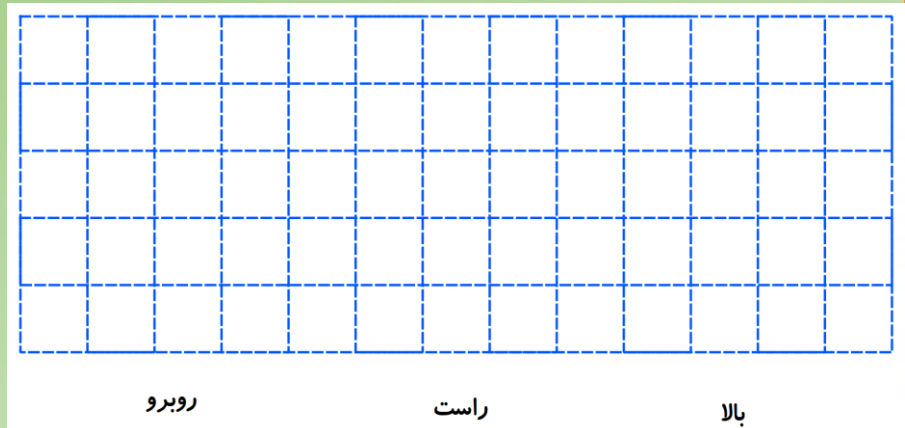
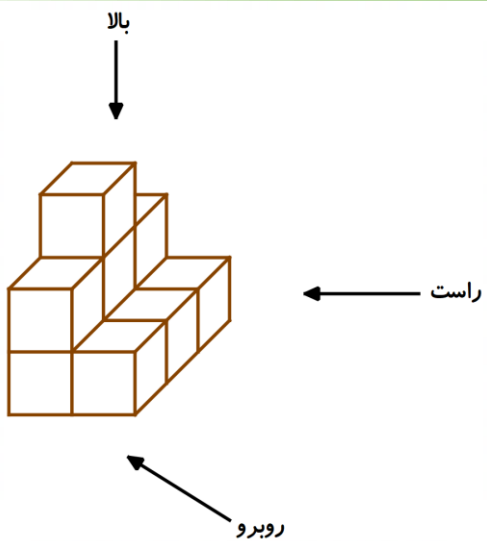
حال اگر همین شکل را از سمت راست ببینیم به چه صورت دیده می شود؟



حال اگر به همین شکل از روبرو نگاه کنیم، به چه صورت دیده می شود؟

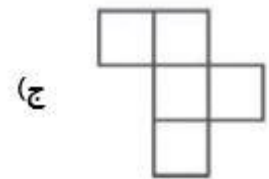
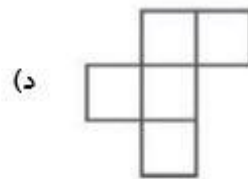
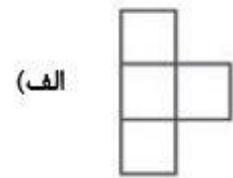
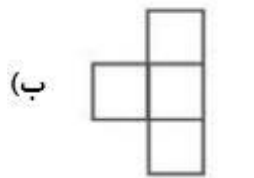
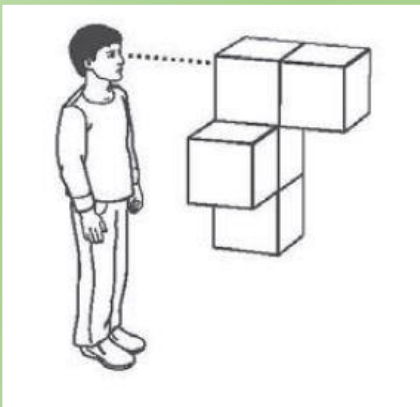
تمرین (۶):

نمای بالا، راست و روبرو شکل را رسم کنید.



تمرین (۷):

شکل از ۵ مکعب هم اندازه ساخته شده است. کدام یک از شکل های زیر زاویه دید این فرد را نشان می دهد؟



تمرین (۱):

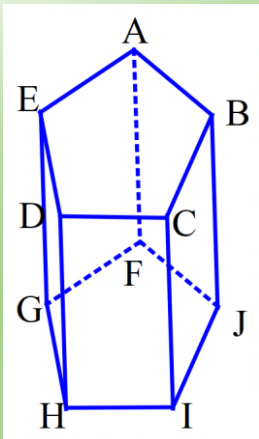
به اطراف خود خوب نگاه کنید و نام پنج حجم غیرهندسی و پنج حجم هندسی را بنویسید.

مثال های زیادی می توانید بنویسید.مانند:

غیرهندسی: صندلی ، کیف مدرسه ، مجسمه ، بالشت ، لوتر و ...

هندسی : دستمال کاغذی ، کتاب ، توپ فوتبال ، گلدان ، کاسه و ...

تمرین (۲):



در منشور مقابل موارد خواسته شده را بنویسید.

الف) تعداد وجه های جانبی: **۵ وجه جانبی**

ب) راس ها: **$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$**

ج) یال ها:

AB, BC, CD, DE, AE

AF, BJ, CI, DH, FG

FJ, JI, IH, GH, FG

د) قاعده ها: **$ABCDE, FGHIJ$**

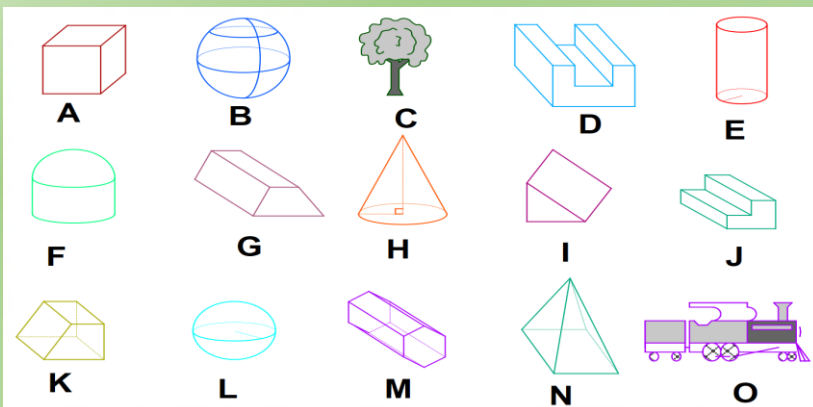
تمرین (۳):

توضیح دهید چرا استوانه یال و راس ندارد؟

قاعده استوانه دایره است، و دایره هم ضلع ندارد، در نتیجه استوانه یال و راس ندارد.

تمرین (۴):

با توجه به شکل های مقابل ، برای موارد زیر نام شکل ها را بنویسید.



الف) غیرهندسی: **C, O**

ب) منشور: **A, E, G, I, K, M**

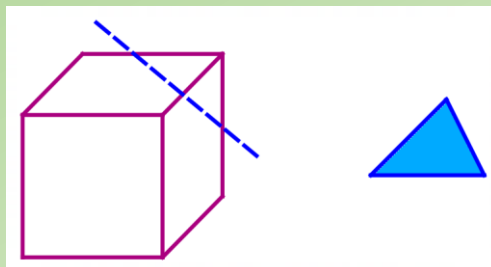
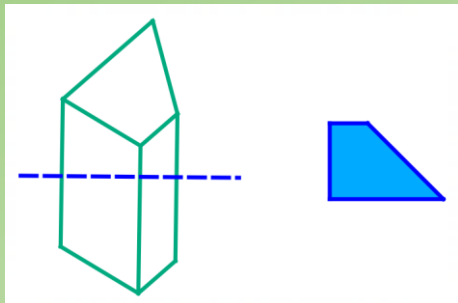
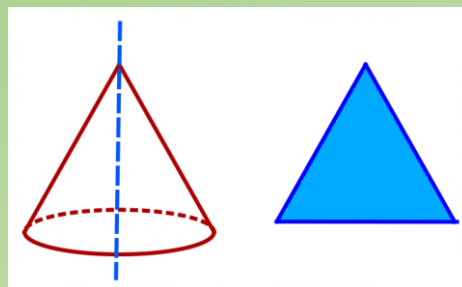
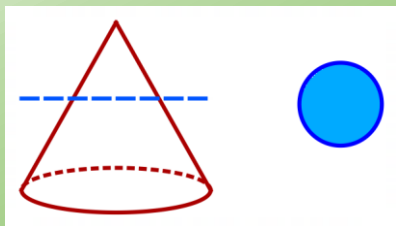
ج) هرم: **H, N**

د) کره: **B, L**

ه) ترکیبی: **D, F, J**

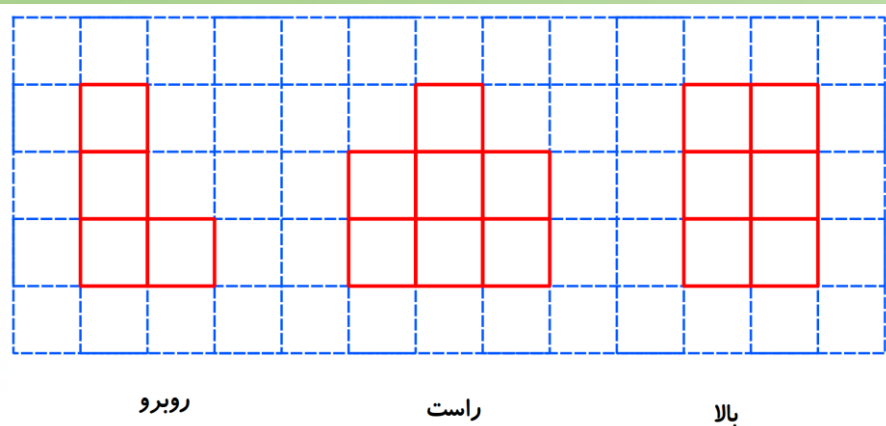
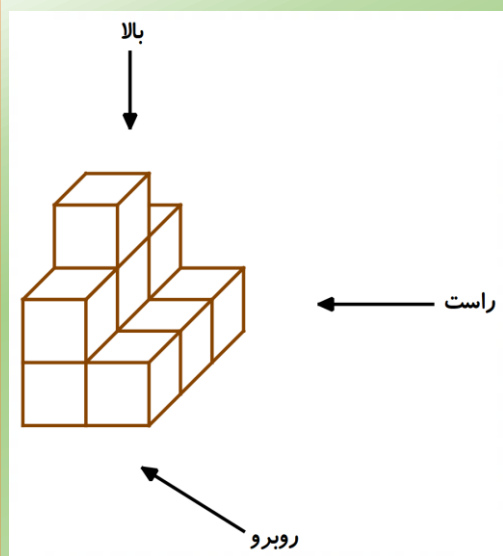
تمرین (۵):

حجم های زیر را از محل نقطه چین مقطع زده ایم. شکل سطحی را که برش خورده است بکشید.



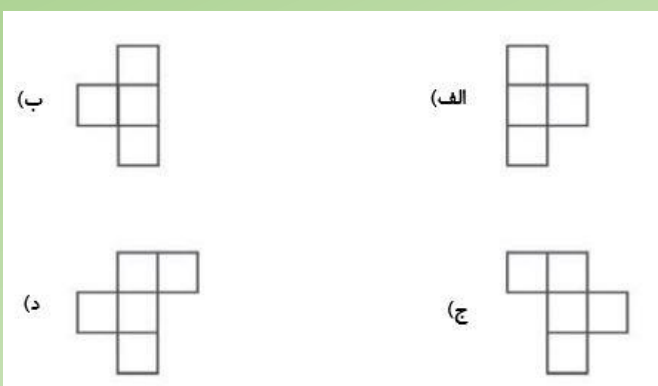
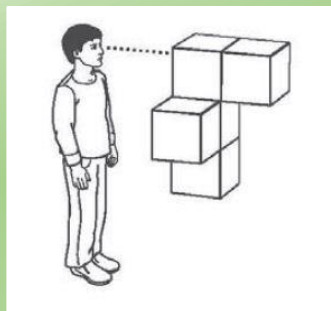
تمرین (۶):

نمای بالا، راست و روبرو شکل را رسم کنید.



تمرین (۷):

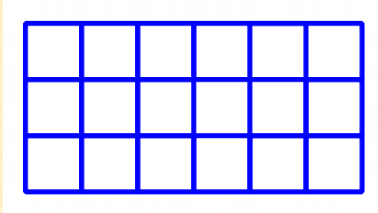
شکل از ۵ مکعب هم اندازه ساخته شده است. کدام یک از شکل های زیر زاویه دید این فرد را نشان می دهد؟



گزینه الف درست است.

فعالیت :

تعدادی کارتن به شکل مکعب به اندازه ضلع یک متر را می خواهند در یک انبار به طور مرتب جای دهند. مسئول انبار برای اینکه کار منظم شود ابتدا کف سالن انبار را با گچ به صورت زیر به مربع هایی به ضلع ۱ متر تقسیم بندی کرده است.



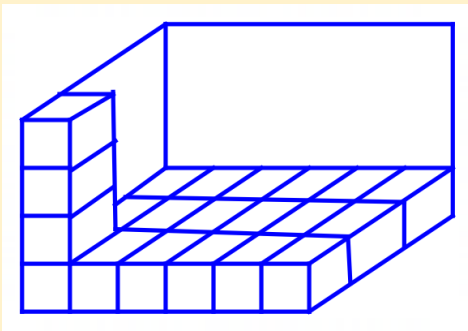
به نظر شما در ردیف اول چند کارتن را می شود در این انبار جای داد؟

کاملاً درست گفتید. به تعداد مربع هایی که در کف انبار کشیده شده است.

$$6 \times 3 = 18$$

تعداد این مربع ها چند تا است؟

همانطور که مشاهده می کنید تعداد مربع ها همان مساحت مستطیل است. پس در ردیف اول می توان ۱۸ کارتن قرار داد.



اگر تا سقف چهار ردیف کارتن روی هم قرار گرفته باشند. تعداد کارتن ها را چگونه می توان محاسبه کرد؟

در شکل مقابل تصور کنید که تا سقف کارتن ها چیده شده باشند.

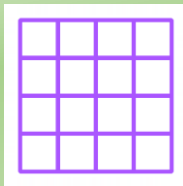
چون در هر ردیف ۱۸ کارتن قرار دارد پس تعداد کل کارتن ها را می توان

$$18 \times 3 = 54$$

بدین صورت حساب کرد.

در نتیجه کل فضای این انبار با ۷۲ کارتن به ضلع یک متر پر شده است.

تمرین (۱):



می خواهیم با مکعب های چوبی که اضلاع آنها ۱ سانتی متر است.

مربع مقابل را تا ۵ ردیف بچینیم. چند مکعب استفاده می شود؟

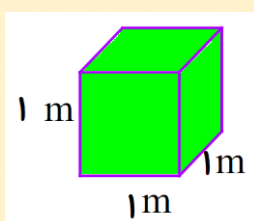
فعالیت :

همانطور که در تعریف حجم گفته شد، حجم فضایی است که شکل اشغال می کند. برای محاسبه حجم باید تعداد مکعب هایی که این فضا را پر می کند را حساب کنیم. اندازه ضلع این مکعب ها باید ۱ باشد. به این مکعب ها واحد حجم می گویند.

اگر واحد سانتی متر باشد. اندازه ضلع های این مکعب ۱ سانتی متر است، که آن را یک سانتی متر مکعب می گویند.



۱cm یعنی سانتی متر

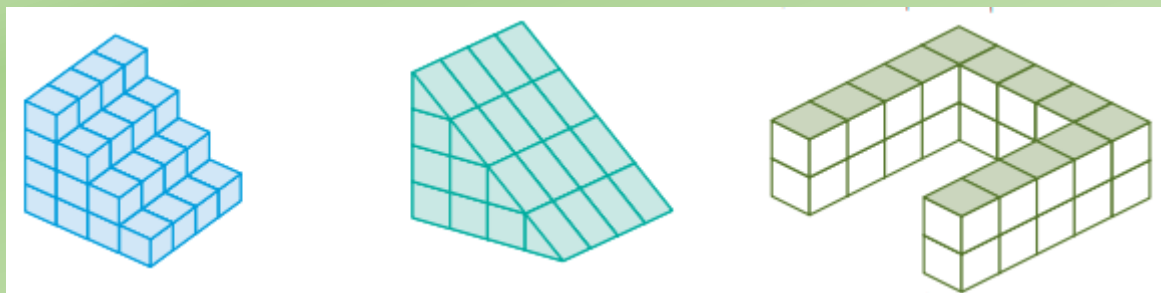


اگر واحد متر باشد. اندازه ضلع های این مکعب ۱ متر است، که آن را یک متر مکعب می گویند.

۱m یعنی متر

تمرین (۲):

حجم هر شکل چند سانتی متر مکعب است؟ (اندازه ضلع های هر مکعب ۱ سانتی متر است.)



فعالیت :

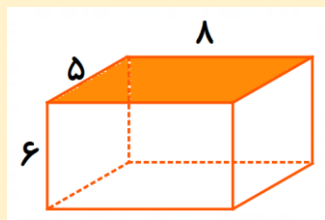
همانطور که در فعالیت قبل دیدید محاسبه حجم بستگی به مربع های کف شکل دارد، یعنی باید اول مساحت کف که از این به بعد قاعده می گوئیم حساب شود و بعد در تعداد ردیف هایی که روی هم چیده می شود ضرب کرد. تعداد این ردیف ها هم ارتفاع شکل نامیده می شود. یعنی :

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم}$$

حال اگر بخواهیم این رابطه را به صورت جبری بنویسیم. به شکل زیر می شود.

$$V = s.h \quad \text{یعنی حجم} \quad s \text{ یعنی مساحت قاعده} \quad h \text{ یعنی ارتفاع}$$

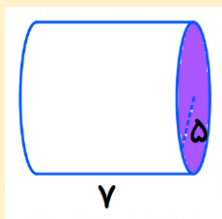
به شکل های زیر و چگونگی محاسبه حجم آنها دقت کنید. (همه اندازه ها به سانتی متر است.)



$$V = s.h$$

$$s = 5 \times 8 = 40$$

$$V = 40 \times 6 = 240 \quad \text{سانتی متر مکعب}$$

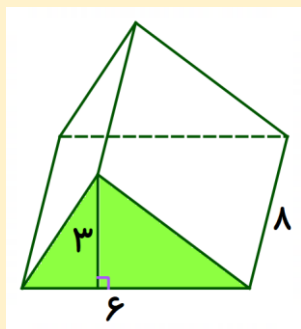


$$V = s.h$$

$$s = 5 \times 5 \times 3 = 75$$

(عدد π را تقریباً ۳ در نظر می گیریم.)

$$V = 75 \times 7 = 525 \quad \text{سانتی متر مکعب}$$



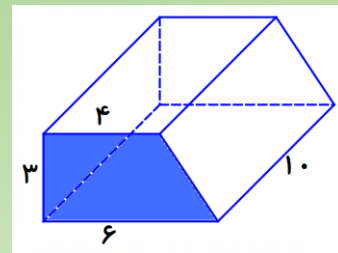
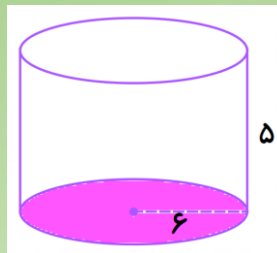
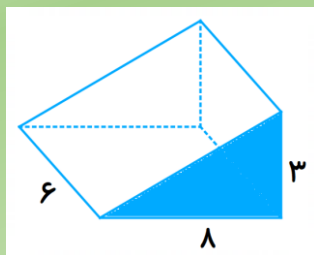
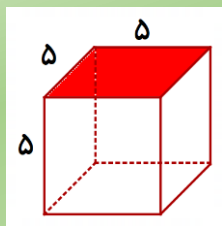
$$V = s.h$$

$$s = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

$$V = 9 \times 8 = 72 \quad \text{سانتی متر مکعب}$$

تمرین (۳):

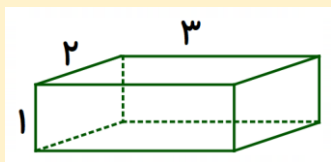
حجم شکل های زیر را به دست آورید. (اندازه ها به سانتیمتر است.)



فعالیت :

اهالی یک آپارتمان برای ساختمان خود منبع آبی به شکل مکعب مستطیل خریداری کرده اند. علی می خواهد حجم این منبع را به دست آورد. او با متر اندازه های این منبع را به دست آورد. اندازه ها ۳ و ۲ و ۱ متر بود. او چگونه می تواند حجم این منبع آب را به دست آورد؟

برای حل این مسئله بهتر است که شکل بکشیم و بعد محاسبه کنیم.



$$V = s.h$$

$$s = 2 \times 3 = 6$$

$$V = 6 \times 1 = 6 \quad \text{متر مکعب}$$

$$6 \times 1000 = 6000 \quad \text{لیتر}$$

البته می دانیم که هر متر مکعب حدود ۱۰۰۰ لیتر می شود. در نتیجه

شاید در این مسئله سوالی به ذهنتان برسد که چگونه هم مقدار s برابر ۶ شد و هم مقدار V برابر ۶ شد. ولی دقت داشته باشید که این دو عدد دو چیز کاملاً مجزا را نشان می دهند. s نشان دهنده مساحت قاعده است و واحد آن متر مربع است یعنی تعداد مربع های واحد در قاعده ۶ تا است. ولی V حجم است و واحد آن متر مکعب است، یعنی در این منبع ۶ تا مکعب واحد جای می گیرید.

تمرین (۴):

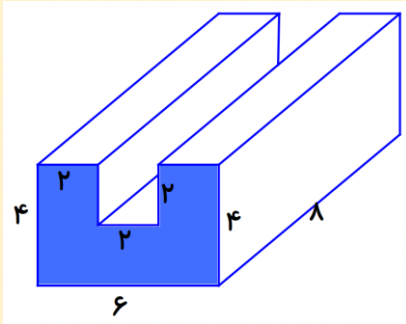
اداره آب و فاضلاب برای آبرسانی منطقه ای از شهر گرگان یک چاه عمیق حفر کرده است. اگر عمق چاه ۲۰ متر و شعاع دهانه چاه هم ۰/۵ متر باشد. حساب کنید چندمتر مکعب خاک از این چاه بیرون آورده شده است؟ ($\pi = ۳$)

تمرین (۵):

یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه ها در یک کارتن که به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتیمتر است، جا می گیرد؟

فعالیت :

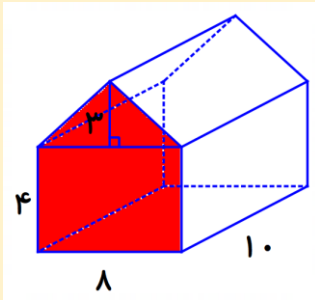
گاهی اوقات در محاسبه حجم با شکل هایی مواجه می شویم که ترکیبی هستند. در این موارد فقط در قسمت محاسبه مساحت قاعده باید دقت کنید. به مثال های زیر دقت کنید. (اندازه ها به سانتی متر است).



$$V = s.h$$

$$s = (4 \times 6) - (2 \times 2) = 24 - 4 = 20$$

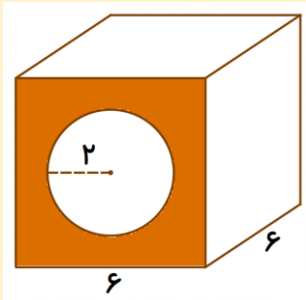
$$V = 20 \times 8 = 160 \text{ سانتی متر مکعب}$$



$$V = s.h$$

$$s = (4 \times 8) + \left(\frac{3 \times 8}{2}\right) = 32 + 12 = 44$$

$$V = 44 \times 10 = 440 \text{ سانتی متر مکعب}$$



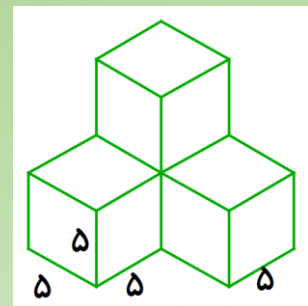
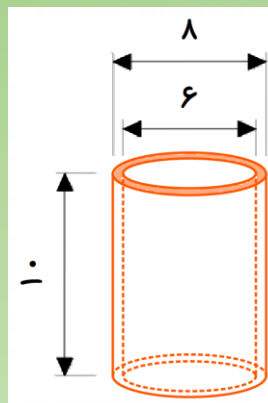
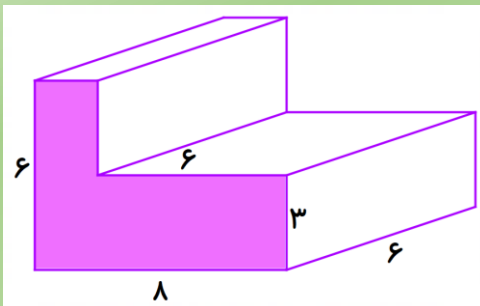
$$V = s.h$$

$$s = (6 \times 6) - (2 \times 2 \times 3) = 36 - 12 = 24$$

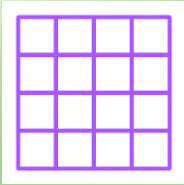
$$V = 24 \times 6 = 144 \text{ سانتی متر مکعب}$$

تمرین (۶):

حجم شکل های زیر را به دست آورید. (اندازه ها به سانتی متر است. $\pi = 3$)



تمرین (۱):



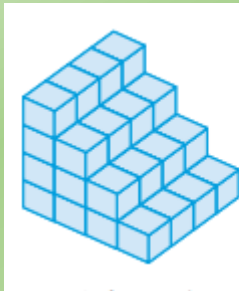
می خواهیم با مکعب های چوبی که اضلاع آنها ۱ سانتی متر است.

مربع مقابل را تا ۵ ردیف بچینیم. چند مکعب استفاده می شود؟

تعداد مربع های کف برابر است با $4 \times 4 = 16$ پس در ردیف اول ۱۶ مکعب قرار می گیرد و چون قرار است ۵ ردیف روی هم چیده شوند. در نتیجه $16 \times 5 = 80$ تعداد مکعب ها ۸۰ عدد است.

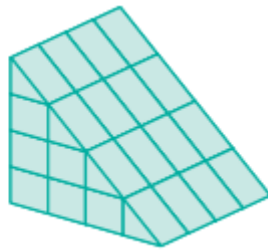
تمرین (۲):

حجم هر شکل چند سانتی متر مکعب است؟ (اندازه ضلع های هر مکعب ۱ سانتی متر است).



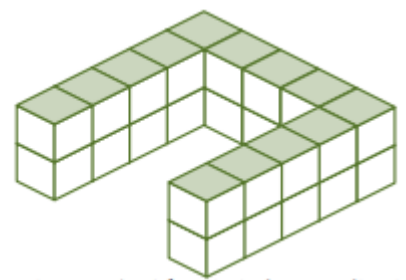
$$10 \times 4 = 40$$

سانتی متر مکعب



$$8 \times 4 = 32$$

سانتی متر مکعب

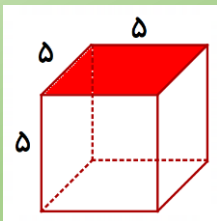


$$13 \times 2 = 26$$

سانتی متر مکعب

تمرین (۳):

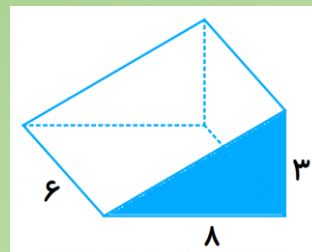
حجم شکل های زیر را به دست آورید. (اندازه ها به سانتیمتر است).



$$V = s.h$$

$$s = 5 \times 5 = 25$$

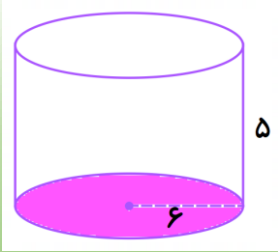
$$V = 25 \times 5 = 125 \text{ سانتی متر مکعب}$$



$$V = s.h$$

$$s = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

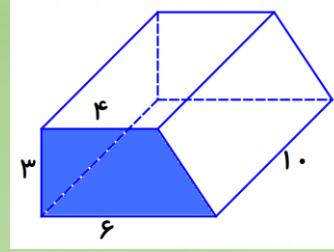
$$V = 12 \times 6 = 72 \text{ سانتی متر مکعب}$$



$$V = s.h$$

$$s = 6 \times 6 \times 3 = 108$$

$$V = 108 \times 5 = 540 \text{ سانتی متر مکعب}$$



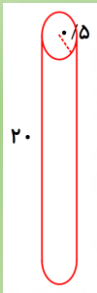
$$V = s.h$$

$$s = \frac{(4+6) \times 3}{2} = \frac{10 \times 3}{2} = 15$$

$$V = 15 \times 10 = 150 \text{ سانتی متر مکعب}$$

تمرین (۴):

اداره آب و فاضلاب برای آبرسانی منطقه ای از شهر گرگان یک چاه عمیق حفر کرده است. اگر عمق چاه ۲۰ متر و شعاع دهانه چاه هم ۰/۵ متر باشد. حساب کنید چند متر مکعب خاک از این چاه بیرون آورده شده است؟ ($\pi = 3$)



$$V = s.h$$

$$s = 0.5 \times 0.5 \times 3 = 0.75$$

$$V = 0.75 \times 20 = 15 \text{ متر مکعب}$$

تمرین (۵):

یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه ها در یک کارتن که به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتیمتر است، جا می گیرد؟

حجم دستمال کاغذی

$$V = s.h$$

$$s = 25 \times 12 = 300$$

$$V = 300 \times 5 = 1500 \text{ سانتی متر مکعب}$$

$$36000 \div 1500 = 24$$

حجم کارتن

$$V = s.h$$

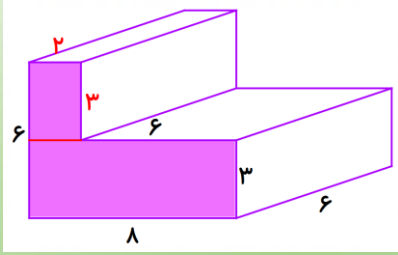
$$s = 50 \times 30 = 1500$$

$$V = 1500 \times 24 = 36000 \text{ سانتی متر مکعب}$$

۲۴ دستمال کاغذی در کارتن جای می گیرد.

تمرین (۶):

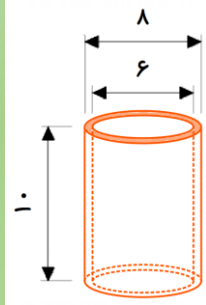
حجم شکل های زیر را به دست آورید. (اندازه ها به سانتی متر است. $\pi = ۳$)



$$V = s.h$$

$$s = (۸ \times ۳) + (۳ \times ۲) = ۲۴ + ۶ = ۳۰$$

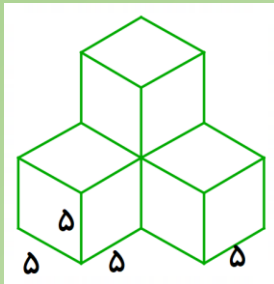
$$V = ۳۰ \times ۶ = ۱۸۰ \text{ سانتی متر مکعب}$$



$$V = s.h$$

$$s = (۴ \times ۴ \times ۳) - (۳ \times ۳ \times ۳) = ۴۸ - ۲۷ = ۲۱$$

$$V = ۲۱ \times ۱۰ = ۲۱۰ \text{ سانتی متر مکعب}$$

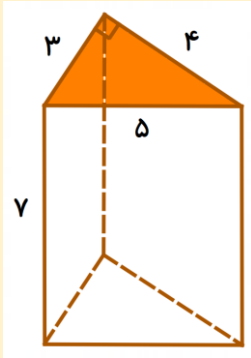


$$V = s.h$$

$$s = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

$$V = (۲۵ \times ۵) \times ۴ = ۱۲۵ \times ۴ = ۵۰۰ \text{ سانتی متر مکعب}$$

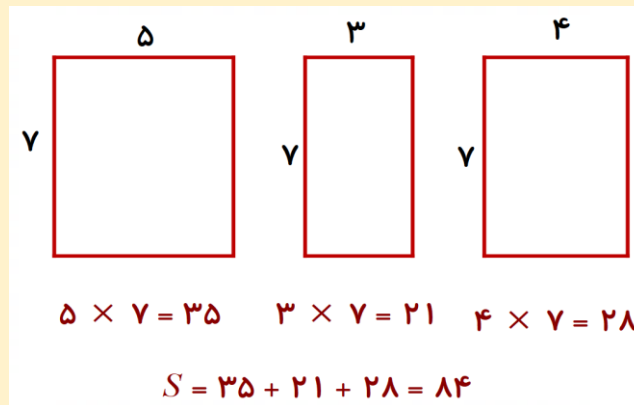
فعالیت :



در منشور مقابل می خواهیم مساحت وجه های جانبی را به دست آوریم.

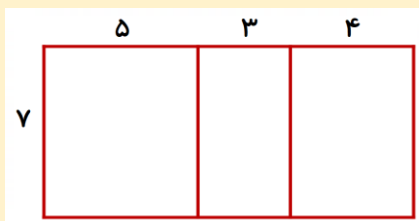
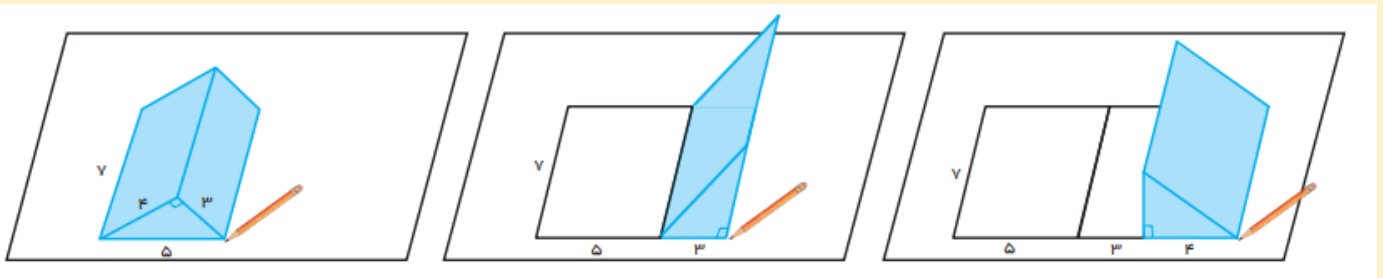
همانطور که می بینید همه وجه های جانبی مستطیل هستند. پس کافی است مساحت

مستطیل ها را به دست آوریم و با هم جمع کنیم.



به مجموع مساحت های وجه های جانبی «مساحت جانبی» می گویند.

برای به دست آوردن مساحت جانبی منشور سه پهلو بالا می توان به صورت زیر، آن را روی کاغذ قرار داد و به اندازه طول هر ضلع یک علامت گذاشت.



در این صورت علامت گذاری ها به صورت مستطیل زیر می شود.

$$5 + 3 + 4 = 12$$

طول این مستطیل چند است؟

$$7$$

عرض این مستطیل چند است؟

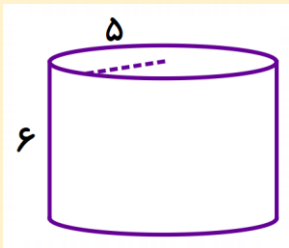
$$S = 12 \times 7 = 84$$

در نتیجه بسیار ساده می توان مساحت جانبی این منشور را حساب کرد.

همانطور که مشاهده می کنید. طول این مستطیل با دورتا دور مثلث قاعده برابر است و این همان محیط قاعده است.

پس می توان برای به دست آوردن مساحت جانبی از رابطه مقابل کمک گرفت. (ارتفاع \times محیط قاعده = مساحت جانبی)

$$S = P \times h$$



به عنوان مثال می خواهیم مساحت جانبی استوانه مقابل را به دست آوریم.

می دانیم که محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد π

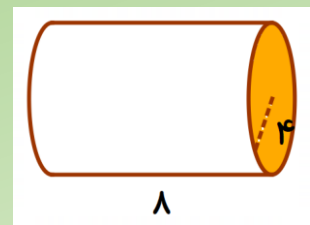
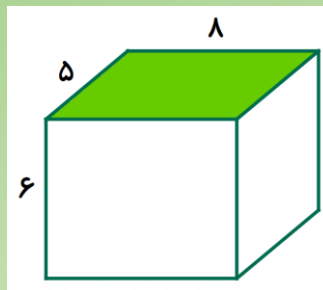
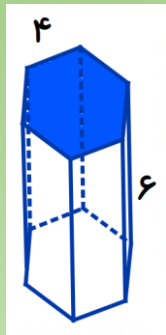
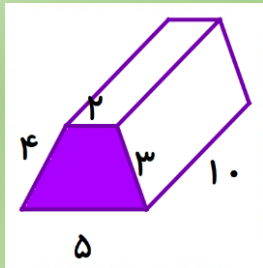
$$P = 2\pi r = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$S = P \times h = 30 \times 6 = 180$$

حال می توانیم مساحت جانبی را به دست آوریم.

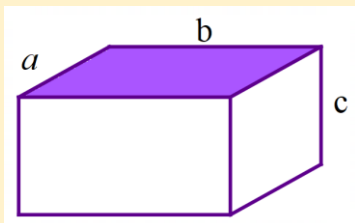
تمرین (۱):

مساحت جانبی هر کدام از منشور های زیر را به دست آورید.



فعالیت :

با توجه به اینکه شما عبارت های جبری را نیز آموخته اید می توانید مساحت جانبی را در شکل هایی مانند شکل زیر به صورت جبری نشان دهید.



$$P = a + b + a + b = 2a + 2b$$

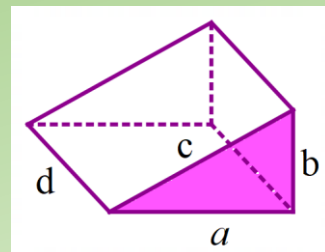
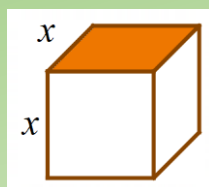
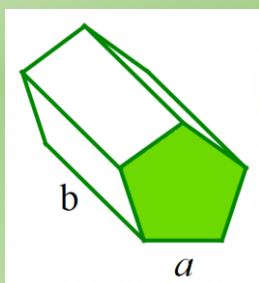
محیط قاعده:

$$S = P \times h = (2a + 2b)c$$

مساحت جانبی :

تمرین (۲):

مساحت جانبی شکل های زیر را به صورت جبری بنویسید.



فعالیت :



یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده باشد روی زمین ردی از خود به جای می گذارد.

با ۵ دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می کند تا خشک شود. اگر این چرخ

۲۰ سانتی متر ضخامت و قطر آن ۶۰ سانتی متر باشد. چه مساحتی از زمین را خیس

خواهد کرد؟

در این مسئله فقط کافی است مساحت جانبی استوانه را حساب کنید. دقت کنید که وقتی قطر برابر ۶۰ سانتی متر است. شعاع برابر ۳۰ سانتی متر می شود. ضمناً ارتفاع استوانه همان ضخامت لاستیک است.

$$P = 2\pi r = 2 \times 3 \times 30 = 180 \quad \text{مساحت جانبی:} \quad S = P \times h = 180 \times 20 = 3600$$

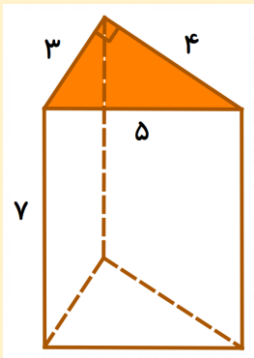
با توجه با این که مسئله گفته با ۵ بار چرخیدن مسیر را مشخص می کند ، در نتیجه : $3600 \times 5 = 18000$

مساحت رد مشخص شده ۱۸۰۰۰ سانتی متر مربع است.

تمرین (۳):

یک مخزن آب به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن ۵ متر و ارتفاعش ۴ متر است. می خواهیم بدنه خارجی آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه هر متر مربع رنگ ۱۵۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

فعالیت :



به همان منشور فعالیت اول برمی گردیم. مساحت جانب آن با توجه به رابطه زیر به دست آمد.

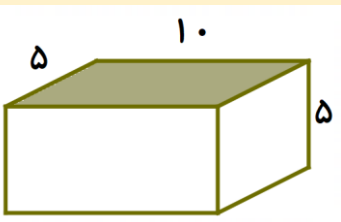
$$P = 3 + 4 + 5 = 12 \quad \Rightarrow \quad S = P \times h = 12 \times 7 = 84$$

حال اگر مساحت دو قاعده بالا و پایین را به این مساحت جانبی اضافه کنیم، «مساحت کل» به دست می آید. در منشور ها چون دو قاعده با هم برابر هستند. کافی است یکی را به دست آورده و دو برابر

$$s = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad 2s = 6 \times 2 = 12 \quad \text{مساحت قاعده ها:} \quad \text{کنیم.}$$

$$S = 84 + 12 = 96 \quad \text{مساحت کل:}$$

به عنوان مثال می خواهیم مساحت کل شکل مقابل را حساب کنیم.



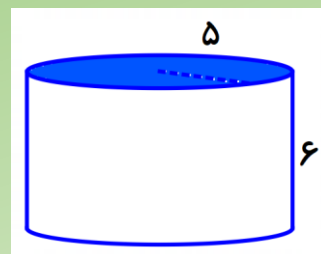
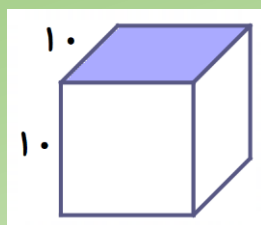
$$P = 5 + 10 + 5 + 10 = 30 \quad \Rightarrow \quad S = P \times h = 30 \times 5 = 150 \quad \text{مساحت جانبی:}$$

$$s = 5 \times 10 = 50 \quad \Rightarrow \quad 2s = 50 \times 2 = 100 \quad \text{مساحت قاعده ها:}$$

$$S = 150 + 100 = 250 \quad \text{مساحت کل:}$$

تمرین (۴):

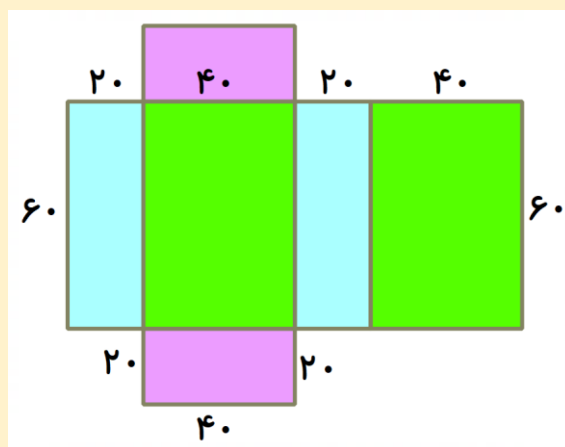
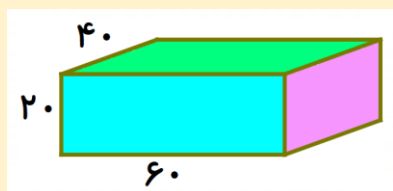
مساحت کل هر یک از شکل های زیر را به دست آورید.



فعالیت :

برای به دست آوردن مساحت کل از گسترده شکل ها هم می توان استفاده کرد. به مسئله زیر دقت کنید و ببینید که چگونه با کشیدن گسترده شکل مساحت کل آن محاسبه می شود.

« یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۲۰ و ۴۰ و ۶۰ سانتی متر را با کاغذ می پوشانیم. برای پوشاندن این جعبه حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ نیاز داریم؟



با مشاهده گسترده شکل می توان مساحت تمام مستطیل ها را به دست آورد و در نهایت همه را با هم جمع کرد. اگر بیشتر دقت کنید ، مستطیل ها دو به دو با هم برابرند.

$$20 \times 60 = 1200 \quad , \quad 1200 \times 2 = 2400$$

$$40 \times 60 = 2400 \quad , \quad 2400 \times 2 = 4800$$

$$20 \times 40 = 800 \quad , \quad 800 \times 2 = 1600$$

$$2400 + 4800 + 1600 = 8800$$

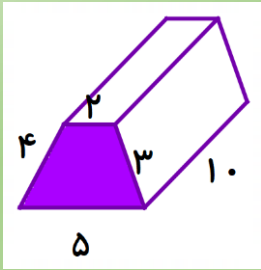
برای پوشاندن این مکعب مستطیل به ۸۸۰۰ سانتی متر مربع کاغذ نیاز داریم.

تمرین (۵):

برای کادو کردن یک جعبه به شکل مکعب که اندازه هر ضلع آن ۲۵ سانتی متر است، به چه مقدار کاغذ کادو نیاز داریم؟
(البته کاغذها روی هم نمی آیند.)

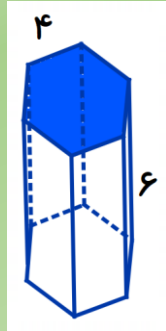
تمرین (۱):

مساحت جانبی هر کدام از منشور های زیر را به دست آورید.



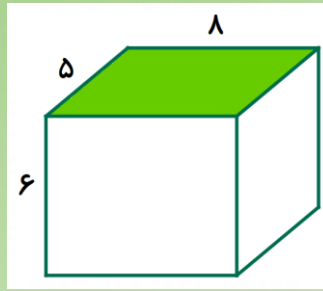
$$P = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$S = P \times h = 14 \times 10 = 140$$



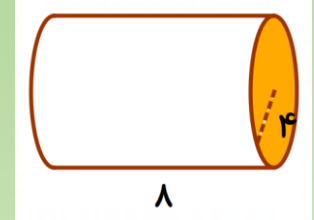
$$P = 4 \times 6 = 24$$

$$S = 24 \times 6 = 144$$



$$P = 5 + 8 + 5 + 8 = 26$$

$$S = 26 \times 6 = 156$$

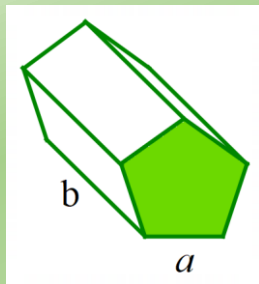


$$P = 2\pi r = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$S = 24 \times 8 = 192$$

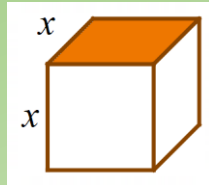
تمرین (۲):

مساحت جانبی شکل های زیر را به صورت جبری بنویسید.



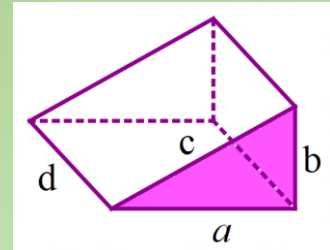
$$P = a + a + a + a + a = 5a$$

$$S = P \times h = 5ab$$



$$P = x + x + x + x = 4x$$

$$S = P \times h = 4xx$$



$$P = a + b + c$$

$$S = P \times h = d(a + b + c)$$

تمرین (۳):

یک مخزن آب به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن ۵ متر و ارتفاعش ۴ متر است. می خواهیم بدنه خارجی آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه هر متر مربع رنگ ۱۵۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

$$P = 2\pi r = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$S = P \times h = 30 \times 4 = 120$$

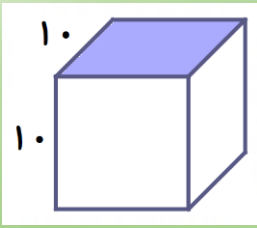
مساحت جانبی این مخزن ۱۲۰ متر مربع است.

$$120 \times 15000 = 1,800,000$$

هزینه رنگ کردن.

تمرین (۴):

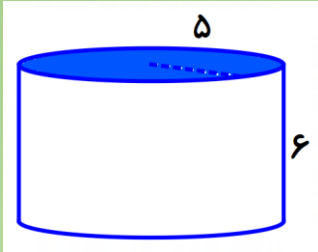
مساحت کل هر یک از شکل های زیر را به دست آورید.



$$P = 10 + 10 + 10 + 10 = 40 \Rightarrow S = P \times h = 40 \times 10 = 400 \quad \text{مساحت جانبی:}$$

$$s = 10 \times 10 = 100 \Rightarrow 2s = 100 \times 2 = 200 \quad \text{مساحت قاعده ها:}$$

$$S = 400 + 200 = 600 \quad \text{مساحت کل:}$$



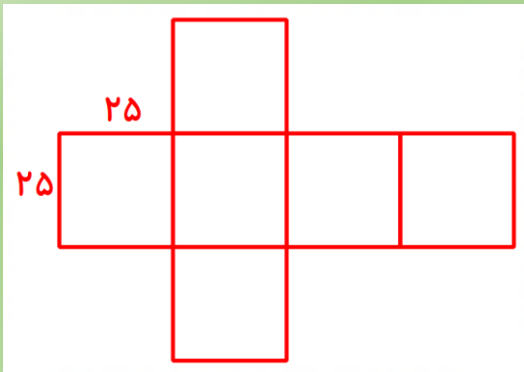
$$P = 2\pi r = 2 \times 3 \times 6 = 36 \Rightarrow S = P \times h = 36 \times 6 = 216 \quad \text{مساحت جانبی:}$$

$$s = \pi r^2 = 3 \times 3 \times 3.14 = 28.26 \Rightarrow 2s = 28.26 \times 2 = 56.52 \quad \text{مساحت قاعده ها:}$$

$$S = 216 + 56.52 = 272.52 \quad \text{مساحت کل:}$$

تمرین (۵):

برای کادو کردن یک جعبه به شکل مکعب که اندازه هر ضلع آن ۲۵ سانتی متر است، به چه مقدار کاغذ کادو نیاز داریم؟ (البته کاغذها روی هم نمی آیند.)

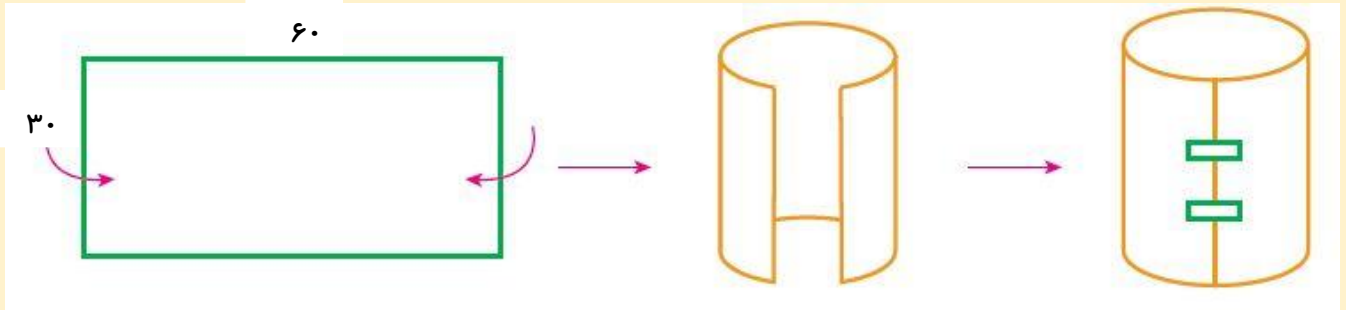


$$25 \times 25 = 625 \quad \text{مساحت یک مربع:}$$

$$S = 625 \times 6 = 3750 \quad \text{مساحت کل:}$$

فعالیت :

یک مستطیل به طول ۶۰ و ۳۰ سانتیمتر را مانند شکل زیر به یک استوانه تبدیل می کنیم. می خواهیم حجم استوانه را بدست آوریم.



همانطور که در شکل می بینید، عرض مستطیل همان ارتفاع استوانه است، یعنی $h = 30$ ولی برای به دست آوردن شعاع دایره قاعده کمی باید فکر کنیم. طول مستطیل با چه چیزی از قاعده برابر است؟ آفرین، با محیط قاعده برابر است. پس از طریق رابطه زیر می توانیم شعاع قاعده را پیدا کنیم.

$$P = 2\pi r \Rightarrow 2 \times 3 \times r = 60 \Rightarrow r = 10$$

حال با داشتن شعاع دایره و ارتفاع می توانیم حجم این استوانه را حساب کنیم.

$$V = Sh = (\pi r r)h \Rightarrow V = 3 \times 10 \times 10 \times 30 = 9000 \text{ سانتی متر مکعب}$$

دوباره همین کاغذ را این بار از طرف دیگر به صورت استوانه در می آوریم.

در این حالت ارتفاع استوانه با طول مستطیل برابر می شود، یعنی: $h = 60$
عرض مستطیل هم محیط دایره قاعده است، در نتیجه:

$$P = 2\pi r \Rightarrow 2 \times 3 \times r = 30 \Rightarrow r = 5$$

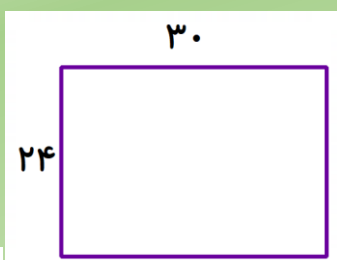
حجم در این حالت به صورت زیر محاسبه می شود.

$$V = Sh = (\pi r r)h \Rightarrow V = 3 \times 5 \times 5 \times 60 = 4500 \text{ سانتی متر مکعب}$$

اتفاق جالبی رخ می دهد. یک کاغذ با اندازه های مشخص و مساحت معین را وقتی در دو حالت به صورت استوانه تبدیل می کنیم، حجم های شان مختلف به دست می آید. به نظر شما علت این تفاوت چیست؟

تمرین (۱):

یک مستطیل به طول و عرض داده شده را به دو صورت لوله می کنیم تا استوانه به دست آید. حجم استوانه را در دو حالت به دست آورده و با هم مقایسه کنید.



فعالیت :

یک کارخانه تولید چای دو نوع بسته بندی به شکل های زیر ارائه می کند. هر دو نوع قوطی با ورق فلزی درست شده اند. می خواهیم بفهمیم در کدام نوع ورق فلزی کمتری استفاده شده است.



در این مسئله ما دو شکل داریم؛ مکعب مربع و استوانه. برای اینکه بفهمیم در هر کدام چقدر ورق فلزی استفاده شده است باید مساحت کل آنها را حساب کنیم. (البته فرض کنید همه قسمت ها از فلز ساخته شده است.)

الف) مکعب مربع:

$$P = 10 + 10 + 10 + 10 = 40 \quad \Rightarrow \quad S = P \times h \quad S = 40 \times 10 = 400$$

مساحت جانبی:

$$S = 10 \times 10 = 100 \quad 2S = 100 \times 2 = 200$$

مساحت قاعده ها:

$$S = 400 + 200 = 600$$

مساحت کل:

ب) استوانه:

$$P = 2\pi r \quad P = 2 \times 3 \times 5 = 30 \quad \Rightarrow \quad S = P \times h \quad S = 30 \times 10 = 300$$

مساحت جانبی:

$$S = \pi r^2 \quad S = 3 \times 5 \times 5 = 75 \quad \Rightarrow \quad 2S = 2 \times 75 = 150$$

مساحت قاعده ها:

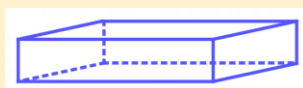
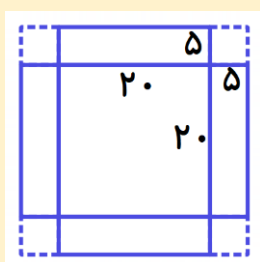
$$S = 300 + 150 = 450$$

مساحت کل:

همانطور که در محاسبات بالا مشاهده می کنید، در قوطی استوانه ای ورق فلزی کمتری استفاده شده است.

تمرین (۲):

در فعالیت قبل، کدام قوطی چای بیشتری در خود جای می دهد؟ (با توجه به حجم بررسی کنید.)



فعالیت :

برای بسته بندی شیرینی، جعبه هایی را درست می کنند. شکل گسترده این جعبه ها به صورت زیر است و پس از تا کردن مربع های کوچک گوشه ها روی هم قرار می گیرند و جعبه درست می شود. می توانیم حجم (گنجایش) این جعبه را پیدا کنیم.

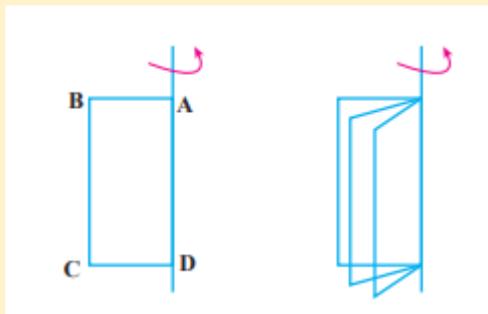
$$V = Sh \quad V = (20 \times 20) \times 5 = 2000 \text{ سانتی متر مکعب}$$

تمرین (۳):

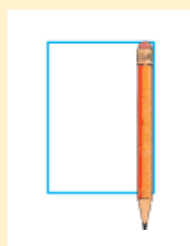
اگر به جای ۵ سانتی متر لبه ها را ۶ سانتیمتر در نظر بگیریم، جعبه ای که با همین مقوا ساخته می شود، حجم بیشتری دارد یا کمتر؟ ابتدا گسترده آن را رسم کنید و با محاسبه دلیل خود را نشان دهید. (دقت کنید که وقتی لبه ها یک سانتیمتر بیشتر می شوند از اندازه ضلع قاعده در دو طرف یک سانتیمتر کم می شود.)

فعالیت :

مستطیل ABCD را حول محوری که از AD می گذرد، دوران می دهیم. شکل زیر نشان می دهد که مستطیل ها چگونه حرکت می کنند.



شما هم مانند شکل مقابل کاغذی را روی مداد بچسبانید و آن را بچرخانید و حرکت مستطیل ها را تماشا کنید.



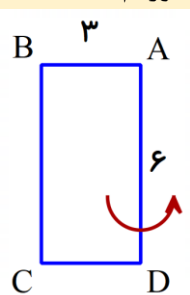
مشاهده می کنید که اگر سرعت چرخش شما بیشتر شود، شکل استوانه دیده می شود.

در این حالت آن بخشی که به مداد چسبیده ارتفاع استوانه می شود و ضلع دیگر مستطیل که در حال

چرخش است، شعاع دایره قاعده می گردد.

« با حرکت یک سطح در فضا، حجم ساخته می شود.»

مستطیل ABCD را حول محور AD دوران می دهیم. می خواهیم حجم شکل حاصل از دوران را به دست آوریم.

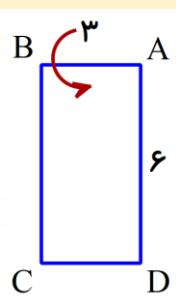


در این حالت چون مستطیل حول ضلع AD می چرخد، ارتفاع استوانه برابر 6 است

و همچنین شعاع دایره قاعده برابر 3 است. پس می توان به صورت زیر حجم آن را حساب کرد.

$$V = Sh \quad V = (\pi r r) \times h = (3 \times 3 \times 3) \times 6 = 162$$

حال همین مستطیل را حول AB دوران می دهیم. می خواهیم حجم استوانه را در این حالت محاسبه کنیم.



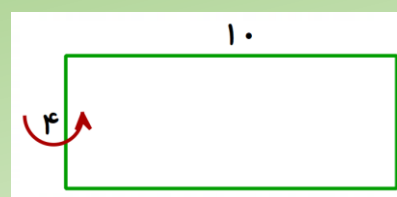
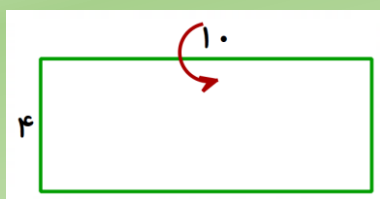
در این حالت ارتفاع استوانه حاصل از دوران برابر 3 و شعاع دایره قاعده برابر 6 است.

حجم استوانه حاصل به صورت زیر محاسبه می شود.

$$V = Sh \quad V = (\pi r r) \times h = (3 \times 6 \times 6) \times 3 = 324$$

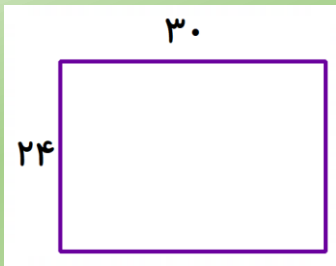
تمرین (4):

مستطیل زیر را در دو حالت دوران داده ایم، حجم استوانه حاصل از دوران را در هر حالت حساب کنید.



تمرین (۱):

یک مستطیل به طول و عرض داده شده را به دو صورت لوله می کنیم تا استوانه به دست آید. حجم استوانه را در دو حالت به دست آورده و با هم مقایسه کنید.



$$P = 2\pi r \Rightarrow 2 \times 30 \times r = 30 \Rightarrow r = 5 \quad \text{حالت اول:}$$

$$V = Sh = (\pi r r)h \Rightarrow V = (30 \times 5 \times 5) \times 24 = 1800 \text{ سانتی متر مکعب}$$

$$P = 2\pi r \Rightarrow 2 \times 30 \times r = 24 \Rightarrow r = 4 \quad \text{حالت دوم:}$$

$$V = Sh = (\pi r r)h \Rightarrow V = (30 \times 4 \times 4) \times 30 = 1440 \text{ سانتی متر مکعب}$$

تمرین (۲):

در فعالیت قبل، کدام قوطی چای بیشتری در خود جای می دهد؟ (با توجه به حجم بررسی کنید).

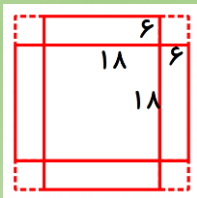
$$V = Sh \Rightarrow V = (10 \times 10) \times 10 = 1000 \text{ سانتی متر مکعب} \quad \text{قوطی مکعب:}$$

$$V = Sh = (\pi r r)h \Rightarrow V = (30 \times 5 \times 5) \times 10 = 750 \text{ سانتی متر مکعب} \quad \text{قوطی استوانه:}$$

قوطی به شکل مکعب حجم بیشتری دارد، در نتیجه چای بیشتری جای می گیرد.

تمرین (۳):

اگر به جای ۵ سانتی متر لبه ها را ۶ سانتیمتر در نظر بگیریم، جعبه ای که با همین مقوا ساخته می شود، حجم بیشتری دارد یا کمتر؟ ابتدا گسترده آن را رسم کنید و با محاسبه دلیل خود را نشان دهید. (دقت کنید که وقتی لبه ها یک سانتیمتر بیشتر می شوند از اندازه ضلع قاعده در دو طرف یک سانتیمتر کم می شود).

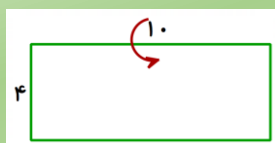


$$V = Sh \quad V = (18 \times 18) \times 6 = 1944 \text{ سانتی متر مکعب}$$

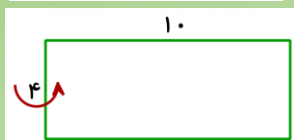
حجم کمتر می شود.

تمرین (۴):

مستطیل زیر را در دو حالت دوران داده ایم، حجم استوانه حاصل از دوران را در هر حالت حساب کنید.



$$V = Sh \quad V = (\pi r r) \times h = (3 \times 4 \times 4) \times 10 = 480$$



$$V = Sh \quad V = (\pi r r) \times h = (3 \times 10 \times 10) \times 4 = 1200$$