قواعد بخش پذیری:

بخش پذیری بر ۱: کلیه اعداد بر ۱ بخش پذیرند!

بخش پذیری بر ۲: عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن زوج (۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸) باشد و یا عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۲ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۴: عددی بر چهار بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن یا بر چهار بخش پذیر باشد یا ۰۰ باشد.

قاعده دوم این است که «رقم یکان + ۲ برابر رقم دهگان» بر ۴ قابل قسمت باشد.

مثال: عدد ۴۸۳۵۹۶ بر ۴ بخش پذیر است؛ زیرا $۲۴ = ۶ + (۲×۹)$ ، که ۲۴ هم بر ۴ بخش پذیر است.

قاعده سوم این است که اولا رقم یکان زوج باشد، ثانیا اگر رقم یکان ۲ یا ۶ بود، رقم دهگان فرد و در صورتی که رقم یکان ۰ ، ۴ یا ۸ بود، رقم دهگان زوج باشد.

بخش پذیری بر ۵: عددی بر پنج بخش پذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

بخش پذیری بر ۶: عددی بر شش بخش پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشد.

قاعده دوم این است که باید «رقم یکان + ۴ برابر مجموع ارقام دیگر»، بر ۶ قابل قسمت باشد.

مثال: عدد ۱۴۲۳۲ بر ۶ بخش پذیر است؛ زیرا $۴۲ = ۲ + ۴(۱۰) = ۲ + (۳ + ۲ + ۴ + ۱)۴$ ، که ۴۲ هم بر ۶ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۷: عددی بر هفت بخش پذیر است که اگر رقم یکان آن را دو برابر کنیم و از عددی که پس از حذف رقم یکان پدید می آید کم کنیم، حاصل برابر صفر یا مضربی از ۷ باشد. (در صورت لزوم این عمل را چندین بار تکرار می کنیم تا به نتیجه برسیم.)

مثال: عدد ۵۱۱ بر ۷ بخش پذیر است؛ زیرا $۴۹ = (۱×۲) - ۵۱$ ، و ۴۹ بر ۷ بخش پذیر است.

قاعده دوم: عددی (بیشتر از سه رقم) بر ۷ بخش پذیر است که در آن تفاوت مجموع سه رقمی های ردیف + با مجموع سه رقمی های ردیف – ، بر ۷ بخش پذیر باشد.

مثال: عدد ۳,۵۶۷,۷۷۷,۲۴۱ بر ۷ بخش پذیر است. زیرا:

–	+	–	+
۳	۵۶۷	۷۷۷	۲۴۱

$۲۴۴ = ۲۴۱ + ۳$ = مجموع – ها

$۸۰۸ = ۲۴۱ + ۵۶۷$ = مجموع + ها

$۲۸ = ۲۴۴ - ۸۰۸$ = تفاضل مجموع + ها و مجموع – ها

و ۲۸ بر ۷ بخش پذیر است؛ در نتیجه عدد ۳,۵۶۷,۷۷۷,۲۴۱ بر ۷ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۸: عددی بر هشت بخش پذیر است که سه رقم سمت راست آن یا بر هشت بخش پذیر باشد یا ۰۰۰ باشد.

قاعده دوم این است که «رقم یکان + ۲ برابر رقم دهگان + ۴ برابر رقم صدگان» بر ۸ قابل قسمت باشد.

مثال: عدد ۶۵۷۳۰۴ بر ۸ بخش پذیر است زیرا $۴(۳)+۲(۰)+۴=۱۶$ ، و ۱۶ بر ۸ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۹: عددی بر نه بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر نه بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۰: عددی بر ده بخش پذیر است که رقم یکان آن ۰ باشد.

بخش پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که اگر اعداد را از سمت راست به چپ یا از سمت چپ به راست، به صورت + و — نامگذاری کنیم و «+» ها را با هم و «-» ها را با هم جمع کنیم، تفاضل + ها و - ها، صفر یا مضربی از ۱۱ باشد.

مثال: عدد ۲۴۷۲۸۱۹ بر۱۱ بخش پذیر است؛ زیرا:

+	−	+	−	+	−	+
۵	۴	۷	۲	۸	۱	۹

مجموع – ها = $۴+۲+۱=۷$

مجموع + ها = $۵+۷+۸+۹=۲۹$

تفاضل مجموع + ها و مجموع - ها = $۲۹-۷=۲۲$

و ۲۲ بر ۱۱ بخش پذیر است؛ در نتیجه عدد ۲۴۷۲۸۱۹ بر ۱۱ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۱۲: عددی بر دوازده بخش پذیر است که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۳: عددی بر سیزده بخش پذیر است که اگر رقم یکان آن را چهار برابر کنیم و با عددی که پس از حذف یکان پدید می آید جمع کنیم، حاصل برابر صفر یا بر سیزده بخش پذیر باشد. (در صورت لزوم این عمل را چندین بار تکرار می کنیم تا به نتیجه برسیم.)

مثال: عدد ۱۴۳ بر ۱۳ بخش پذیر است؛ زیرا $۴(۳)+۱۴=۲۶$ ، و ۲۶ بر ۱۳ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۱۴: عددی بر چهارده بخش پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۷ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۵: عددی بر پانزده بخش پذیر است که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۶: عددی بر ۱۶ بخش پذیر است که چهار رقم سمت راست آن بر ۱۶ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۷: عددی بر هفده بخش پذیر است که که اگر رقم یکان را دو برابر کنیم و با سه برابر عددی که پس از حذف یکان پدید می آید جمع کنیم حاصل برابر صفر یا مضربی از ۱۷ باشد. (در صورت لزوم این عمل را چندین بار تکرار می کنیم تا به نتیجه برسیم.)

مثال: عدد ۳۲۳ بر ۱۷ بخش پذیر است؛زیرا $۲(۳)+۳(۳۲)=۶+۹۶=۱۰۲$ ودوباره داریم $۲(۲)+۳(۱۰)=۳۴$ و ۳۴ بر ۱۷ بخش پذیر است.

قاعده دوم: عددی بر ۱۷ بخش پذیر است که اگر رقم یکان آن را ۵ برابر کنیم و از عددی که پس از حذف یکان پدید می آید کم کنیم، حاصل برابر صفر یا بر سیزده بخش پذیر باشد. (در صورت لزوم این عمل را چندین بار تکرار می کنیم تا به نتیجه برسیم.)

مثال: عدد ۳۲۳ بر ۱۷ بخش پذیر است؛زیرا $۳۲-۵(۳)=۱۷$ ، و ۱۷ بر ۱۷ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۱۸: عددی بر ۱۸ بخش پذیر است که بر ۲ و ۹ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۹: عددی بر ۱۹ بخش پذیر است که اگر ۲ برابر رقم یکان آن را با عددی که از حذف یکان به دست آمده جمع کنیم، حاصل بر ۱۹ بخش پذیر باشد. (در صورت لزوم این عمل را چندین بار تکرار می کنیم تا به نتیجه برسیم.)

مثال: عدد ۴۳۷ بر ۱۹ بخش پذیر است؛ زیرا ۴۳ + ۲(۷) = ۵۷ ، و دوباره داریم: ۵ + ۲(۷) = ۱۹ ، و ۱۹ بر ۱۹ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۲۰: عددی بر ۲۰ بخش پذیر است که رقم یکان آن، صفر و رقم دهگان آن، زوج باشد.

بخش پذیری بر ۲۵: عددی بر ۲۵ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۲۵ بخش پذیر باشد. به عبارت دیگر، دو رقم سمت راست یکی از اعداد ۰۰ ، ۲۵ ، ۵۰ یا ۷۵ باشد.

اعداد اول و اعداد مرکب:

- اعداد اول دسته ای از اعداد طبیعی هستند که جز بر یک و خودشان بر هیچ عدد دیگری بخش پذیر نباشند. به عبارت دیگر هر عددی را که نتوان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک نشت، اول است.

- عدد یک، نه اول است نه مرکب.

- اعداد اول اعدادی هستند که توسط آن ها می توان تمام اعداد طبیعی به جز ۱ را تولید کرد. مجموعه اعداد اول را می توان سنگ زیر بنای تمام اعداد شحیح نامید و به همین جهت در زبان انگلیسی، کلمه ی Prime به معنای «بنیادی» را برای اعداد اول به کار می برند و مجموعه اعداد اول را به اختصار با حرف P نشان می دهند.

- اعداد اول در بین دانشمندان به بلوک های ساختمانی معروفند؛ زیرا هر عدد طبیعی بزرگ تر از یک را می توان به صورت حاصل ضرب اعداد اول نمایش داد.

چند نکته:

۱- به جز نخستین دو عدد اول متوالی ۲ و ۳، هیچ دو عدد اول دیگری متوالی نیستند.

۲- به جز عدد اول ۲ که زوج است، بقیه اعداد اول فرد هستند.

۳- به اعداد اولی که اختلاف آن ها ۲ واحد باشد، اعداد اول «دو قلو» می گویند. مثلا: ۳و۵ یا ۱۱و۱۳

۴- هر عدد طبیعی بزرگتر از یک، حداقل یک شمارنده ی اول دارد.

۵- مجموعه اعداد اول نامتناهی است. (بی نهایت عدد اول وجود دارد.)

۶- اگر n عددی مرکب باشد، آن گاه حداقل یک مقسوم علیه اول کوچک تر یا مساوی با $\sqrt{n}$ (جذر n) دارد.

چگونگی تعیین اول یا مرکب بودن یک عدد:

برای تعیین اول یا مرکب بودن یک عدد، بخش پذیری آن عدد را بر اعداد اول کوچک تر از جذر آن عدد آزمایش می کنیم. هرگاه عدد مورد نظر، حداقل به یکی از اعداد اول گفته شده بخش پذیر باشد، عددی مرکب است، در غیر این صورت اول است.

دانشمندان زیادی از روزگار باستان تا به امروز در مورد اعداد اول تحقیقاتی داشته اند که در زیر به مواردی اشاره می شود:

۱- «اویلر» ریاضیدان معروف، چند جمله ای $n^{۲}+n+۴۱$ را که n عددی طبیعی است، برای تولید اعداد اول پیشنهاد کرده است.

آیا این فرمول به ازای تمام اعداد طبیعی درست است؟ چرا؟

۲- «لژاندر» رابطه ی $۲n^{۲}+۲۹$ را برای تولید اعداد اول پیشنهاد کرد. این فرمول به ازای اعداد طبیعی $n=۱$ تا $n=۲۸$ اعداد اول را تولید می کند.

تجزیه به عامل های اول:

هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را که اول نباشد می توان به عامل های اول تجزیه کرد. به عنوان مثال ۱۵ را می توان به صورت ۵×۳ می توان نوشت. برای تجزیه یک عدد به عوامل اول، بر طبق قوانین بخش پذیری بر اعداد، به ترتیب آن را بر اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ... تقسیم می کنیم و خارج قسمت ها را در هر عملیات به طور ستونی زیر هم می نویسیم. وقتی خارج قسمت به عدد ۱ رسید، عملیات متوقف می شود و سپس آن عدد را با توجه به اعداد، می توان به صورت توانی نوشت.

مثال: عدد ۱۴۰ را به عوامل اول تجزیه کنید.

۱۴۰	۲
۷۰	۲
۳۵	۵
۷	۷
۱	

۱۴۰=۲×۲×۵×۷

نکته: اگر عددی به صفر ختم شود، در تجزیه این عدد، بهتر است که به ازای هر صفر در سمت راست، یک ۲ و یک ۵ نوشته و آن صفر را حذف کنیم.

مثال: عدد ۳۳۰۰ را به عوامل اول تجزیه کنید. ۳۳۰۰=۲×۲×۳×۵×۵×۱۱

کاربردهای تجزیه اعداد به حاصل ضرب عوامل اول:

۱- تعیین شمارنده های اول هر عدد:

مثال: شمارنده های اول عدد ۳۶ را تعیین کنید.

جواب: ۳۶=۲×۲×۳×۳ در نتیجه شمارنده های اول ۳۶ برابر ۲ و ۳ هستند.

۲- تعیین تعداد شمارنده های هر عدد:

اگر m عدد طبیعی باشد و به صورت $m = a^x \times b^y \times c^z \times ...$ به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه شود، تعداد شمارنده های m را با T(m) نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم.

$$\boxed{T(m) = (x+۱)(y+۱)(z+۱)...}$$

مثال: تعداد شمارنده های عدد ۲۰۰ را به دست آورید.

جواب: $۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$ در نتیجه داریم: $T(۲۰۰) = (۳+۱)(۲+۱) = ۴ \times ۳ = ۱۲$

۳- تعیین تعداد شمارنده های مرکب هر عدد:

۱ – تعداد شمارنده های اول – تعداد کل شمارنده ها = تعداد شمارنده های مرکب

مثال: تعداد شمارنده های مرکب عدد ۲۰۰ را به دست آورید

جواب: $۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$ در نتیجه داریم: $۱۲ - ۲ - ۱ = ۹$ = تعداد شمارنده های مرکب

۴- تعیین حاصل ضرب شمارنده های یک عدد:

حاصل ضرب شمارنده های عدد m از رابطه ی $\boxed{m^{\frac{T(m)}{۲}}}$ به دست می آید.

مثال: حاصل ضرب شمارنده های عدد ۱۰ را به دست آورید.

جواب: $۱۰ = ۲ \times ۵$ در نتیجه داریم: $T(۱۰) = (۱+۱)(۱+۱) = ۲ \times ۲ = ۴$ و حاصل ضرب شمارنده ها برابر است با: $۱۰^{\frac{۴}{۲}} = ۱۰^۲ = ۱۰۰$

۵- تعیین حاصل جمع شمارنده های یک عدد:

اگر m عدد طبیعی باشد و به صورت $m = a^x \times b^y \times c^z \times ...$ به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه شود، حاصل جمع شمارنده های m را با S نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم.

$$\boxed{S = \frac{a^{x+۱} - ۱}{a - ۱} \times \frac{b^{y+۱} - ۱}{b - ۱} \times \frac{c^{z+۱} - ۱}{c - ۱} \times ...}$$

مثال: مجموع شمارنده های عدد ۱۲۰ را تعیین کنید.

$$۱۲۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۱} \times ۵^{۱}$$

$$S = \frac{۲^{۳+۱} - ۱}{۲ - ۱} \times \frac{۳^{۱+۱} - ۱}{۳ - ۱} \times \frac{۵^{۱+۱} - ۱}{۵ - ۱} = \frac{۱۵}{۱} \times \frac{۸}{۲} \times \frac{۲۴}{۴} = ۱۵ \times ۴ \times ۶ = ۳۶۰$$

۶- تعیین بزرگ ترین شمارنده مشترک (ب.م.م) دو یا چند عدد:

ابتدا هر عدد را به عوامل اول تجزیه و سپس از رابطه زیر استفاده می کنیم.

حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر = ب.م.م

مثال: بزرگ ترین شمارنده مشترک ۲۴ و ۳۶ را به دست آورید.

$۳۶ = ۲^{۲} \times ۳^{۲}$ و $۲۴ = ۲^{۳} \times ۳$ ⇨ ب.م.م $= ۲^{۲} \times ۳ = ۱۲$

۷- تعیین کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو یا چند عدد:

ابتدا هر عدد را به عوامل اول تجزیه و سپس از رابطه زیر استفاده می کنیم.

حاصل ضرب عوامل غیر مشترک × حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بزرگ تر = ک.م.م

مثال: کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد ۲۴ و ۱۴۰ را به دست آورید.

$۱۴۰ = ۲^{۲} \times ۵ \times ۷$ و $۲۴ = ۲^{۳} \times ۳$ ⇨ ک.م.م $= ۲^{۳} \times ۳ \times ۵ \times ۷ = ۸۴۰$