« آنچه از مباحث فصل پنجم ریاضی هفتم آموختم. »

شمارنده ها و اعداد اوّل

نکته ۱- عدد ۱ شمارنده ی همهٔ اعداد است. $1 | n$

نکته ۲- عدد ۱ کوچکترین شمارنده ی هر عدد است. ۱۵ : ۱ و ۳ و ۵ و ۱۵

۱۸ : ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۸

نکته ۳- هر عدد شمارنده ی خودش است. $h | n$

نکته ۴- بزرگترین شمارنده ی هر عدد خودش است. $b | b$

نکته ۵- تنها شمارنده ی اول اعداد اول خودشان است. ۵ : ۱ و <u>۵</u> ۳ : ۱ و <u>۳</u>

نکته ۶- اعداد اوّل:

اعدادی هستند که فقط برخودشان و بر عدد ۱ بخش پذیراند به عبارت دیگر به عددهایی مثل ۵ و ۱۳ و ۷ که فقط دو شمارنده دارد و آن دو شمارنده، عدد ۱ و خود آن عدد است، عدد اول می گویند.

مثال: ۲ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ...

نکته ۷- دو عدد را نسبت به هم اوّل می گویند که بزرگترین شمارنده ی مشترک آنها عدد ۱ باشد.

نکته ۸- اعداد اوّل کوچکتر از ۴۰ عبارت اند از:

۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۹ و ۳۱ و ۳۷

نکته ۹- شمارنده های اوّل، عددهای اوّل هستند که با استفاده از حاصل ضرب آنها، می توان عددهای مختلفی را به دست آورد.

مثال: ۱۸ = ۳ × ۳ × ۲ ۱۲ = ۳ × ۲ × ۲

نکته ۱۰- همهٔ شمارنده های یک عدد آن عدد را می شمارند. مثال: ۱۴ : ۱ و ۲ و ۷ و ۱۴

نکته ۱۱- بعضی از عددها فقط ۲ شمارنده دارند. مثال: ۵ : ۱ و ۵

نکته ۱۲- هر عدد بزرگتر از عدد ۱ حداقل دو شمارنده دارد. مثال: ۷ : ۱ و ۷

نکته ۱۳- اگر عددی غیر از خودش و یک، شمارنده ی دیگری داشت، حتماً عدد اوّل نیست.

مثال: ۸ : ۱ و ۲ و ۴ و ۸

نکته ۱۴- مجموع دو عدد طبیعی فرد همیشه عددی زوج است. مثال: ۳ + ۷ = ۱۰

نکته ۱۵- مجموع دو عدد طبیعی زوج همیشه عددی زوج است. مثال: ۸ + ۴ = ۱۲

نکته ۱۶- مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد همیشه عددی فرد است. مثال: ۸ + ۳ = ۱۱

نکته ۱۷- هر عددی که به صورت ضرب دو عدد بزرگتر از یک نوشته نشده اوّل است.

مثال: ۵× ۱ = ۵

نکته ۱۸- عاد کردن:

هر عددی که سمت چپ خط باشد سمت راست خط را می شمارد یعنی سمت چپ شمارنده ی سمت راست است. ۴ | ۲

نکته ۱۹- عدد سمت راست خط باید یا بزرگتر از عدد سمت چپ خط باشد یا مساوی آن باشد و عدد سمت چپ خط باید یا کوچکتر از عدد سمت راست خط باشد یا مساوی آن باشد.

مثال: ۶ | ۶ ۶ | ۳

نکته ۲۰- اعداد مرکب:

اعدادی که غیر از ۱ و خودشان، شمارنده ی دیگری دارند به عبارتی دیگر: اعدادی هستند که حداقل سه مقسوم علیه (شمارنده) دارند.

مثال: اعداد مرکب کوچکتر از ۴۰ عبارت اند از:

۳۹ و۳۸ و ۳۶ و۳۵ و۳۴ و ۳۳ و۳۲ و۳۰ و۲۸ و۲۷ و۲۶ و ۲۵ و۲۴ و۲۲ و۲۱ و۲۰ و۱۸ و۱۶ و۱۵ و۱۴ و۱۲ و۱۰ و۹ و۸ و۶ و۴

نکته ۲۱- عدد ۱، نه اوّل است و نه مرکب. (بقیهٔ اعداد طبیعی یا اوّل هستند یا مرکب)

نکته ۲۲- تجزیه:

نوشتن یک عدد به صورت حاصل ضرب چند عدد اوّل را تجزیه می نامند. برای تجزیه کردن یک عدد آن قدر آن را بر اعداد اوّل تقسیم می کنیم تا به عدد ۱ برسیم.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۲۴۰ & ۲ \\ ۱۲۰ & ۲ \\ ۶۰ & ۲ \\ ۳۰ & ۲ \\ ۱۵ & ۳ \\ ۵ & ۵ \\ ۱ & \end{array} \Longrightarrow ۲۴۰ = ۲\times ۲\times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵$$

نکته ۲۳- به دست آوردن بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک (ب م م) از راه تجزیه:

وقتی اعداد را تجزیه کردیم، اعداد مشترکی را که در تجزیه ها وجود دارد درهم ضرب می کنیم تا « ب م م » دو عدد بدست آید. « ب. م. م » دو عدد را با نمادهای (a و b) یا $a \Pi b$ نشان می دهند.

مثال: حاصل عبارت ۱۸ Π ۲۴ را به دست آورید.

راه حل:

$$\begin{array}{r|l} ۲۴ & ۲ \\ ۱۲ & ۲ \\ ۶ & ۲ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Longrightarrow ۲۴ = \underline{۲}\times ۲\times ۲ \times \underline{۳}$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۸ & ۲ \\ ۹ & ۳ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Longrightarrow ۱۸=\underline{۲}\times\underline{۳}\times ۳$$

$$۲۴ \Pi ۱۸ = \underline{۲}\times\underline{۳} = ۶$$

نکته ۲۴- مضرب های صحیح یک عدد از ضرب آن عدد در عددهای صحیح بدست می آید.

مثال: مضارب صحیح ۴:   ...... ۱۲- و ۸- و ۴- و ۰ و ۴ + و ۸ + و ۱۲ + و ....

نکته ۲۵- مضرب های طبیعی یک عدد از ضرب آن عدد در اعداد طبیعی به دست می آید. مضرب های طبیعی را به اختصار مضرب می نامیم.

مثال: مضارب عدد ۵ را بدست آورید.   ..... و ۲۵ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۵ = مضارب عدد ۵

نکته ۲۶- شمارنده های یک عدد را مقسوم علیه های آن عدد نیز می گویند. بنابراین بزرگ ترین شمارنده های مشترک دو عدد، همان بزرگترین مقسوم علیه مشترک است که به اختصار « ب م م » می نویسند.

مثال: مقسوم علیه های (شمارنده های) عدد ۳۰ را بنویسید.   ۳۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۵ و۳ و ۲ و ۱: ۳۰

نکته ۲۷- کوچک ترین مضرب مشترک دوعدد، اوّلین مضرب مشترک آن دو عدد است که به اختصار « ک م م » دوعدد می نامیم. مضرب های مشترک بعدی را با داشتن اوّلین مضرب مشترک می توان پیدا کرد.
« ک م م » b و ۹ را اینگونه نمایش می دهیم: [a وb] یا a ∐ b

مثال: « ک. م. م » را به دست آورید.   ۶ = [۳ و ۲]

..... و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ : مضارب ۲

..... و ۱۲ و ۹ و ۶ و ۳ : مضارب ۳

نکته ۲۸- « ک . م . م » هیچ دو عددی یک نمی شود.

نکته ۲۹- به دست آوردن کوچک ترین مضرب مشترک « ک. م. م » از راه تجزیه:

وقتی اعداد را تجزیه کردیم، همهٔ اعدادی را که در تجزیه ها وجود دارد در هم ضرب می کنیم. اعداد مشترک را فقط یک بار ضرب می کنیم. به این ترتیب ک. م. م دو عدد را بدست می آوریم.

مثال: حاصل عبارت ۱۸ ∐ ۱۵ را بدست آورید.

۱۸	۲
۹	۳
۳	۳
۱	

⟹ ۱۸ = ۲ × <u>۳</u> × ۳

۱۵	۳
۵	۵
۱	

⟹ ۱۵ = <u>۳</u> × ۵

۱۵ ∐ ۱۸ = <u>۳</u> × ۵ × ۲ × ۳ = ۹۰

نکته ۳۰- اگر عدد زوج باشد، یکی از شمارنده های اوّلش دو است.

نکته ۳۱- تعداد عددهای اوّل بی پایان است.

نکته ۳۲- اگر دوعدد a و b اوّل باشند، ب. م. م آنها عدد ۱ می شود. مثال: ۱ = (۳ و ۲)

نکته ۳۳- اگر عددی بر عدد دیگر هم بخش پذیر باشد، عدد کوچکتر ب. م. م دو عدد است.

مثال: ۲ = (۴ و ۲)   ⟸   ۴ | ۲

نکته ۳۴- کوچکترین مقسوم علیه مشترک هر دوعدد ۱ است.

مثال: ۱۰ و ۵ و ۲ و ۱ : ۱۰ ‏‏ ‏ ۸ و ۴ و ۲ و ۱ : ۸

نکته ۳۵- « ک. م. م » دو عدد اول برابر حاصل ضرب آن هاست.

مثال: [a و b] = a b ‏ ‏ b : ۱ و b ‏ ‏ a : ۱ و a

نکته ۳۶- اگر عددی بر عدد دیگر بخش پذیر باشد، عدد بزرگتر « ک. م. م » دوعدد است.

مثال: [a و b] = b ‏ ‏ a | b

نکته ۳۷- اگر ب. م. م دوعدد ۱ باشد، ک. م. م آن دو عدد برابر حاصل ضرب دوعدد است.

مثال: [a و b] = a b ‏ ‏ (a و b) = ۱ ‏ ‏ a | a ‏ ۱ ‏ ‏ b | b ‏ ۱

نکته ۳۸- ب. م. م دو عدد شمارنده ی ک. م. م دو عدد است.

مثال: ۳۶ ÷ ۶ = ۶ ‏ ‏ [۱۲ و ۱۸] = ۳۶ ‏ ‏ ۱۲ = ۲ × ۲ × ۳

۶ | ۳۶ ‏ ‏ (۱۲ و ۱۸) = ۶ ‏ ‏ ۱۸ = ۲ × ۳ × ۳

نکته ۳۹- حاصل ضرب دوعدد برابر حاصل ضرب ک. م. م دوعدد است.

مثال: a . b = [a و b] × (a و b)

۵ × ۲ = [۵ و ۲] × (۵ و ۲)

نکته ۴۰- ک. م. م هر عدد با عدد ۱ برابر خود عدد است. ‏ ([۱ و n] = n)

مثال: [۵ و ۱] = ۵

نکته ۴۱- ک. م. م عددی با خودش برابر است با خود عدد. ‏ ([n و n] = n)

مثال: [۵ و ۵] = ۵

نکته ۴۲- برای بدست آوردن ک. م. م دو عدد می توانیم از این رابطه استفاده کنیم:

$$\text{«ک.م.م» دو عدد} = \frac{\text{حاصل ضرب دو عدد}}{\text{«ب. م. م» دو عدد}}$$

$$۳۶ \coprod ۵۴ = \frac{۳۶\times۵۴}{۳۶\prod ۵۴} = \frac{\cancel{۳۶}^{\,۲}\times۵۴}{\cancel{۱۸}_{\,۱}} = ۱۰۸$$

نکته ۴۳- به کمک تجزیه می توان شمارنده های اوّل هر عدد را پیدا کرد و تعداد شمارنده های یک عدد را مشخص کرد و تمام شمارنده های هر عدد را نوشت.

۴۰	۵
۸	۲
۴	۲
۲	۲
۱	

تعداد شمارنده ها: ۲ عدد (۲ و ۵) $۴۰ = ۲^{۳} \times ۵^{۱}$

مثال:

تمام شمارنده های عدد۴۰: ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ و ۲۰ و ۴۰

نکته ۴۴- اگر تجزیه عددی مانند ... × $m = A^{x} \times B^{y} \times C^{z}$ باشد، تعداد شمارنده های m را می توان از این رابطه کشف کرد. $T(m) = (x+۱)(y+۱)(z+۱)$

مثال: $(\cancel{۳+۱}^{\,۴}) \times (\cancel{۱+۱}^{\,۲}) = ۸$ $۴۰ = ۲^{۳} \times ۵^{۱}$

نکته ۴۵- اگر تجزیهٔ عددی مانند ... × $m = A^{x} \times B^{y} \times C^{z}$ باشد، مجموع شمارنده های m را از این رابطه بدست آوریم.

مثال: $$S = \frac{a^{x+۱}-۱}{a-۱} \times \frac{b^{y+۱}-۱}{b-۱} \times \frac{c^{z+۱}-۱}{c-۱} \times \dots$$

نکته۴۶- مجذورهای کامل، اعدادی هستند که شمارنده ی آنها فرد باشد. مثال: ۱۵ و ۵ و ۳ و ۱: ۱۵

نکته ۴۷- تعداد شمارنده های منفی یک عدد دقیقاً برابر با تعداد شمارنده های مثبت (طبیعی) آن است پس تعداد شمارنده های صحیح عدد m برابر است با: $m = ۲\,T(m)$

مثال: تعداد شمارنده های صحیح عدد ۲۸ را حساب کنید.

۲۸	۲
۱۴	۲
۷	۷
۱	

راه حل : $۲۸ = ۷^{۱} \times ۲^{۲}$

تعداد شمارنده های صحیح $T(۲۸) = (۲+۱)(۱+۱) = ۶ \Longrightarrow ۶ \times ۲ = ۱۲$

نکته ۴۸- شمارنده های حقیقی یک عدد:

تمام شمارنده های یک عدد به جز خودش را شمارنده های حقیقی آن می گویند.

مثال: ۱۲ : $\underbrace{\text{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶}}_{\text{شمارنده های حقیقی}}$ و ۱۲

نکته ۴۹- عدد کامل (تام) :

عددی است که با مجموع شمارنده های حقیقی اش برابر باشد. مثال: ۲۸ ۲۸ : $\underbrace{\text{۱ و ۲ و ۴ و ۷ و ۱۴}}_{\text{شمارنده های کامل}}$

نکته ۵۰- عدد ناقص:

عددی است که از مجموع شمارنده های حقیقی اش بزرگتر است. مثال: ۸ : $\underbrace{\text{۱ و ۲ و ۴}}$ و ۸

۱ + ۲ + ۴ = ۷ < ۸

نکته ۵۱- عدد زائد:

عددی است که از مجموع شمارنده های حقیقی اش کوچکتر باشد. مثال: ۱۲ : $\underbrace{\text{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶}}$ و ۱۲

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ = ۱۶ > ۱۲

نکته ۵۲- مجموع شمارنده های صحیح عدد m برابر صفر است.

نکته ۵۳- کوچکترین مضرب هر عدد خودش است.

نکته ۵۴- حاصل ضرب شمارنده های m برابر است با: $m = \frac{T(m)}{۲}$

نکته ۵۵- به دست آوردن ک. م. م به روش تجزیهٔ اعداد توان دار:

بعد از تجزیه اعداد، عامل های اول را به صورت اعداد توان دار می نویسیم سپس عامل های مشترک را با بیشترین توان در عامل های غیر مشترک ضرب می کنیم.

مثال: $[\text{۴۸} \text{ و } \text{۵۲}] = \text{۲}^{\text{۴}} \times \text{۳}^{\text{۱}} \times \text{۱۳}^{\text{۱}} = \text{۶۲۴}$

۴۸	۲
۲۴	۲
۱۲	۲
۶	۲
۳	۳
۱	

۵۲	۲
۲۶	۲
۱۳	۱۳
۱	

$\text{۵۲} = \text{۲}^{\text{۲}} \times \text{۱۳}^{\text{۱}}$ $\qquad$ $\text{۴۸} = \text{۲}^{\text{۴}} \times \text{۳}^{\text{۱}}$

نکته ۵۶- اگر « ک. م. م » a و b در « ب . م . م » b و a ضرب شود، انگار که a در b ضرب شده است.

مثال: $[a , b] \quad (a , b) \;=\; a\,b$

نکته ۵۷- ب. م. م a و b برابر است با a × b تقسیم بر ک. م. م b و a.

مثال: $(a , b) = \dfrac{a\,b}{[a , b]}$

نکته ۵۸- اگر a شمارنده ی b باشد، ب. م. م a و b برابر a و ک. م. م آنها برابر b است.

مثال: $a \mid b \Longrightarrow (a , b) = a \quad , \quad [a , b] = b$

نکته ۵۹- ب. م. م a و a برابر a و ک. م. م آنها برابر است با a.

مثال: $(a\ ,\ a) = a \quad , \quad [a\ ,\ a] = a$

نکته ۶۰- ک. م. م a و ۱ برابر a و ب. م. م آنها برابر ۱ است

مثال: $[a \text{ و } \text{۱}] = a \quad \text{و} \quad (a \text{ و } \text{۱}) = \text{۱}$

نکته ۶۱- ک. م. م b و a برابراست با ضرب آنها تقسیم بر ب. م. م b و a .

مثال: $[a\ ,\ b] = \dfrac{a\ b}{(a\ , b)}$

نکته ۶۲- اگر ب. م. م b و a برابر ۱ باشد b و a نسبت به هم اوّل اند یا متباین اند.

مثال: ۲ و ۳ نسبت به هم متباین اند یا نسبت به هم اوّل اند. $\Longrightarrow$ ۱ = (۳ و ۲)

نکته ۶۳- مضارب حسابی یک عدد:

از ضرب عدد در اعداد حسابی بدست می آید. مثال: ۴: ۰ و ۴ و ۸ و ۱۲ و ...

نکته ۶۴- کوچک ترین مضرب حسابی هر عدد صفر و کوچک ترین مضرب آن عدد خودش است.

مثال: مضارب حسابی عدد ۴ : ۰ و ۴ و ۸ و ۱۲ و ...

کوچکترین مضرب حسابی عدد ۴   کوچکترین مضرب عدد ۴

نکته ۶۵- مضارب آن عدد از خود آن عدد شروع می شوند و به صورت اعداد مرکب ادامه می یابند.

نکته ۶۶- اعداد مرکب مضرب اول ندارند. اعداد اول فقط یک مضرب اوّل دارند. (خودش)

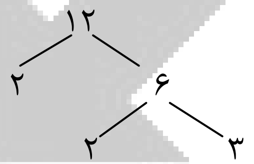
نکته ۶۷- مجموعه مضرب های هر عدد نامتنابی است یعنی تعداد عضوهایش قابل شمارش نیست.

نکته ۶۸- ب. م. م دو یا چند عدد، بزرگترین عدد طبیعی است که آن دو یا چند عدد برآن بخش پذیر اند.

نکته ۶۹- اگر $a \mid b$ و $b \mid C$ آنگاه a = (a و b و C)

نکته ۷۰- تجزیه به روش نمودار درختی:

مثال:



۱۲ = ۲ × ۲ × ۳

نکته ۷۱- اعداد متباین:

اگر دو عدد نسبت به هم اوّل باشند یعنی هیچ مقسوم علیه مشترکی غیر از ۱ نداشته باشند، می گوییم آن دو عدد نسبت به هم متباین هستند. مثال: دو عدد ۲۱ و ۱۰ متباین هستند.

« ب. م. م » دو عدد متباین، مساوی با عدد ۱ است و « ک. م. م » دو عدد متباین برابر با حاصل ضرب آن دو عدد می باشد.

نکته ۷۲- دو عدد متوالی، همیشه متباین هستند. مثال: اعداد ۲۵ و ۲۶ متباین هستند.

نکته ۷۳- اگر عدد a بر عدد b بخش پذیر باشد، داریم:

$$\begin{cases} a \prod b = b \\ a \coprod b = b \end{cases}$$

مثال: ۳۶ بر ۱۲ بخش پذیر است و داریم:

$$\begin{cases} ۳۶ \prod ۱۲ = ۱۲ \\ ۳۶ \coprod ۱۲ = ۳۶ \end{cases}$$

نکته ۷۴- یکی از مهمترین کاربردهای « ک. م. م » در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر است، یعنی کوچک ترین عددی را پیدا می کنیم که به هر دو مخرج بخش پذیر یا قابل قسمت باشد.

مثال:

$$\frac{۵}{۶} + \frac{۴}{۹} = \frac{۱۵+۸}{۱۸} = \frac{۲۳}{۱۸}$$

$$[۶ \text{ و } ۹] = ۱۸$$