فصل ۴ هندسه و استدلال

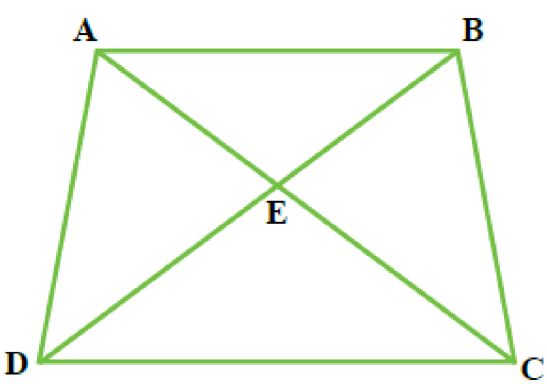
در علم ریاضیات برای نامگذاری شکل ها و خطوط از حروف کوچک و بزرگ انگلیسی استفاده میکنیم.

❖ تساوی بین پاره خط ها

هر گاه در اشکال هندسی اعم از چهار ضلعی ها ،مثلث ها و چند ضلعی ها دو یا چند پاره خط از نظر اندازه با یکدیگر برابر باشند ، اصطلاحا بین آن دو یا چند پاره خط ها حالت تساوی بر قرار است.

نکته 1 : عملیات جمع و تفریق برای پاره خط ها هم ، همانند اعداد صادق و انجام شدنی است. (البته با داشتن اندازه هر کدام از پاره خط ها)

به عنوان مثال در شکل رو به رو روابط زیر بر قرار است :



1- AE = BE

2- DE = EC

3- AD = BC

4- AE + EC = AC و BE + ED = DE

5- BD – BE = ED و AC – AE = EC

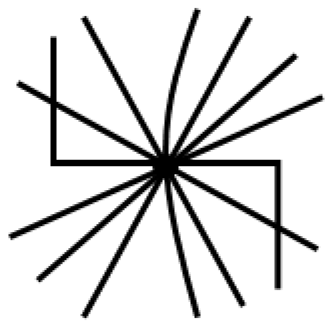
نکته 2 : عملیات جمع و تقسیم هم برای پاره خط ها هم ، همانند اعداد صادق و انجام شدنی است. (البته باز هم با داشتن اندازه هر کدام از پاره خط ها)

به عنوان مثال در پاره خط رو به رو روابط زیر بر قرار است (نقطه M وسط AB است.) :

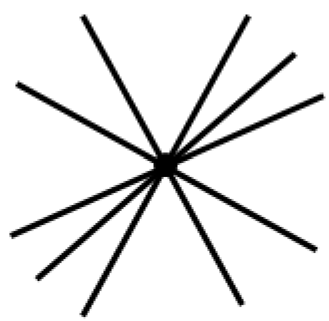
1– $AB = 2MB$ 2– $\frac{AM}{MB} = 1$

❖ نکاتی در مورد نقطه و خط

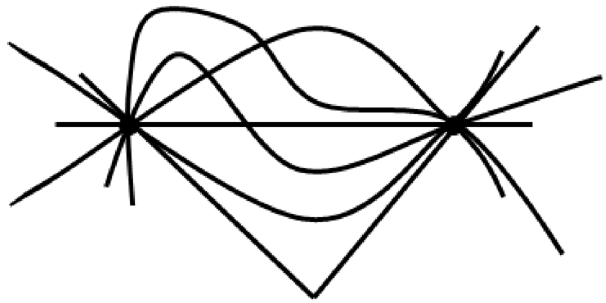
1– از یک نقطه بی نهایت خط می گذرد.



2– از یک نقطه بی نهایت خط راست می گذرد.

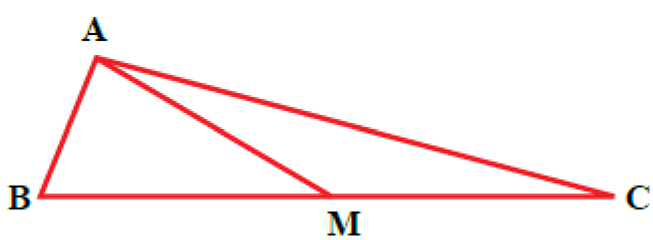


3- از دو نقطه بی نهایت خط(از انواع مختلف) می گذرد.

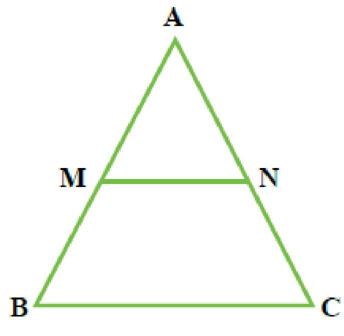


4- از دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد.

. تمرین : با توجه به شکل رو به رو ، اندازه گیری هر کدام از پاره خط ها را انجام داده و هر تعداد رابطه درست که بین آنها میبینید را بنویسید.



. تمرین : با توجه به شکل رو به رو ، مثلث ABC متساوی الاضلاع می باشد ، نقاط M و N وسط اضلاع خودشان هستند ، آیا مثلث AMN هم متساوی الاضلاع است؟



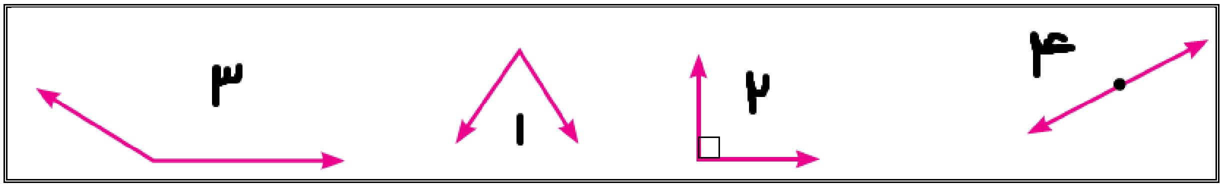
❖ انواع زاویه ها (یاد آوری)

1- زاویه حاده (که مقدار آن بین صفر تا 90 درجه است.)

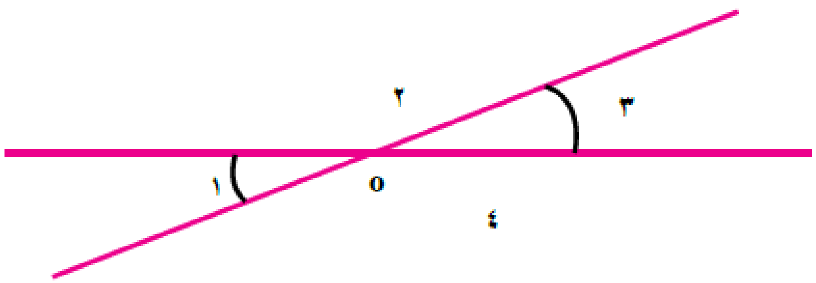
2- زاویه 90 درجه که به زاویه قائمه هم معروف است.

3- زاویه منفرجه (که مقدار آن بین 90 تا 180 است.)

4- زاویه 180 درجه (یک مانند یک پاره خط صاف است)

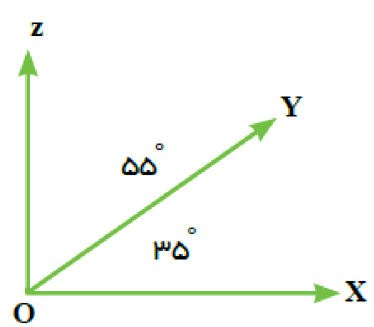


5- زوایای متقابل به راس ، زوایای 1 و 3 باهم و زوایای 2و 4 با هم متقابل به راس هستند و از نظر اندازه با هم برابرند. (مانند شکل زیر)

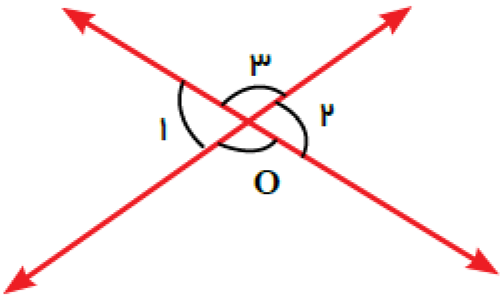


6- زاویه متمم : اگر مجموع دو زاویه 90 درجه باشد ، آن دو زاویه را زوایای متمم می نامیم.

(مانند دو زاویه ZOY و YOX که مجموعشان 90 درجه است)



7- زاویه مکمل : اگر مجموع دو زاویه 180 درجه باشد ، آن دو زاویه را زوایای مکمل می نامیم.(در واقع آن دو زاویه مکمل و کامل کننده یکدیگر برای رسیدن به مقدار 180 درجه می باشند.) ، مانند شکل روبرو :

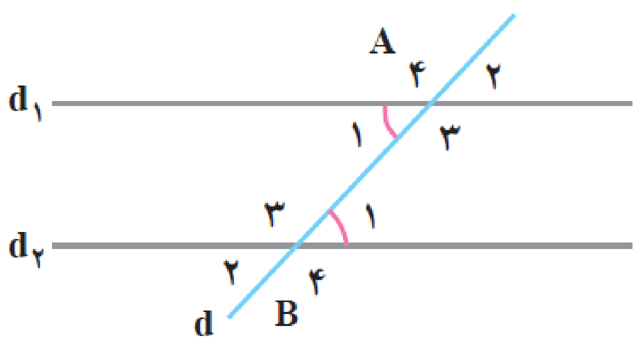


. سوال : راستی در شکل بالا چه زوایایی مکمل یکدیگرند؟

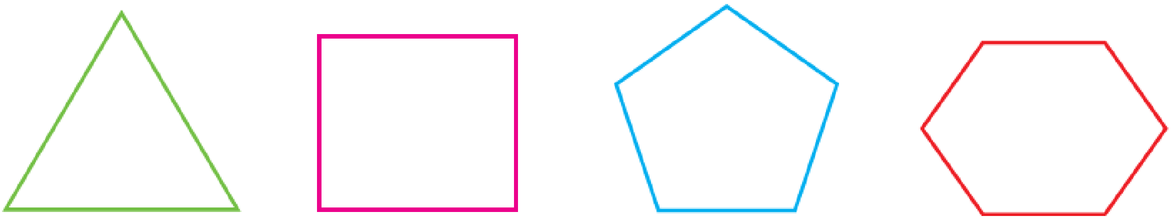
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_3=\underline{180^\circ}\\ \hat{O}_2+\hat{O}_3=\underline{180^\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\widehat{O_1}} = \underline{\widehat{O_2}}$$

8- اگر دو خط موازی را یک خط موربی قطع کند ، هشت زاویه ایجاد میشود که چهار تای آن را زوایای حاده و چهار تای آن را زوایای منفرجه تشکیل می دهند. (چهار زاویه حاده با یکدیگر برابرند ، چهار زاویه منفرجه با یکدیگر برابرند.)

در شکل زیر دو خط d_1 و d_2 با یکدیگر موازی هستند و خط مورب d آنها را قطع کرده است. که روابط $A_1 = A_2 = B_1 = B_2$ و $A_3 = A_4 = B_3 = B_4$ بر قرار است.



9- در چند ضلعی های زیر که به چند ضلعی های منتظم معروف هستند ، همه زوایای داخل هر کدام از شکل ها و اضلاعشان با هم برابر می باشند.

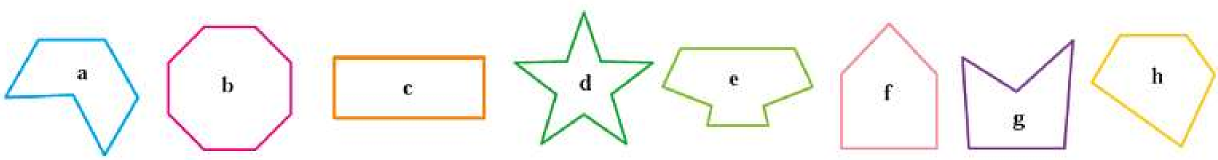


هریک از شکل‌های زیر یک چندضلعی‌اند.

چندضلعی‌هایی که هیچ زاویهٔ بزرگ‌تر از 180° ندارند، محدّب نامیده می‌شوند.

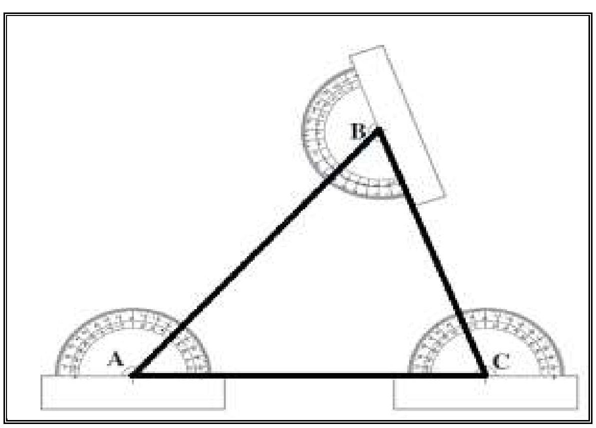
به چند ضلعی‌ای که دست کم یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 180° داشته باشد، چندضلعی مقعر می‌گویند.

چندضلعی‌های مقعر (کاو) و محدّب (کوژ) را در شکل زیر مشخص کنید.



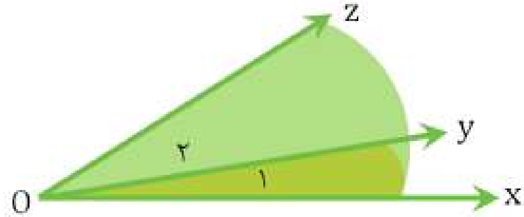
❖ **مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180 درجه می باشد.**

به عنوان مثال ، شکل زیر نشان می دهد که C = 70 و B = 60 و A = 50 می باشد. (مقادیر بر حسب درجه می باشند.) پس A + B + C = 180 می باشد.

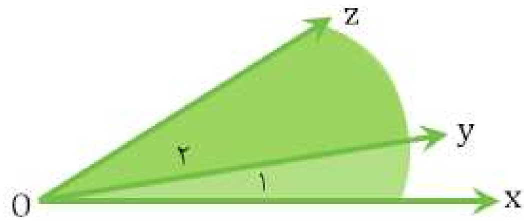


. شکل های زیر طریقه جمع بستن ریاضی زوایا را نشان می دهد :

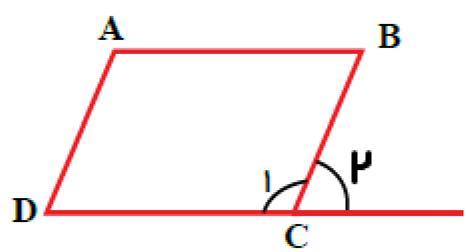
$\widehat{xOy}+\widehat{yOz}=\widehat{xOz}$



$\widehat{xOz}-\widehat{yOx}=\widehat{zOy}$

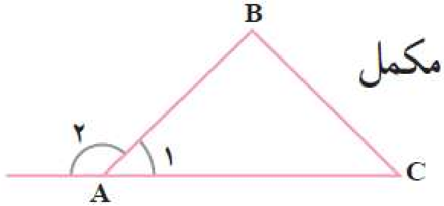


. زاویه خارجی : در شکل زیر ضلع DC در خارج از چهار ضلعی ABCD امتداد داده شده است و با ضلع BC تشکیل زاویه ای به نام C_2 را می دهد که به این زاویه ، زاویه خارجی می گویند که مجموع آن با زاویه C_1 برابر با 180 درجه میشود. پس دو زاویه C_1 و C_2 مکمل یکدیگر هستند.



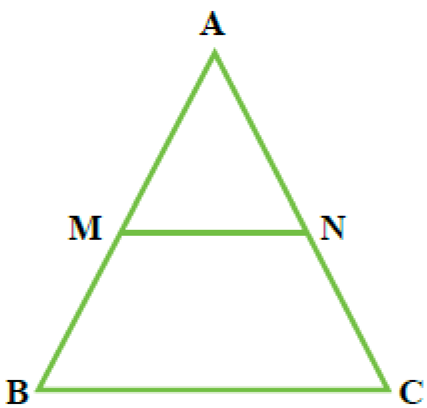
نکته بسیار مهم : به طور کلی در هر مثلث ، اندازه هر زاویه خارجی از مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن بدست می آید.

به عنوان مثال در شکل زیر ، زاویه A_2 از مجموع دو زاویه B و C بدست می آید.

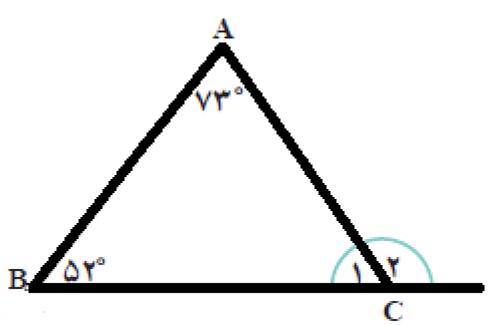


$$\left.\begin{array}{ll}\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ & \text{مجموع زاویه‌های مثلث}\\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ & \text{زاویه‌های مکمل}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

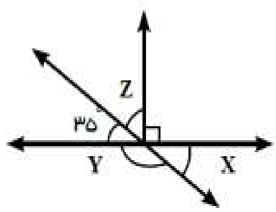
. تمرین : مثلث ABC متساوی الاضلاع است. با توجه به شکل چهار تا از روبط بین زوایای موجود در این مثلث را بنویسید. (نقاط M و N در وسط اضلاع خودشان هستند.)

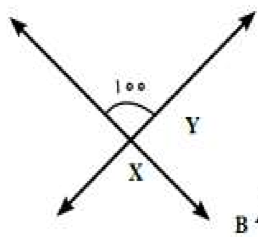


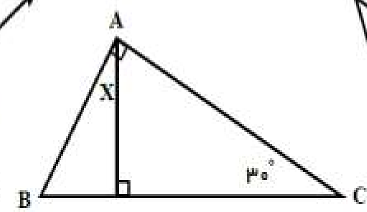
. تمرین : با توجه به مثلث زیر مقادیر زوایای C را بدست آورید.

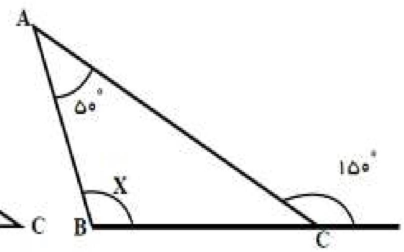


. تمرین : اندازه زوایای x و y را در شکل های زیر بیابید.

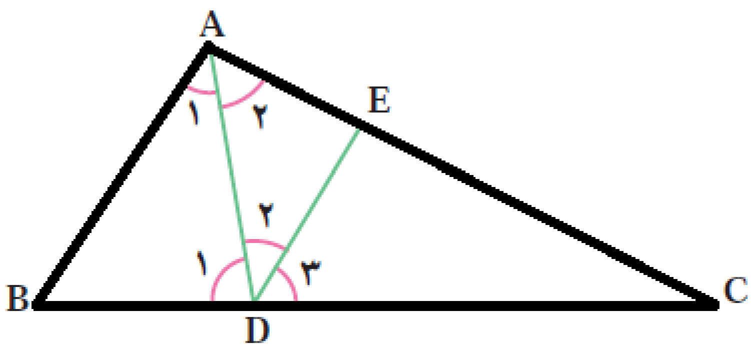




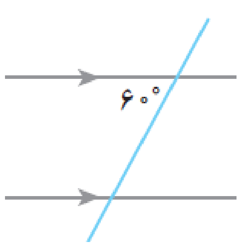


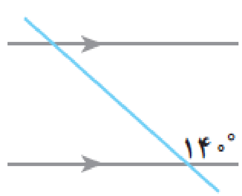


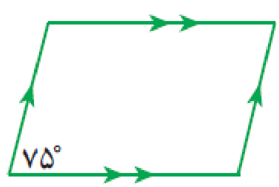
. تمرین : در شکل زیر DE موازی AB است ، کدام زاویه ها با هم برابرند؟

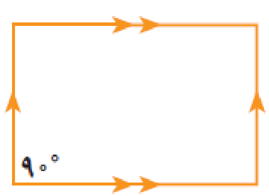


. تمرین : در شکل های زیر اندازه هر کدام از زوایا را در داخل شکل خودش بنویسید.









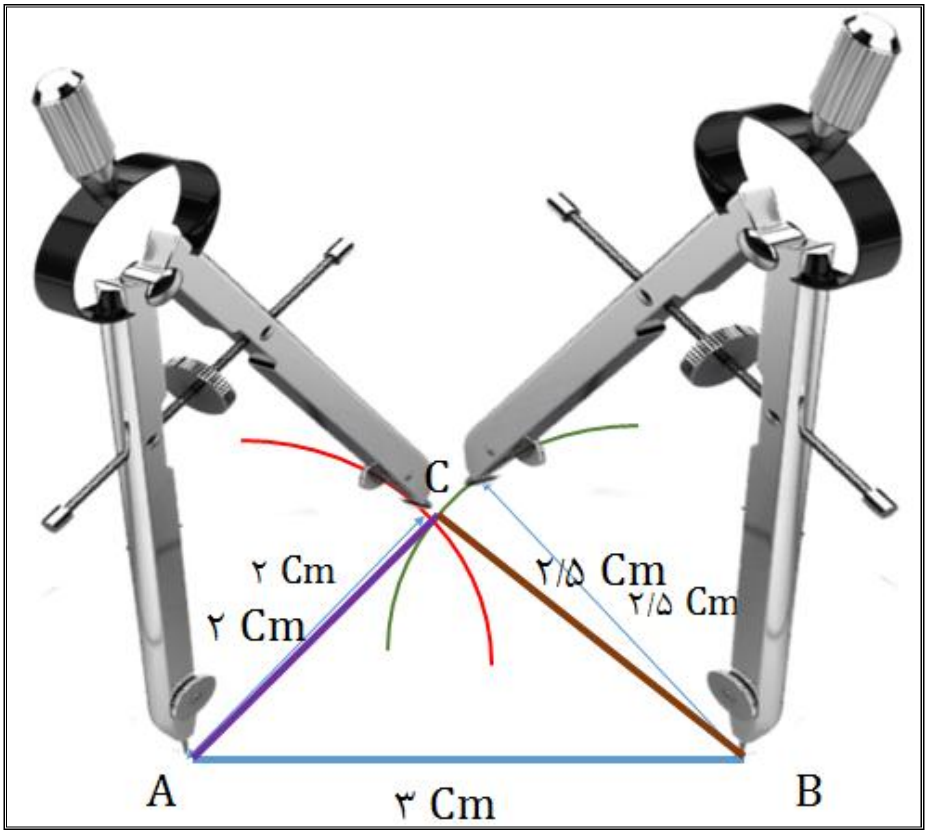
❖ ترسیم مثلث

برای ترسیم یک مثلث باید به نکات زیر توجه نمود :

1- با داشتن یک پاره خط و نقاط ابتدا و انتهای آن و داشتن پرگار میتوان یک مثلث را رسم نمود.

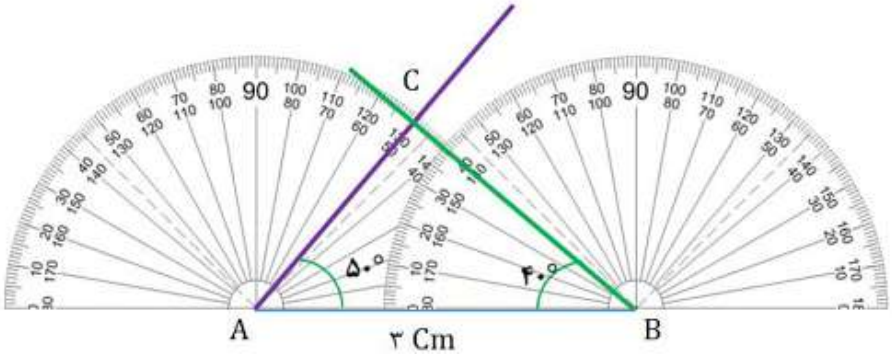
توضیح : بدین صورت که اگر در سوال مورد نظر ، اندازه اضلاع داده شده باشد ، دهانه پرگار را به همان اندازه باز می کنیم و بر روی یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی پاره خط قرار می دهیم و کمانی را رسم نموده و در مرحله بعدی هم همین کار را بر روی نقطه دیگر آن پاره خط انجام می دهیم و محل اتصال دو کمان رسم شده با پرگار را به نقاط ابتدایی و انتهایی پاره خط اولیه وصل می کنیم و مثلث رسم می شود.

به عنوان مثال ، پاره خط AB به طول 3 سانتی متر را در نظر بگیرید ، میخواهیم مثلثی با اضلاع 2 ، 2.5 ، 3 سانتی متر را رسم نماییم. مشخص است که یکی از اضلاع را در همین ابتدای امر داریم (AB = 3) ، ابتدا دهانه پرگار را به اندازه 2 سانتی متر باز نموده و آن را روی راس A قرار می دهیم و کمانی را رسم می کنیم و سپس دهانه پرگار را به اندازه 2.5 سانتی متر باز نموده و نوک آن را بر روی راس B قرار می دهیم و سپس کمانی را رسم می کنیم و محل اتصال دو کمان را به نقاط ابتدا و انتهای پاره خط یعنی نقاط (A و B) وصل می کنیم و مثلث را رسم می کنیم.



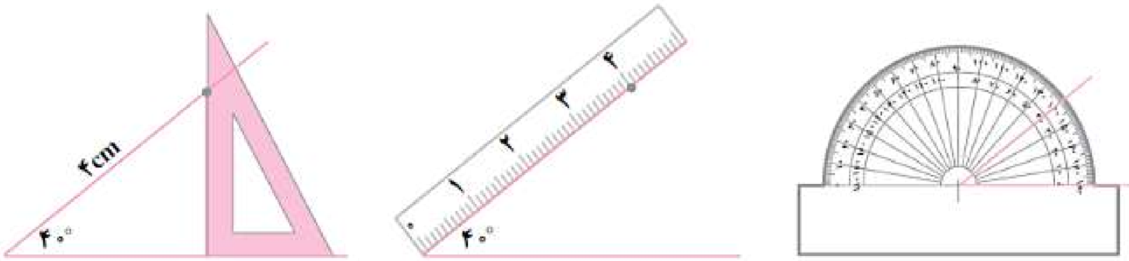
2- ترسیم مثلث با استفاده از اندازه دو زاویه و یک پاره خط

برای این کار ابتدا پاره خط داده شده را رسم نموده و سپس با قرار گیری نقاله روی یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی پاره خط (نقاط A یا B) ، یکی از زوایای داده شده در سوال (40 درجه یا 50 درجه) را جدا نموده و برای زاویه دیگر هم ، همین کار را انجام می دهیم و محل برخورد دو زاویه رسم شده را به نقاط ابتدایی و انتهایی پاره خط وصل نموده و مثلث را رسم می کنیم.



3- ترسیم مثلث قائم الزاویه

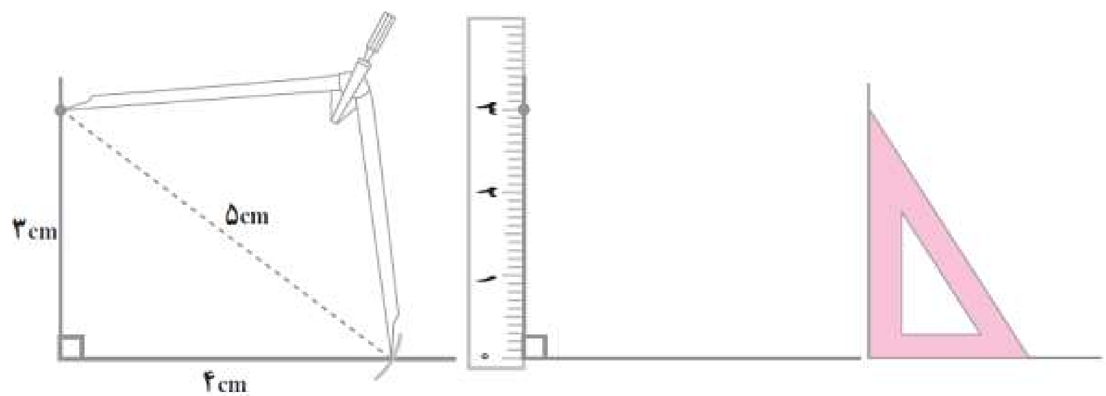
توضیح : اگر از یک مثلث قائم الزاویه ، اندازه های وتر و یک زاویه تند (حاده) معلوم باشد ، می توان آن مثلث را رسم نمود. شکل های زیر مراحل رسم یک مثلث قائم الزاویه را نشان می دهد. مثلث قائم الزاویه ای به اندازه وتر 4 و زاویه تند 40 درجه.



۱ــ رسم زاویه ۲ــ جدا کردن وتر ۳ــ رسم عمود

. حال اگر از یک مثلث قائم الزاویه ، اندازه های وتر و یک ضلع را به ما بدهند ، می توان مثلث را رسم نمود.

شکل زیر مراحل رسم یک مثلث قائم الزاویه ای را که اندازه وتر آن 5 سانتی متر و یکی از اضلاع قائمه اش 3 سانتی متر است ر ا نشان می دهد.



۱ــ رسم کردن زاویه‌ی قائمه ۲ــ جدا کردن ضلع ۳ــ جدا کردن وتر با پرگار

. تمرین : مثلثی رسم کنید که یک ضلع آن 3 سانتی متر و یکی از زاویه های آن 50 درجه باشد. چند مثلث می توان رسم کرد؟ دلایل را بررسی کنید.

. تمرین : مثلثی رسم کنید که یک ضلع آن AB = 2 و یک ضلع دیگر آن AC = 3 و زاویه بین این دو ضلع A = 50 درجه باشد. (اضلاع بر حسب سانتی متر می باشند.)

. تمرین : مثلث ABC را با شرایط زیر رسم کنید.

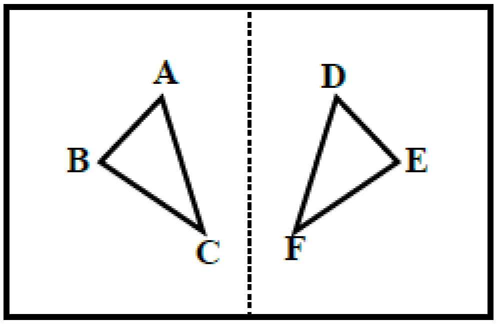
(AB = 5 ، AC = 4 ، BC = 2)، (توجه داشته باشید که اندازه اضلاع بر حسب سانتی متر می باشد.)

❖ همنهشتی دو مثلث

هرگاه دو مثلث بر یکدیگر منطبق شوند ، آن دو مثلث را همنهشت (قابل انطباق) می گوییم.

مانند دو مثلث ABC و DEF که بر هم منطبق و همنهشت هستند و می نویسیم :

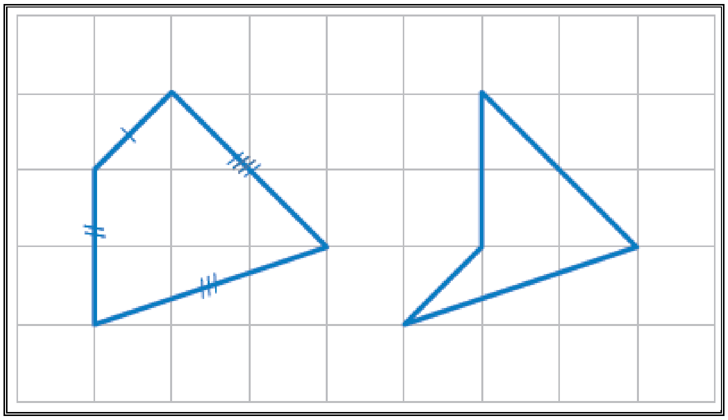
$$D\overset{\Delta}{E}F = A\overset{\Delta}{B}C$$



ــ در شکل مقابل ضلع‌های دو چهارضلعی، دو به دو با هم برابرند.

الف) با علامت‌گذاری مناسب تساوی ضلع‌ها را نمایش دهید.

ب) آیا این دو چهارضلعی با هم مساوی‌اند؟



❖ دو مثلث در حالت های زیر با هم مساوی هستند :

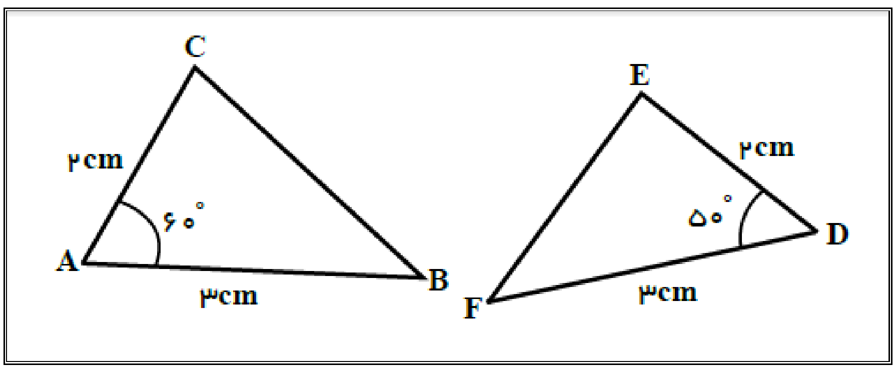
1- دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث ، با دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند. (ض ز ض)

2- دو زاویه و ضلع آنها از یک مثلث ، با دو زاویه و ضلع آنها از یک مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند. (ز ض ز)

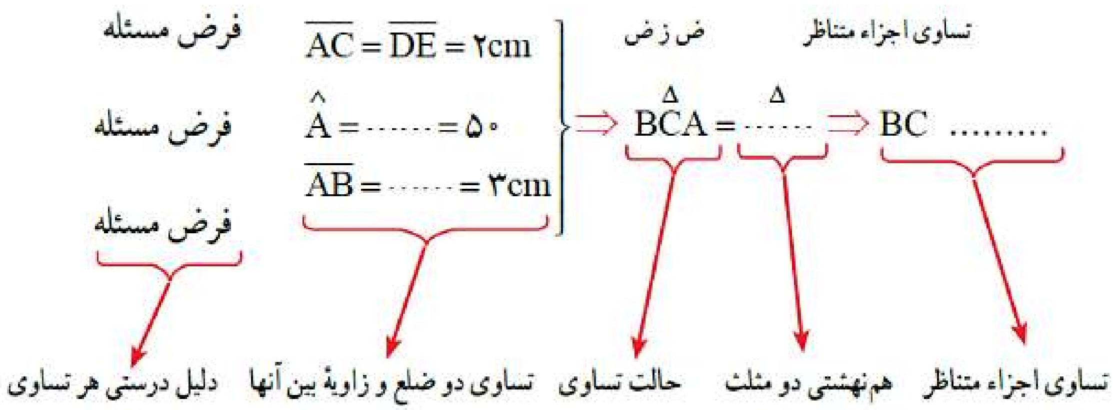
3- سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع متناظر از مثلث دیگر با هم مساوی باشند. (ض ض ض)

مثال : اندازه اضلاع دو مثلث در شکل زیر داده شده است ، چرا دو مثلث با هم همنهشت هستند؟

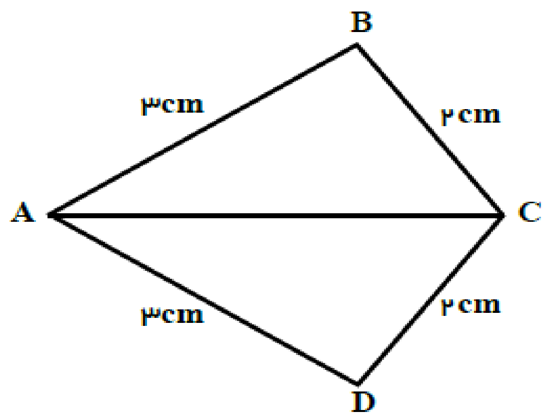
چرا BC = EF بر قرار است؟



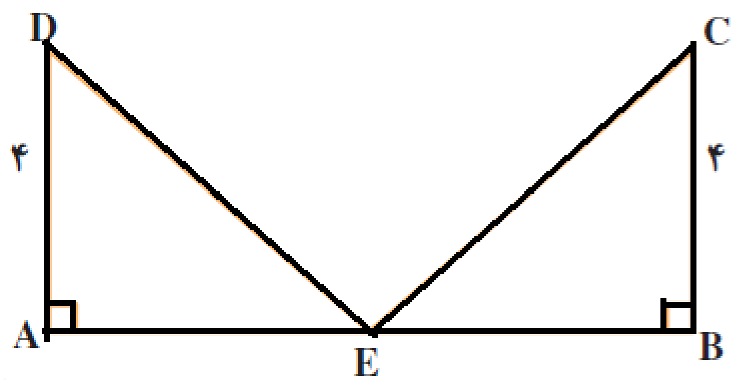
در هندسه برای بیان استدلال به شیوه زیر عمل می کنیم. جاهای خالی را کامل کنید تا استدلال کامل شود.



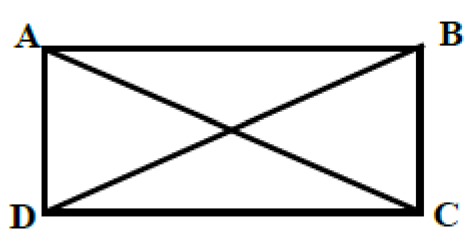
. تمرین : در شکل زیر چرا دو مثلث همنهشت هستند؟



. تمرین : نقطه E وسط پاره خط AB است. چرا دو مثلث قائم الزاویه ADE و BCE با هم مساویند؟



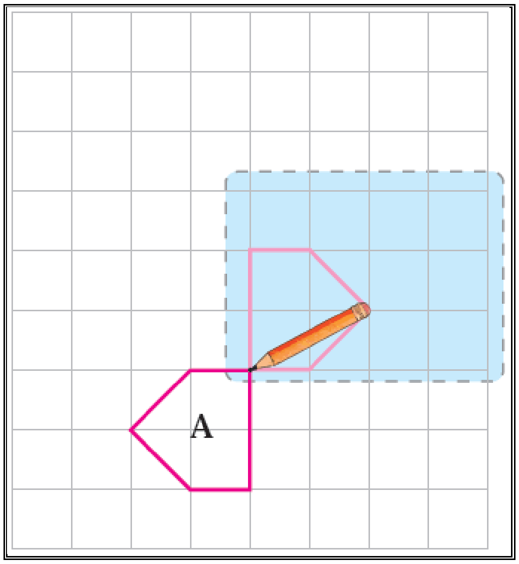
. تمرین : چهار ضلعی ABCD یک مستطیل است ، چرا قطرهای مستطیل با هم برابرند؟



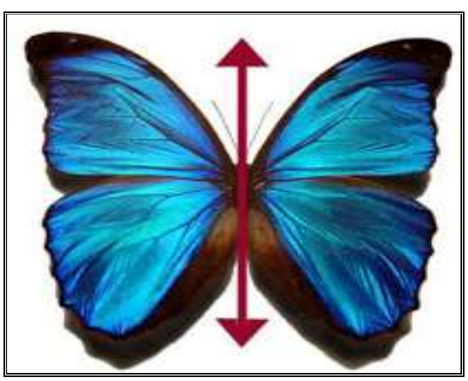
❖ تبدیلات هندسی (انتقال ، تقارن ، دوران)

دوران به معنی چرخش ، چرخیدن و دور گردیدن می باشد و در ریاضی گرداندن یک شکل حول یک نقطه یا خط را دوران می نامیم.

اگر کاغذ پوستی را ۱۸۰ درجه بچرخانید، تصویر شکل A مانند شکل روبه‌رو در صفحه قرار می‌گیرد. این تصویر حاصل دوران ۱۸۰ درجه‌ای شکل Aحول مرکز دوران است.



تقارن به معنی قرین شدن با یکدیگر، با هم یار و دوست گردیدن می باشد و در اصطلاح هندسه وجود تقارن نشان دهنده ی وجود قرینه شدن نسبت به یک نقطه یا نسبت به یک خط (محور) می باشد.

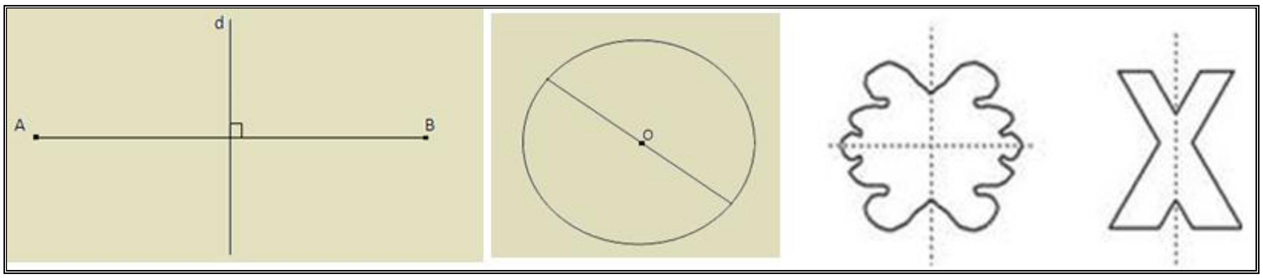


اگر با کمی دقت به اطراف خود، به گیاهان، اجسام و موجودات نگاه کنیم متوجه خواهیم شد که شکل بیشتر آن ها متقارن است و همین متقارن بودن زیبایی خاصی به آن ها بخشیده است.

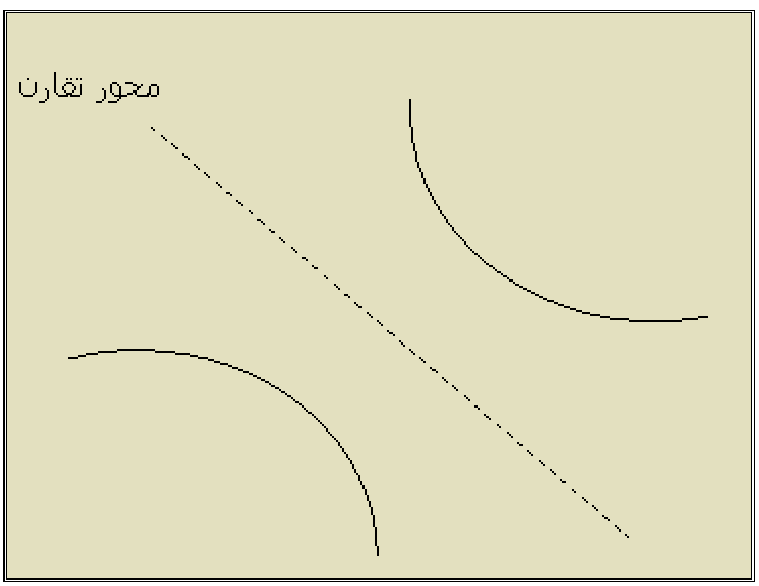
وجود تقارن در ساختمان بدن انسان نیز یکی از عامل های اساسی زیبایی است.

محور تقارن یک شکل خطی است که قرینه ی شکل نسبت به این خط بر خود شکل منطبق شود.

عمود منصف پاره خط و قطر دایره به ترتیب محور تقارن پاره خط و دایره هستند.

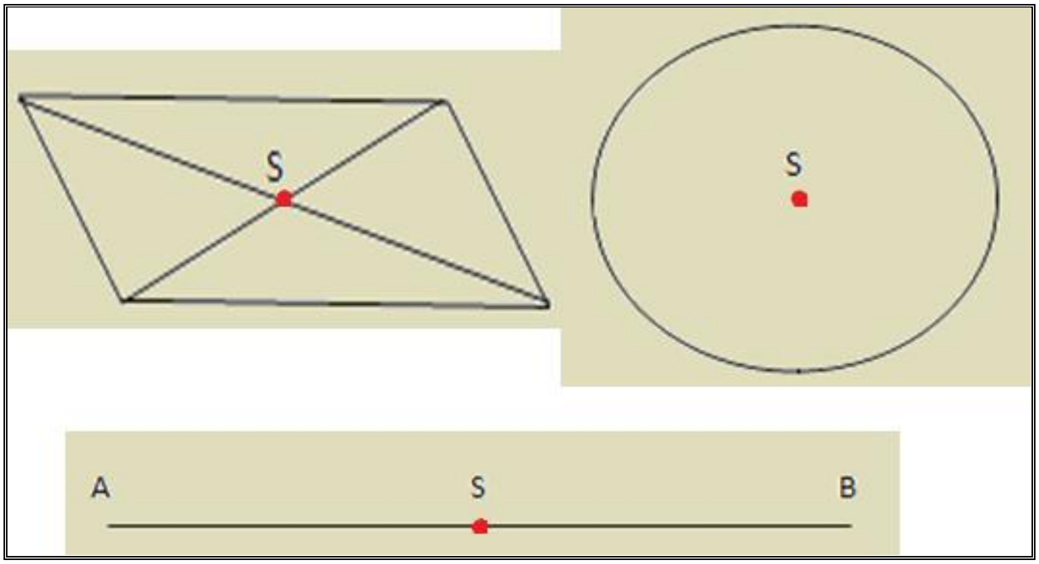


نکته مهم : محور تقارن لزوما شکل را قطع نمیکند.



مرکز تقارن یک شکل مرکز تقارن یک شکل نقطه ای است که قرینه شکل نسبت به آن نقطه بر خود شکل منطبق باشد.

نقاط S مرکز تقارن اشکال هستند

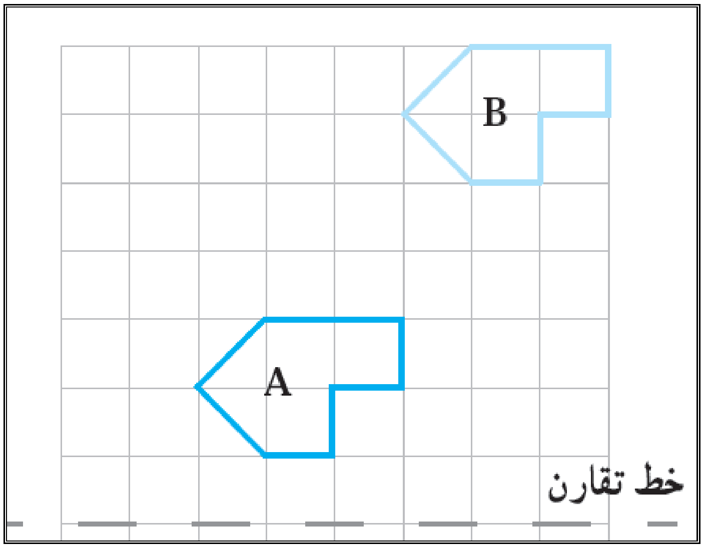


انتقال به معنی جابه جا شدن، از جایی به جای دیگر رفتن، نقل کردن، کوچیدن، کوچ کردن و مردن و در گذشتن می باشد.

در ریاضی انتقال یعنی تغییر مکان، اندازه و جهت مشخص. برداری که شکل را در مسیر مشخص انتقال می دهد، بردار انتقال می نامند.

یک کاغذ شفاف روی شکل A قرار دهید و این شکل را روی کاغذتان بکشید. کاغذ شفاف را بدون تغییر جهت روی صفحه حرکت دهید تا تصویر آن روی شکل B قرار بگیرد.

بدین ترتیب تصویر شکل A را روی صفحه انتقال داده‌اید.



وقتی شکلی را روی صفحه انتقال می‌دهیم، تصویر به‌دست‌آمده مساوی و هم‌جهت شکل اولیه است.
وقتی قرینهٔ شکلی را نسبت به یک خط پیدا می‌کنیم، تصویر به‌دست آمده مساوی آن شکل است؛ امّا جهت آن تغییر می‌کند.

ــ همهٔ شکل‌های مقابل با هم مساوی‌اند.

الف) کدام شکل‌ها انتقال‌یافتهٔ شکل رنگی هستند؟

ب) کدام شکل‌ها دوران یافتهٔ شکل رنگی هستند؟

ج) کدام شکل‌ها قرینهٔ شکل رنگی نسبت به یک خط هستند؟