« آنچه از مباحث فصل سوم ریاضی هفتم آموخته ام »

جبر و معادله

نکته ۱_ تبدیل مسائل زندگی روزمره به عبارت ها و معادله های ریاضی را مدل سازی می گویند.

مثال: هزینهٔ کرایهٔ یک اتوبوس عبارت است از یک قیمت ثابت برای ۳ ساعت اوّل و یک قیمت برای هر ساعت اضافه بعد از ۳ ساعت؛ بنابراین می توان هزینهٔ اتوبوس را به صورت یک عبارت جبری به صورت: $C = a+nb$ نمایش داد، حروف n , b , a , c به چه معنی هستند؟

حل مسئله _ $a =$ هزینهٔ سه ساعت $c =$ هزینهٔ کرایه اتوبوس

$n =$ تعداد ساعات اضافه $b =$ قیمت هر ساعت اضافه

نکته ۲_ جبر و معادله:

یک عبارت جبری، شامل یک یا چند عدد و متغیر و عملیات ریاضی مانند: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است.

مثال: عبارت های رو به رو جبری هستند. $8a$ و $x + 2y - z$ و abc

نکته ۳_ عبارت هایی که در آن ها فقط از اعداد و حروف و عمل ضرب استفاده شده باشد، یک جمله ای هستند. به قسمت عددی، ضریب و به قسمت حرفی، قسمت موهومی گفته می شود.

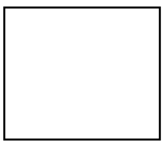
مثال: این عبارت ها همه یک جمله هستند. ۱۲۵ و $\frac{3ax}{2}$ و $\sqrt{2ab}$ و $4xyz$ و $5x$

اما عبارت هایی مانند عبارت های رو به رو یک جمله ای نیستند زیرا در آن ها جمع یا تفریق وجود دارد.

$5x - 4$ و $\frac{a+1}{b}$ و $a + b$

اگر ضریب عددی ۱ باشد، می توانیم آن را ننویسیم. مثال: $1a = a$

نکته ۴_ محیط یک مربع به ضلع a برابر با $4a = 4 \times a$ است. حرف a یک متغیر نامیده می شود. در جبر و متغیرها، نمادهایی برای بیان عددهای نامعلوم یا مقادیر غیر مشخص اند.



۲

$a = 2$

$P = 4a \Longrightarrow P = 4 \times 2 = 8$

نکته ۵ـ عمل جمع خاصیت جابه جایی دارد یعنی $a + b = b + a$ است.

- ۱× هر عددی مساوی خود آن عدد است. $۱ \times a = a$
- ضرب خاصیت جابه جایی دارد. $a \times b = b \times a$
- هر عدد + ۰ برابر خودش است. $a + ۰ = a$

نکته ۶ـ یک عبارت جبری شامل یک یا چند عدد؛ متغیر و عمل هایی مثل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است.

مثال: $۴ + \frac{p}{g}$ $\quad$ $m \times ۵n$ $\quad$ $۵z$ $\quad$ $۳x - ۷$

در یک عبارت جبری، اغلب از علامت « ٠ » یا پرانتز برای حاصل ضرب بین آن ها استفاده می شود و از نماد « × » پرهیز می شود؛ زیرا ممکن است علامت ضرب با نماد انگلیسی « x » به عنوام یک متغیر اشتباه شود. در زیر حاصل ضرب دو متغیر x و y را به صورت های مختلف نمایش داده ایم که همگی آن ها، یکسان اند و هیچ فرقی با یکدیگر ندارند:

$$xy \,،\; x.y \,،\; x(y) \,،\; (x)y \,،\; (x)(y)$$

نکته ۷ـ هر عبارت از تعدادی جملهٔ جبری تشکیل شده است.

نکته ۸ـ هر جملهٔ جبری شامل قسمت عددی و قسمت حرفی است که بین آن ها علامت ضرب می باشد. $۵ \times b$

نکته ۹ـ یک جمله ای های متشابه:

- جملات متشابه جملاتی هستند که قسمت حرفی آن ها عین هم باشد. $۵x$ و $۶x$
- فقط جملات متشابه می توانند با هم جمع و تفریق شوند. $۲x + ۵x = ۷x$
- اگر قسمت حرفی یا موهومی چند یک جمله ای دقیقاً مثل هم باشد، به آن ها متشابه می گوییم.

$۷\,ab$ و $۱۰ab$ و $۱۳\,ba$ و $\frac{۳}{۵}\,ab$

اما عبارت های روبرو متشابه نیستند. $۷\,ab$ و $۷\,b$ و $۷\,a$

نکته ۱۰ـ ساده کردن عبارت های جبری:

برای ساده کردن عبارت های جبری فقط جمله های متشابه را با هم در نظر می گیریم و آن ها را با هم جمع و تفریق می کنیم، در ساده کردن یک عبارت جبری، استفاده از قوانین مربوط به اعمال مانند: ضرب عددهای منفی در مثبت، منفی در منفی، مثبت در مثبت باید رعایت شود. مثال: $۸a + ۵a - ۳a + ۱۰a$

حل مسئله ـ $۸a + ۵a - ۳a + ۱۰a = (۸ + ۵ - ۳ + ۱۰)\, a = ۲۰a$

نکته ۱۱ـ ساده کردن عبارت های جبری یعنی کوتاه کردن طول عبارت یا کم کردن تعداد جملات.

مثال: $۵ab - ۴ab = (۵ - ۴)\, ab = ۳ab$

نکته ۱۲ـ فقط وقتی چند یک جمله ای متشابه باشند، می توانیم آن ها را با هم جمع یا تفریق کنیم. دراین حالت ضرایب عددی راجمع و تفریق کرده وقسمت حرفی مشترک رایک بار جلوی جواب می نویسیم.

$$\frac{۲}{۳}x \ \frac{۱}{۳}x - ۳x = \left(\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} - ۳\right) x = -۲x$$

نکته ۱۳ـ هر کدام از عبارت ۲ ، a ، ۳a ، ۸b ، ۵b یک جمله است.دو جملهٔ a ، ۳a متشابه اند؛ اما ۸b و ۳a متشابه نیستند برای ساده کردن عبارتهای جبری، فقط جمله های متشابه را با هم در نظر می گیریم و آن ها را با هم جمع و تفریق می کنیم در ساده کردن یک عبارت جبری، استفاده از قوانین مربوط به اعمال آن مانند: ضرب عددهای منفی در مثبت و منفی در منفی و مثبت در مثبت باید رعایت شود و خاصیت جابه جایی اعمال جمع و ضرب، خاصیت شرکت پذیری ضرب و بی اثر بودن پرانتز، $(a\ b)\ c$ ، $a\ (b\ c)$ از اهمیت زیادی برخوردار است.

- نحوه جمع کردن

$$۶x + ۵y - ۴x + ۸y = (۶x - ۴x) + (۵y + ۸y) = (۶ - ۴)\, x + (۵ + ۸)\, y = ۲x + ۱۳y$$

- نحوه ی ضرب کردن

$$۳\, (۲x + ۵y) = ۳ \times ۲x + ۳ \times ۵y = ۶x + ۱۵y$$

اعداد پشت پرانتز را در تک تک جملات داخل پرانتز ضرب می کنیم سپس حاصل را که به دست آوردیم جملات متشابه را با هم جمع یا تفریق کنیم.

نکته ۱۴ـ هر گاه به جای متغیر یا متغیر ها، عدد یا عددهایی را قرار دهیم و اولویت در محاسبات عددی را رعایت کنیم در واقع مقدار عددی عبارت را حساب کرده ایم در انجام عملیات محاسبهٔ مقدار عبارت، ترتیب انجام عملیات را باید رعایت کنیم.

مثال: نحوه ساختن یک عبارت عددی سپس محاسبه و رعایت ترتیب انجام عملیات

a − (a − ۲b)   a = ۵   ،   b = ۳

۵ − (۵ - ۲ × ۳) = ۵ - (۵ − ۶) = ۵ - (- ۱) = ۵ + ۱ = ۶

نکته ۱۵ـ اگر عبارت را اوّل ساده کنیم بعد مقدار عددی را به دست آوریم کارمان ساده تر است.

۳(۲x−۳y) −۵(x−۲y)= ۳×۲x+۳×(−۳y) −۵× x−۵×(−۲y) =۶x+(−۹y) −۵x -(+۱۰y) = x+y=۲+۳= ۵

نکته ۱۶ـ ضرب یک جمله ای ها:

در ضرب یک جمله ای ها لازم نیست جملات متشابه باشند و همهٔ یک جمله ای ها را می توان در هم ضرب کرد در این حالت، اعداد در هم و حروف نیز در هم ضرب می شوند.

مثال: $(\frac{۲}{۳}ac)(\frac{۱}{۳}b)(\frac{۹}{۲}d) = \frac{۱۸}{۱۸}acbd = acbd$

نکته ۱۷ـ چند جمله ای جبری:

اگر دو یا چند یک جمله ای غیر متشابه با هم جمع یا تفریق شوند، یک چند جمله ای جبری به وجود می آید.

مثال: یک عبارت سه جمله ای   ۷x − ۵y + ۱۰xy

نکته ۱۸ ـ جمع و تفریق چند جمله ای ها:

در جمع و تفریق چند جمله ای ها، جملات متشابه را مشخص کرده و آن ها را جمع و تفریق می کنیم.

- اگر قبل از پرانتزی علامت منفی (-) باشد همهٔ عبارت های داخل آن پرانتز قرینه می شوند.

مثال: ۷ab + ۸bc − (۴ab −۲bc) = ۷ab + ۸bc − ۴ab + ۲bc = ۳ab + ۱۰bc

نکته ۱۹ـ ضرب چند جمله ای ها:

در ضرب دو چند جمله ای، هر کدام از جملات چند جمله ای اول را در هر کدام از جملات چند جمله ای دوم ضرب می کنیم و سپس جملات متشابه را با هم ساده می کنیم.

$$(a + b)(۱ - x + y) = a - ax + ay + b - bx + by$$

نکته ۲۰ـ مقدار عددی یک عبارت جبری:

اگر به جای متغیرهای (حروف)یک عبارت جبری عدد بگذاریم، مقدار عددی آن عبارت به دست می آید.

مثال ۱: مقدار عددی این عبارت را به دست آورید. $c = ۲$ $b = -۱$ $a = ۱$

$$ab = bc + ۲(a + b)$$

$$ab - bc + ۲(a + b) = (۱)(-۱) - (-۱)(۲) + ۲(۱ + (-۱)) = -۱ + ۲ + ۰ = ۱$$

مثال ۲: مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = ۲$ و $y = -۱$ و $z = ۳$ به دست آورید.

$$\frac{xyz - ۲(x + z)}{(x + y)(zx - xy)}$$

xyz − x + z
(x + z) x − x

نکته ۲۱ـ معادله:

به یک تساوی جبری که به ازای بعضی از عددها به تساوی عددی تبدیل می شود، معادله می گویند. جواب های معادله همان بعضی از عددها هستند که تساوی عددی را برقرار می کنند.

مثال: $۶n + ۷ = ۳۷$ و $۴n = ۱۲$

معادله یک تساوی است که هدف از حل آن به دست آوردن مقدار یک یا چند مجهول می باشد. معادله های زیر یک مجهولی هستند. $۳a = ۶۰$ $۲x + ۵ = ۹$ $۵x - ۸ = ۷$

- تعریف دیگر معادله: هر گاه بین دو عبارت جبری = قرار دهیم معادله ساخته ایم.

نکته ۲۲ـ روش های حل معادله:

برای حل یک معادله باید کاری کنیم تا در یک طرف معادله، فقط مجهول و در طرف دیگر فقط عدد باشد و با ساده کردن اعداد، مقدار مجهول را به دست آوریم.

- روش اول ـ به هر دو طرف یک تساوی می توانیم یک مقدار یکسان را اضافه یا از دو طرف یک تساوی یک مقدار یکسان را کم کنیم. اگر پشت معادله هر مقدار اضافه کنیم باید به جلوی معادله هم همان مقدار اضافه کنیم همچنین دو طرف یک تساوی را می توانیم در یک عدد یکسان غیر صفر ضرب و یا بر یک عدد یکسان غیر صفر تقسیم کنیم. به عبارت دیگر دو طرف تساوی را می توان با مقدار ثابتی جمع یا تفریق، ضرب یا تقسیم کرد.

مثال: این معادله را حل کنید. $۵x - ۳ = ۳۲$

حل معادله- $۵x - ۳ = ۳۲ \rightarrow ۵x - ۳ + ۳ = ۳۲ + ۳ \rightarrow ۵x = ۳۵ \rightarrow \frac{۵x}{۵} = \frac{۳۵}{۵} \rightarrow x = ۷$

- روش دوم ـ در این روش همهٔ مجهول ها را به یک طرف تساوی و همهٔ معلوم ها را به طرف دیگر تساوی می بریم. هر عبارتی که از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی می رود علامتش قرینه می شود.

مثال: این معادله را حل کنید. $۷x + ۵ = ۱۰x - ۷$

حل معادله - $۷x + ۵ = ۱۰x - ۷ \rightarrow ۷x - ۱۰x = -۷ - ۵ \rightarrow -۳x = -۱۲ \rightarrow x = \frac{-۱۲}{-۳} \rightarrow x = ۴$

- مقدار مجهول برابر است با عدد معلوم تقسیم بر ضریب مجهول. در مثال بالا برای بدست آوردن مقدار مجهول (x)، عدد معلوم (۱۲-) را بر ضریب مجهول (۳-) تقسیم کردیم.

- اگر معادله کسری باشد می توانیم با ضرب کردن طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها، مخرج ها را از بین برده و معادله را حل کنیم.

مثال: این معادله را حل کنید. $\frac{x + ۲}{۱۲} + \frac{x - ۴}{۶} = \frac{۲x - ۱۲}{۴}$

حل معادله ـ طرفین را در ۱۲ ضرب می کنیم.

$$\overset{۱}{\cancel{۱۲}} \times \frac{x+۲}{\underset{۱}{\cancel{۱۲}}} + \overset{۲}{\cancel{۱۲}} \times \frac{x-۴}{\cancel{۶}} = \overset{۳}{\cancel{۱۲}} \times \frac{۲x-۱۲}{\cancel{۴}} \longrightarrow (x + ۲) + ۲(x - ۴) = ۳(۲x - ۱۲) \longrightarrow$$

$$x + ۲ + ۲x - ۸ = ۶x - ۳۶ \rightarrow x + ۲x - ۶x = -۳۶-۲+۸ \rightarrow -۳x = -۳۰ \rightarrow x = \frac{-۳۰}{-۳} \rightarrow x = ۱۰$$

- اگر در معادله ای یک یا چند پرانتز وجود داشت، با استفاده از قانون ضرب چند جمله ای ها حاصل پرانتزها را حساب کرده پرانتز ها را بر می داریم و معادله را حل می کنیم.

مثال: این معادله را حل کنید. $۸x - ۲(x + ۳) = ۳(x - ۳)$

حل معادله ـ $۸x - ۲x - ۶ = ۳x - ۹ \rightarrow ۸x - ۲x - ۳x = -۹ + ۶ \rightarrow ۳x = -۳ \rightarrow x = \frac{-۳۰}{-۳} \rightarrow x = -۱$

نکته ۲۳ـ حل مسئله به کمک معادله:

برای حل یک مسئله به کمک معادله، ابتدا باید مقدار مجهول را تشخیص داده و با نام گذاری آن معادله را نوشته سپس حل کنیم.

مثال ۱: اگر به سه برابر عددی، ۷ واحد اضافه کنیم، حاصل ۳۱ می شود، آن عدد را بدست آورید.

حل مسئله ـ عدد را x در نظر می گیریم.

$$۳x + ۷ = ۳۱ \rightarrow ۳x = ۳۱ - ۷ \rightarrow ۳x = ۲۴ \rightarrow x = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

مثال ۲: سن نیما دو برابر سن خواهرش است. بعد از سه سال مجموع سن آنها ۳۰ سال می شود. اکنون نیما چند ساله است؟

حل مسئله ـ اگر سن خواهر نیما را x در نظر بگیریم، سن نیما برابر با $۲x$ می شود و داریم:

$$(x + ۳) + (۲x + ۳) = ۳۰ \rightarrow ۳x + ۶ = ۳۰ \rightarrow ۳x = ۳۰ - ۶ \rightarrow ۳x = ۲۴ \rightarrow x = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

خواهر نیما ۸ سال و نیما ۱۶ سال دارد. $(۸ \times ۲ = ۱۶)$

مثال ۳: مجموع سه عدد متوالی ۷۲ شده است آن سه عدد را پیدا کنید.

حل مسئله ـ اگر کوچکترین عدد را x در نظر بگیریم، داریم:

$$x + (x + ۱) + (x + ۲) = ۷۲ \rightarrow ۳x + ۳ = ۷۲ \rightarrow ۳x = ۶۹ \rightarrow x = \frac{۶۹}{۳} = ۲۳$$

مثال ۴: قیمت یک خودکار از دو برابر قیمت یک مداد، ۱۰۰ تومان بیشتر و از سه برابر قیمت یک مداد، ۲۰۰ تومان کمتر است. قیمت یک خودکار چقدر است؟

حل مسئله - اگر قیمت یک مداد را x در نظر بگیریم قیمت یک خودکار ($۲x + ۱۰۰$) یا ($۳x - ۲۰۰$) است. پس داریم:

قیمت یک مداد برابراست با: $۲x + ۱۰۰ = ۳x - ۲۰۰ \rightarrow ۲x - ۳x = -۲۰۰ - ۱۰۰ \rightarrow -x = -۳۰۰ \rightarrow x = ۳۰۰$

قیمت یک خودکار برابراست با: $۲x + ۱۰۰ = ۲(۳۰۰) + ۱۰۰ = ۷۰۰$ یا $۳x - ۲۰۰ = ۳(۳۰۰) - ۲۰۰ = ۷۰۰$

نکته ۲۴_ معادلهٔ غیر ممکن (ممتنع):

اگر پس از ساده کردن یک معادله به یک تساوی همیشه غلط برسیم، در اینصورت معادله جواب ندارد و می گوییم معادله غیر ممکن (ممتنع) است.

مثال: این معادله را حل کنید. $۵x + ۸ = ۵x + ۳$

حل معادله - $۵x + ۸ = ۵x + ۳ \rightarrow ۵x = ۳ - ۸ \rightarrow ۰ = -۵$

این معادله جواب ندارد و غیر ممکن است.

نکته ۲۵_ معادلهٔ مبهم:

اگر پس از ساده کردن یک معادله به یک تساوی همیشه درست برسیم، در اینصورت جواب معادله به x وابسته نخواهد بود و معادله به ازای هر مقداری از x درست است؛ یعنی معادله بی شمار جواب دارد و می گوییم معادله مبهم است.

مثال: این معادله را حل کنید. $۸x - ۳x + ۷ = ۵x + ۹ - ۲$

حل معادله- $۸x - ۳x + ۷ = ۵x + ۹ - ۲ \rightarrow ۸x - ۳x - ۵x = ۹ - ۲ - ۷ \rightarrow ۰ = ۰$

این معادله بی شمار جواب دارد و مبهم است.

نکته ۲۶_ تساوی، قابل تبدیل شدن به معادله است.

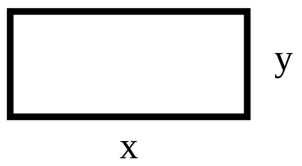
$۴n = ۱۲$ و $۶n + ۷ = ۳۷$

نکته ۲۷- نامساوی ها، قابل تبدیل شدن به نامعادله هستند.

نکته ۲۸ـ مجموع محیط و مساحت یک مربع تنها از نظر عددی معنادار است، زیرا در کمیت متفاوت هستند. محیط، یک کمیت یک بعدی و مساحت، یک کمیت دو بعدی را نشان می دهد.

مثال: مجموع محیط و مساحت مستطیلی به طول x و عرض y برابر است با:

حل مسئله -



مساحت = xy

محیط = ۲ (x + y) = ۲x + ۲y ⟶ محیط + مساحت = xy + ۲x + ۲y