

فصل هفتم - تقریب

تقریب

در محاسبه های تقریبی برای نشان دادن مقدار تقریبی عددها، به جای علامت مساوی (=) از علامت « \approx » استفاده می کنیم که یعنی: «تقریبا برابر است با».

برای تقریب زدن عددها، دو روش داریم:

۱- روش قطع کردن

۲- روش گرد کردن

• روش قطع کردن

در این روش، رقم های سمت راست تقریب، یعنی عددهایی را که ارزش مکانی آن ها از تقریب داده شده، کم تر باشد با صفر جایگزین می کنیم.

مثال: با تقریب کم تر از ۱۰ در روش قطع کردن، یعنی تمامی رقم هایی که ارزش مکانی آن ها کم تر از دهگان است، به صفر تبدیل شوند.

$$\begin{array}{r} \text{تقریب کم تر از} \\ 293 \approx 290 \\ \text{قطع کردن} \end{array}$$

با تقریب کم تر از ۱۰۰۰ در روش قطع کردن، یعنی تمامی رقم هایی که ارزش مکانی آن ها کم تر از یکان هزار است (رقم های سمت راست ۳) به صفر تبدیل شوند.

$$\begin{array}{r} \text{تقریب کم تر از} \\ 43591 \approx 43000 \\ \text{قطع کردن} \end{array}$$

نکته: با تقریب دهگان، یعنی با تقریب کم تر از ۱۰، با تقریب صدگان، یعنی با تقریب کم تر از ۱۰۰.

مثال: عدد ۳۹/۷۴۱ را با تقریب کم تر از ۱ قطع کنید.

پاسخ: این عدد را در جدول ارزش مکانی قرار می دهیم. وقتی می گوییم با تقریب کم تر از یک، یعنی رقم هایی که ارزش مکانی آن ها کم تر از یکان است، باید به صفر تبدیل شوند.

هزارم	صدم	دهم	یکی	دهتایی	صدتایی
۱	۴	۷	۹	۳	

خط ممیز

$$39.741 \approx 39$$

قطع کردن

وقتی می‌گوییم با تقریب کم تر از $0/01$ ، یعنی رقم‌هایی که در مرتبه ی هزارم و ده هزارم و ... قرار دارند، به صفر تبدیل شوند.

$$\pi \approx 3/14159265$$

مقدار عدد π تا هشت رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx 3/14$$

مقدار عدد π با تقریب کم تر از $0/01$ (تا دو رقم اعشار):

$$\pi \approx 3/1415$$

مقدار عدد π با تقریب کم تر از $0/0001$ (تا چهار رقم اعشار):

$$\pi \approx 3/1$$

مقدار عدد π با تقریب کم تر از $0/1$ (تا یک رقم اعشار):

می‌دانیم که با تقسیم صورت هر کسر بر مخرج آن، می‌توان آن کسر را به صورت عدد اعشار نوشت.

وقتی می‌گوییم تقسیم را تا یک رقم اعشار انجام دهید، یعنی خارج قسمت را با تقریب کم تر از $0/1$ به دست آورید و یا وقتی می‌گوییم تقسیم را تا دو رقم اعشار انجام دهید، یعنی خارج قسمت را با تقریب کم تر از $0/01$ حساب کنید.

در تقریب رقم دهگان، اختلاف هر عدد، با مقدار تقریبی آن کوچک تر از 10 است.

مثال: عدد 179 با تقریب دهگان به روش قطع کردن می‌شود: 170 .

از 10 (مقدار رقم تقریب) کوچک تر است. $179 - 170 = 9$

به طور کلی در تقریب به روش قطع کردن، همیشه اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن، کوچک تر از مقدار رقم تقریب است.

$$\begin{array}{r} 24/000 \\ \hline 3/428 \\ \hline 0/004 \end{array} \xrightarrow{\quad} \frac{24}{3} = 3/428$$

مثال: مقدار تقریبی کسر $\frac{24}{3}$ را تا سه رقم اعشار

حساب کنید.

پاسخ:

نکته: برای محاسبه ی مقدار تقریبی کسرها به روش قطع کردن، فقط کافی است که خارج قسمت تقسیم را به اندازه ی رقم های اعشاری عدد تقریب محاسبه کنیم. برای مثال اگر بخواهیم مقدار تقریبی کسر $\frac{19}{11}$ را با تقریب کم تر از $0/01$ به روش قطع کردن حساب کنیم، باید خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج کسر را تا ۲ رقم اعشار حساب کنیم.

مثال: مقدار تقریبی عدد $\frac{27}{13}$ را با تقریب کم تر از 0.001 به روش قطع کردن حساب کنید.

پاسخ: چون 0.001 دارای سه رقم اعشار است و باید به روش قطع کردن تقریب بزنیم، بنابراین خارج قسمت تقسیم ۲۷ بر ۱۳ را تا سه رقم اعشار حساب می کنیم.

$$\begin{array}{r} 27 \overline{) 13} \\ 2/076 \end{array} \rightarrow \frac{27}{13} \approx 2/076 \text{ (با تقریب کم تر از } 0.001 \text{ به روش قطع کردن)}$$

• تقریب به روش گرد کردن

برای این که در استفاده از عددهای تقریبی خطای کم تری داشته باشیم، از روش گرد کردن استفاده می کنیم. در این روش با توجه به تقریب مورد نظر، عددی را به صورت تقریبی انتخاب می کنیم که به مقدار واقعی نزدیک باشد. برای مثال مقدار تقریبی عدد ۷۸۳ با تقریب کم تر از ۱۰۰ و روش گرد کردن، برابر ۸۰۰ می شود، چون عدد ۸۰۰ به عدد ۷۸۳ نزدیک تر از عدد ۷۰۰ می باشد.

مثال: با تقریب کم تر از 0.1 به روش گرد کردن، عدد $43/19$ به عدد $43/2$ نزدیک تر است تا عدد $43/1$ ، بنابراین گرد شده ی عدد $43/19$ با تقریب کم تر از 0.1 به روش گرد کردن، برابر است با $43/2$.

در روش گرد کردن، ابتدا به رقم سمت راست تقریب توجه می کنیم. اگر این رقم ۵، یا بزرگ تر از ۵ باشد (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد)، یک واحد به رقم تقریب اضافه می کنیم و سپس رقم های سمت راست تقریب را با صفر جایگزین می کنیم و اگر رقم سمت راست تقریب کوچک تر از ۵ (یعنی ۴، ۳، ۲، ۱، یا صفر باشد) بدون این که به رقم تقریب چیزی اضافه کنیم، رقم های سمت راست تقریب را با صفر جایگزین می کنیم.

مثال: عدد ۴۵۹۳ را با تقریب کم تر از ۱۰۰۰ گرد کنید.

پاسخ:

مثال: مقدار تقریبی عددهای داده شده را با تقریب کم تر از ۱۰ به دو روش بنویسید.

مقدار تقریبی به روش گردکردن	مقدار تقریبی به روش قطع کردن	عدد
۷۷۰	۷۶۰	۷۶۸
۳۱۳۰	۳۱۲۰	۳۱۲۵
$۲۰/۰۰۰ = ۲۰$	$۲۰/۰۰۰ = ۲۰$	$۲۱/۳۹$

نکته: اگر رقم سمت راست تقریب کمتر از ۵ باشد، پاسخ تقریبی به روش قطع کردن و گردکردن یکسان می شود.
مثال:

نکته: برای محاسبه ی مقدار تقریبی کسرها به روش گردکردن، باید خارج قسمت تقسیم را تا یک رقم بیشتر از تقریب داده شده، محاسبه کنیم؛ یعنی اگر بخواهیم مقدار تقریبی کسری را به روش گردکردن با تقریب کم تر از ۰/۰۱ محاسبه کنیم، باید خارج قسمت را تا سه رقم اعشار (یک رقم بیشتر از رقم های اعشاری ۰/۰۱) محاسبه کنیم و سپس عدد اعشاری به دست آمده را با تقریب داده شده گرد کنیم.

مثال: مقدار تقریبی عدد $\frac{۲۳}{۷}$ را با تقریب کم تر از ۰/۰۰۱ به روش گردکردن محاسبه کنید.

پاسخ: باید حاصل تقسیم ۲۳ بر ۷ را تا چهار رقم اعشار (یعنی یک رقم بیشتر از رقم های اعشار ۰/۰۰۱) حساب کنیم.

تقریب ۲

تقریب زدن به روش قطع کردن:

وقتی صحبت از سن افراد می شود، مجبوری از عددهای تقریبی استفاده کنیم، به طور مثال اگر سن رضا ۱۲ سال و ۵ ماه و ۱۷ روز باشد، می گوییم سن رضا ۱۲ سال است و یا اگر وزن رضا ۵۳/۳۵۰ کیلوگرم باشد، می گوییم وزن رضا ۵۳ کیلوگرم است. به چنین بیانی از مقادیرهای تقریبی، که همواره مقدار کم تر مورد نظر است، روش قطع کردن گفته می شود.

در روش قطع کردن، رقم های سمت راست تقریب را که ارزش مکانی کم تری نسبت به رقم تقریب دارند، با صفر جایگزین می کنیم (یعنی به صفر تبدیل می کنیم) و خود رقم تقریب و همچنین رقم های مرتبه های بالاتر را بدون تغییر می نویسیم.

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	دهم	صدم	هزارم
۵	۶	۷	۳	۲	۸	۴
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۵	۶	۰	۰	۰	۰	۰

به این ترتیب ۳ مقدار تقریبی این عدد با تقریب کم تر از ۱۰۰، برابر ۵۶۰۰ خواهد شد.

به طور مثال وقتی می خواهیم مقدار تقریبی عدد ۵۶۷۳/۲۸۴ را با تقریب کم تر از ۱۰۰، به روش قطع کردن حساب کنیم، با توجه به جدول ارزش مکانی این عدد که در قسمت زیر ملاحظه می کنید، تمامی رقم هایی که در مرتبه ی پایین تری از صدگان قرار دارند؛ یعنی رقم هایی که در مرتبه ی دهگان، یکان، دهم، صدم و هزارم قرار دارند را به صفر تبدیل نموده و بقیه رقم ها را بدون تغییر می نویسیم.

در نمایش تقریبی عددها از علامت استفاده می کنیم و این علامت را « تقریباً مساوی » می خوانیم. مثال:

$$5673 / 284 \approx 5600 \text{ (با تقریب کم تر از صدگان)}$$

می خوانیم « عدد ۵۶۷۳/۲۸۴ با تقریب کم تر از صدگان تقریباً مساوی با ۵۶۰۰ است. »

نکته: در تقریب به روش قطع کردن، همیشه اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن کوچک تر از مقدار رقم تقریب است به طور مثال در تقریب رقم صدگان اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن کوچک تر از صد است و یا در تقریب رقم دهگان، اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن کوچک تر از ده است. به همین دلیل است که از این به بعد به جای عبارت « با تقریب کم تر از صدگان، دهگان، یکان، دهم و ... » از عبارت « با تقریب کم تر از ۱۰۰، ۱۰، ۱، ۰/۱ و ... » استفاده می کنیم.

مثال ۱: مقدار تقریبی هر یک از عددهای زیر را به روش قطع کردن و با تقریب خواسته شده بنویسید.

(الف) $1999/9 = 1900$ (باتقریب کم تراز ۱۰۰)

(ب) $1999/9 = 1990$ (باتقریب کم تراز ۱۰)

(ج) $35/742 = 35$ (باتقریب کم تراز ۱)

(د) $35/742 = 35/7$ (باتقریب کم تراز ۰/۱)

تقریب زدن عددهای کسری

برای تقریب زدن عددهای کسری مانند $\frac{25}{7}$ به روش قطع کردن، ابتدا صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می کنیم، اگر تقسیم را تا یک رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهیم یعنی حاصل را با تقریب کم تراز ۰/۱ به دست آورده ایم و اگر تقسیم را تا دو رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهیم؛ یعنی حاصل را با تقریب کم تراز ۰/۰۱ به دست آورده ایم. به همین ترتیب اگر تقسیم را تا سه رقم اعشار انجام دهیم؛ یعنی حاصل را با تقریب کم تراز ۰/۰۰۱ حساب کرده ایم.

$\begin{array}{r} 25/00 \\ -21 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 050 \\ 049 \\ \hline 001 \end{array}$	$\frac{25}{7} = 3 \frac{4}{7}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{25}{7} = 3 \quad (\text{تقریب کم تراز ۱}) \\ \frac{25}{7} = 3/5 \quad (\text{تقریب کم تراز ۰/۱}) \\ \frac{25}{7} = 3/57 \quad (\text{تقریب کم تراز ۰/۰۱}) \end{array} \right.$
---	--------------------------------	--

در کسرهایی مانند $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{2}$ که مخرج آن ها فقط ۲ و یا فقط ۵ هستند، همه ی تقریب های آن ها مساوی اند زیرا مقدار دقیق تقسیم صورت این کسرها بر مخرج آن ها تا یک رقم اعشار قابل محاسبه است.

مقدار تقریبی $\frac{1}{5}$ با تمام تقریب های کم تراز ۰/۱ یا ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ و ... برابر ۰/۵ است.

مقدار تقریبی $\frac{1}{2}$ با تمام تقریب های کم تراز ۰/۱ یا ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ و ... برابر ۰/۲ است.

تقریب زدن به روش گرد کردن

در سال چهارم دبستان با تقریب زدن آشنا شدید و آموختید که برای تقریب زدن هر عددی با توجه به تقریب داده شده یک عدد رند قبل و یک عدد رند بعد از عدد مورد نظر می نویسیم و از بین آن ها عددی را که به عدد مورد نظر نزدیک تر است، به عنوان مقدار تقریبی عدد در نظر می گیریم. اما امسال می آموزیم که هرگاه بخواهیم مقدار تقریبی عددی را « با تقریب دهگان » و یا به عبارت دیگر، « با تقریب کم تر از ۱۰ » به دست آوریم، باید به رقم یکان عدد دقت کنیم. در صورتی که رقم یکان ۵ یا بیش تر از ۵ باشد (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹)، به رقم دهگان یک واحد اضافه کرده و یکان را صفر می کنیم. اما در صورتی که رقم یکان کم تر از ۵ باشد (یعنی یکی از رقم های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴)، در این صورت دهگان تغییر نمی کند و یکان هم صفر می شود. به مثال های زیر دقت کنید:

$$\begin{array}{l} \text{با تقریب دهگان } 573 = 570 : \text{روش سال ششم} \rightarrow 580 \Rightarrow 573 \Rightarrow 570 : \text{روش سال چهارم} \\ \text{با تقریب دهگان } 1425 = 1430 : \text{روش سال ششم} \rightarrow 1430 \Rightarrow 1425 \Rightarrow 1420 : \text{روش سال چهارم} \end{array}$$

هرگاه بخواهیم مقدار تقریبی عددی را با « تقریب صدگان » و یا به عبارت دیگر « با تقریب کم تر از صد » به دست آوریم، باید به رقم دهگان عدد دقت کنیم. در صورتی که رقم دهگان ۵ و یا بیش تر از ۵ (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹) باشد، به رقم صدگان یک واحد اضافه کرده و یکان و دهگان و قسمت اعشاری را صفر می کنیم. اما اگر رقم دهگان کم تر از ۵ باشد، رقم صدگان تغییر نکرده و یکان و دهگان و قسمت اعشاری به صفر تبدیل می شوند. به مثال های زیر دقت کنید:

$$\begin{array}{l} \text{با تقریب صدگان } 1743 = 1700 : \text{روش سال ششم} \rightarrow 1800 \Rightarrow 1743 \Rightarrow 1700 : \text{روش سال چهارم} \\ \text{با تقریب صدگان } 1352 = 1400 : \text{روش سال ششم} \rightarrow 1400 \Rightarrow 1352 \Rightarrow 1300 : \text{روش سال چهارم} \end{array}$$

روش کلی تقریب زدن به روش گرد کردن

در تمامی مثال هایی که در قسمت قبل ملاحظه نمودید مقدار تقریبی عددها به روش گرد کردن به دست آمده اند. برای تقریب زدن عددها به روش گرد کردن، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱- رقمی را که باید گرد شود، مشخص می کنیم، به طور مثال در تقریب کم تر از ۱۰۰ باید زیر صدگان خط بکشیم.

۲- به اولین رقم جلو (سمت راست) رقم مورد تقریب دقت می کنیم، اگر این رقم ۵ یا بیش تر از ۵ (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸، و ۹) بود، یک واحد به رقم مورد تقریب اضافه می کنیم در غیر این صورت رقم مورد تقریب تغییری نمی کند.

۳- همه ی رقم های سمت راست رقم مورد تقریب را با صفر جایگزین می کنیم و یا به عبارت دیگر به صفر تبدیل می کنیم.

به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف) } 35845 \approx 36000 \text{ (با تقریب کم تر از } 1000 \text{) با تقریب صدگان} \\ \text{5+1}$$

رقم جلو هزارگان (یعنی رقم صدگان)، برابر ۸ است پس یک واحد به رقم هزارگان اضافه نموده و تمامی رقم های یکان، دهگان و صدگان را به صفر تبدیل می کنیم.

$$\text{ب) } 35845 \approx 35800 \text{ (یا با تقریب کم تر از } 100 \text{) با تقریب صدگان} \\ \text{8}$$

رقم جلو صدگان (یعنی دهگان)، برابر ۴ است، پس رقم صدگان را بدون تغییر می نویسیم و تمامی رقم های یکان و دهگان را به صفر تبدیل می کنیم.

ج) $35845 \approx 35850$ (با تقریب دهگان) $4+1$	د) $232/5 = 2320$ (با تقریب یکان) $2+1$
ه) $232/79 = 232/80$ (با تقریب دهم) $7+1$	و) $54/572 = 54/570$ (با تقریب صدم) 7

مثال ۲: مقدار تقریبی عدد $17/999$ با تقریب کم تر از $0/01$ مشخص کنید.

$$17/999 \approx 18/000 = 18$$

نکته:

- ۱- وقتی عددی را گرد می کنیم، منظورمان گرد شده به نزدیک ترین عدد است. اگر رقم مربوط ۵ باشد، رقم مرتبه ی قبلی (از سمت چپ) را یک واحد افزایش می دهیم.
- ۲- در روش گرد کردن گاهی گرد کردن کاهشی (مانند مورد ب) و گاهی گرد کردن افزایشی (مانند مورد الف) می باشد.
- ۳- در روش گرد کردن نیز اختلاف بین هر عدد و مقدار تقریبی آن (یعنی عدد بزرگ تر منهای عدد کوچک تر) همیشه از مقدار تقریب کم تر است.

محاسبه ی مقدار تقریبی کسرها به روش گرد کردن

برای تقریب زدن اعداد کسری به روش گرد کردن، ابتدا مقدار تقسیم صورت کسر بر مخرج آن را تا یک رقم بیش تر از تقریب داده شده به دست می آوریم، یعنی اگر تقریب کم تر از ۰/۱ باشد. باید تقسیم را تا دو رقم اعشار حساب کنیم و سپس عدد به دست آمده را به روش گرد کردن تقریب می زنیم.

مثال ۳: مقدار تقریبی کسر $\frac{27}{7}$ را با تقریب کم تر از ۰/۱ به روش گرد کردن، حساب کنید. (راهنمایی: ابتدا با توجه به این که روش گرد کردن و تقریب کم تر از ۰/۱ می باشد، باید حاصل تقسیم را تا سه رقم اعشار در خارج قسمت حساب کنیم که برای این عمل می توانیم از ماشین حساب هم کمک بگیریم، سپس عدد به دست آمده (یعنی ۳/۸۵۷) را با تقریب داده شده گرد می کنیم.)

$$\begin{array}{r|l} 27 / \dots & 7 \\ - 21 & 3 / 85 \\ \hline 6 & 0 \\ - 5 & 6 \\ \hline 0 & 40 \\ - 0 & 35 \\ \hline 0 & 050 \\ - 0 & 049 \\ \hline 0 & / 001 \end{array}$$

$$\frac{27}{7} = 3 / \underbrace{857}_{+1} = 3 / 86 \quad (\text{با تقریب کم تر از } 0/1)$$

تفاوت بین روش قطع کردن و گرد کردن

در روش قطع کردن، سرعت انجام محاسبات بیشتر است اما در روش گرد کردن، جواب به دست آمده دقیق تر است. لذا استفاده از این روش ها به اهمیت دقت پاسخ و سرعت انجام محاسبات بستگی دارد. در ضمن به یاد داشته باشید که اگر رقم جلوی تقریب کوچکتر از ۵ (یعنی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴) باشد، مقدار تقریبی عدد با تقریب داده شده از هر دو روش یکسان است.

$$\begin{cases} \text{قطع شده با تقریب کم تر از } 1000 \text{ (} 5347 \approx 5300 \text{)} \\ \text{گرد شده با تقریب کم تر از } 1000 \text{ (} 5347 \approx 5300 \text{)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{قطع شده با تقریب کم تر از } 1000 \text{ (} 2764 \approx 2700 \text{)} \\ \text{گرد شده با تقریب کم تر از } 1000 \text{ (} 2764 \approx 2800 \text{)} \end{cases}$$

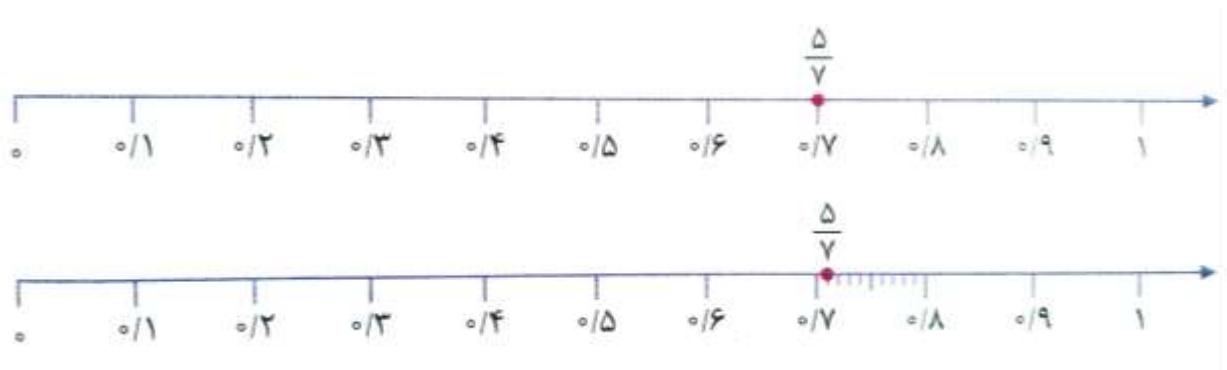
نکته: اگر رقم سمت راست تقریب، کم تر از ۵ باشد، جواب به دست آمده در هر دو روش قطع کردن و گرد کردن یکی می شود.

نمایش تقریبی عددها روی محور

اگر بخواهیم عددی مانند $\frac{5}{7}$ را روی محور نمایش دهیم، به دلیل این که تقسیم یک واحد به ۷ قسمت مساوی کمی سخت است بهتر است که از نمایش تقریبی این عدد روی محور استفاده کنیم. اگر حاصل تقسیم صورت کسر بر مخرج آن را تا یک رقم اعشار در خارج قسمت حساب کنیم، مقدار تقریبی این عدد با تقریب $0/1$ به دست می آید. حال اگر بخواهیم که موقعیت دقیق تری از این عدد روی محور نمایش دهیم، کافی است که تقسیم را تا دو رقم اعشار ادامه دهیم تا مقدار تقریبی عدد با تقریب $0/01$ به دست آید.

به این ترتیب موقعیت جدید از موقعیت قبلی دقیق تر می باشد و به همین ترتیب با پیشروی در تقسیم باز هم موقعیت های دقیق تری نسبت به قبل به دست می آید.

$$\begin{array}{r} 5/00 \quad | \quad 7 \\ -4/9 \quad 0/71 \\ \hline 0/10 \\ 0/07 \\ \hline 0/03 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{7} \approx 0/7 \text{ (با تقریب کم تر از } 0/1) \\ \frac{5}{7} \approx 0/71 \text{ (با تقریب کم تر از } 0/01) \end{array} \right.$$



عدد پی

به مقدار تقریبی عددهای $\frac{22}{7}$ و عدد π (بخوانید عدد پی) تا ۵ رقم اعشار دقت کنید. مقدار تقریبی این دو عدد با تقریب کم تر از ۰/۱ و ۰/۰۱ دقیقا با هم برابر می باشد. لذا می توانیم گاهی اوقات به جای عدد π از کسر $\frac{22}{7}$ هم استفاده کنیم.

$$\frac{22}{7} = 3/14285$$

$$\pi = 3/14159$$

مثال ۴: شعاع دایره ای ۷ سانتی متر است. محیط و مساحت این دایره را حساب کنید. ($\pi = 3/14$)

$$\text{روش اول} \left\{ \begin{array}{l} \text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \pi = 2 \times 7 \times 3/14 = 43/99 \\ \text{مساحت دایره} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \pi = 7 \times 7 \times 3/14 = 153/89 \end{array} \right.$$

$$\text{روش دوم} \left\{ \begin{array}{l} \text{محیط دایره} = 2 \times \cancel{7} \times \frac{22}{\cancel{7}} = 44 \\ \text{مساحت دایره} = 7 \times \cancel{7} \times \frac{22}{\cancel{7}} = 154 \end{array} \right.$$

همان طور که ملاحظه می کنید، زمانی که به جای مقدار تقریبی عدد π از کسر $\frac{22}{7}$ استفاده کردیم، مقادیر محیط و مساحت دایره با اختلاف بسیار ناچیزی نسبت به زمانی که مقدار تقریبی π را تقریبا مساوی ۳/۱۴ در نظر گرفتیم به دست آمد.

درس دوم: اندازه گیری و محاسبات تقریبی

دقت اندازه گیری

به خط کش مقابل دقت کنید.



کوچک ترین قسمتی که روی این خط کش مشخص شده، $0/5$ سانتی متر یا 5 میلی متر است، بنابراین دقت اندازه گیری این خط کش $0/5$ سانتی متر است؛ یعنی این خط کش اندازه های کم تر از $0/5$ سانتی متر یا 5 میلی متر را برای ما مشخص نمی کند. اندازه ی مدادی که روی شکل دیده می شود، بین $3/5$ و 4 سانتی متر است، چون خط کش نمی تواند بین این دو عدد را برای ما مشخص کند و اندازه ی مداد به $3/5$ سانتی متر نزدیک تر است، ما اندازه ی مداد را به طور تقریبی $3/5$ سانتی متر در نظر می گیریم. اختلاف اندازه ی واقعی مداد و عدد $3/5$ ، از $0/5$ سانتی متر کم تر است، بنابراین می گوییم این خط کش اندازه اشیا را با تقریب کم تر از $0/5$ سانتی متر مشخص می کند. در خط کش های معمولی، کوچک ترین قسمتی که روی آن ها مشخص شده، 1 میلی متر است؛ یعنی دقت اندازه گیری این خط کش ها 1 میلی متر است؛ یعنی این خط کش ها اندازه ی اشیا را با تقریب کم تر از 1 میلی متر مشخص می کنند.



برای هر نوع اندازه گیری، با توجه به موضوع و اهمیت آن، از ابزار مناسب استفاده می کنیم تا تقریب موردنظر حاصل شود.

مثال: برای اندازه گیری وزن یک انسان، به ترازویی با دقت تا 1 کیلوگرم نیاز داریم.

برای اندازه گیری دمای بدن انسان، به دماسنجی با دقت تا 1 درجه نیاز داریم.

برای اندازه گیری وزن فلزات و سنگ های گرانبها، به ترازویی با دقت تا $0/1$ گرم نیاز داریم.

در محاسبه های تقریبی، با توجه به شرایط، ابتدا عددها را تقریب می زنیم و سپس محاسبه را انجام می دهیم و یا در بعضی موارد، ابتدا محاسبه را انجام می دهیم و سپس حاصل را تقریب می زنیم.

مثال: قیمت فروش نوعی تخته، متر مربعی ۸۰۰۰ تومان است. قیمت تخته ای به ابعاد $۲/۸۳$ و $۳/۴۴$ متر چند تومان است؟

$$\text{متر مربع } ۲/۸ \times ۳/۴ = ۹/۵۲$$

پاسخ: روش ۱: ابتدا ابعاد تخته را با تقریب کم تر از $۰/۱$ گرد می کنیم و مساحت را حساب می کنیم.

$$\text{متر مربع } ۲/۸۳ \times ۳/۴۴ = ۹/۷۳۵۲$$

روش ۲: ابتدا مساحت تخته را حساب می کنیم و سپس عدد حاصل را با تقریب کم تر از $۰/۰۱$ گرد

$$\begin{aligned} &\text{گرد} \\ ۹/۷۳۵۲ &\approx ۹/۷۴ \\ &۰/۰۱ \end{aligned}$$

می کنیم.

اندازه ی واقعی مساحت:

همان طور که ملاحظه می کنید، در روش دوم مساحت به دست آمده به مساحت واقعی تخته نزدیک تر است؛ بنابراین در این مسئله بهتر است که ابتدا مساحت را به دست آورده و سپس عدد حاصل را تقریب بزینیم.

$$\text{قیمت تخته، تومان } ۹/۷۴ \times ۸۰۰۰ = ۷۷۹۲۰$$

هر یک از عددهای مخلوط زیر را با تقریب کم تر از ۱ گرد کنید.

$$۱۷\frac{۱}{۵}$$

$$۳\frac{۴}{۵}$$

$$۲۹\frac{۷}{۸}$$

پاسخ:

الف) چون $\frac{۱}{۵}$ از نصف تقریب (نصف عدد ۱ یعنی $\frac{۱}{۲}$) کم تر است، بنابراین:

$$۱۷\frac{۱}{۵} = ۱۷ + ۰ = ۱۷$$

ب) چون عدد $\frac{۴}{۵}$ از نصف بیشتر است، بنابراین:

$$۳\frac{۴}{۵} = ۳ + ۱ = ۴$$

چون $\frac{۷}{۸}$ از نصف بیشتر است، بنابراین:

$$۲۹\frac{۷}{۸} = ۲۹ + ۱ = ۳۰$$

ترتیب انجام عملیات

در محاسبات ریاضی، ترتیب انجام عملیات (تقدم محاسبات) به شکل زیر است:

۱- ابتدا حاصل پرانتزها را حساب می کنیم و اگر چندین پرانتز داخل هم باشند، از داخلی ترین پرانتز محاسبه را شروع می کنیم.

۲- بعد از محاسبه ی پرانتزها، عمل های ضرب و تقسیم را انجام می دهیم. (از چپ به راست)

۳- بعد از محاسبه های ضرب و تقسیم، از چپ به راست محاسبه های جمع و تفریق را انجام می دهیم.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad 2 + 3 \times 5 =$$

$$\text{ب)} \quad 18 - 12 \div 2 =$$

$$\text{ج)} \quad 2 + 4 \times (8 - 3) =$$

$$\text{د)} \quad 8 - 12 \div (1/2 + (3/6 \div 2)) =$$

$$\text{الف)} \quad 2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$$

$$\text{ب)} \quad 18 - 12 \div 2 = 18 - 6 = 12$$

$$\text{ج)} \quad 2 + 4 \times (8 - 3) = 2 + 4 \times 5 = 2 + 20 = 22$$

$$\text{د)} \quad 8 - 12 \div (1/2 + (3/6 \div 2)) = 8 - 12 \div (1/2 + 1/4) = 8 - 12 \div 3/4 = 8 - 12 \times 4/3 = 8 - 16 = -8$$

اندازه گیری و محاسبات تقریبی ۲

دقت اندازه گیری

هر وسیله ی اندازه گیری تا حدی می تواند عدد یا مقدار دقیق چیزی را که اندازه می گیریم، نشان دهد. برای مثال، اکثر خط کش هایی که در اختیار دانش آموزان قرار دارد تا واحد میلی متر را نشان می دهد. این خط کش ها طول های کم تر از یک میلی متر را مشخص نمی کنند. بنابراین می گوییم خط کش طول اجسام و یا خط ها را با تقریب کم تر از ۱ میلی متر نشان می دهد. از طرفی چون هر میلی متر، مساوی ۰/۱ سانتی متر است، می توانیم بگوییم که دقت خط کش، با تقریب کم تر از ۰/۱ سانتی متر است.



نکته: برای هر نوع اندازه گیری با توجه به موضوع و اهمیت آن، از وسیله ی اندازه گیری مناسبی استفاده می کنیم تا تقریب مورد نظر ما حاصل شود.

به طور مثال، برای اندازه گیری وزن اشخاص از واحد کیلوگرم استفاده می کنیم. به عبارت دیگر، ترازوها معمولاً وزن اشخاص را با تقریب کم تر از ۱ کیلوگرم نشان می دهد (البته ترازوهای دیجیتال دقت بالاتری دارند) یا برای اندازه گیری وزن یک قطعه طلا از ترازویی استفاده می کنند که دقت آن ۰/۰۱ گرم می باشد. به عبارت دیگر، این گونه ترازوها وزن اجسام را با تقریب کم تر از ۰/۰۱ گرم نشان می دهند.

کاربرد مقدار تقریبی

گاهی اوقات بهتر است اعداد را به صورت تقریبی بیان کنیم تا انجام محاسبه روی آن ها ساده تر شود. در این صورت مقدار محاسبه شده با مقدار واقعی برابر نیست، ولی به آن نزدیک است. به مثال زیر دقت کنید:

$$۵۲۷ \times ۶۷۹ = ۳۵۷۸۳۳$$

همان طور که ملاحظه می کنید حاصل ضرب دو عدد ۵۲۷ و ۶۷۹ دقیقاً مساوی ۳۵۷۸۳۳ شد. حال اگر مقدار دقیق حاصل ضرب مورد نیاز نباشد و فقط بخواهیم مقدار تقریبی آن را به دست آوریم، کافی است که مقدارهای تقریبی این دو عدد را در یک دیگر ضرب کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 527 = 500 \text{ صدگان} \\ 679 = 700 \text{ صدگان} \end{array} \right\} \Rightarrow 527 \times 679 = 500 \times 700 = 350000$$

بنابراین زمانی که هر یک از عددها را با تقریب صدگان گرد کنیم، مقدار تقریبی حاصل ضرب برابر ۳۵۰۰۰۰ خواهد شد که این مقدار نزدیک به جواب واقعی همان ۳۵۷۸۳۳ می باشد. حال اگر عددها را تقریب دهگان گرد می کردیم، جواب تقریبی به دست آمده نسبت به تقریب صدگان دقیق تر خواهد شد.

$$\left. \begin{array}{l} 527 = 530 \text{ دهگان} \\ 679 = 680 \text{ دهگان} \end{array} \right\} \Rightarrow 527 \times 679 = 530 \times 680 = 360400$$

همان طور که ملاحظه می کنید مقدار تقریبی حاصل ضرب دو عدد در این حالت، اختلاف کم تری نسبت به حالت قبل دارد.

محاسبه ی تقریبی

برای انجام محاسبات تقریبی می توانیم از روش های زیر استفاده کنیم:

روش اول: ابتدا عددها را گرد کنیم، سپس محاسبه را انجام دهیم.

روش دوم: ابتدا حاصل را به دست آورده، سپس پاسخ را گرد کنیم.

مثال ۱:

الف: حاصل عبارت $55 - 29 + 44$ را به دست آورید. سپس جواب به دست آمده را با تقریب کم تر از ۱۰ گرد کنید.

$$\begin{array}{l} 73 \\ \cancel{44} + 29 - 55 = 73 - 55 = 18 = 20 \end{array} \quad (\text{با تقریب کم تر از } 10)$$

ب: ابتدا مقدار تقریبی هر یک از عددهای بالا را با تقریب کم تر از ۱۰ به دست آورده، سپس حاصل عبارت را به دست آورید.

$$\begin{array}{l} 44 = 40, \quad 29 = 30, \quad 55 = 60 \\ 44 + 29 - 55 = 40 + 30 - 60 = 70 - 60 = 10 \end{array}$$

همان طور که ملاحظه می کنید، مقدار دقیق این عبارت برابر ۱۸ شد و وقتی که مقدار تقریبی جواب را با تقریب کم تر از ۱۰ گرد می کنیم، حاصل ۲۰ می شود. پس اختلاف مقدار تقریبی با مقدار دقیق ۲ واحد است. اما اگر ابتدا عددها را گرد کنیم و سپس حاصل را به دست آوریم، جواب برابر ۱۰ می شود که اختلاف این عدد با مقدار دقیق برابر $۱۰ - ۱۸ = ۸$ واحد می باشد. پس استفاده از روش اول بهتر است.

نکته: وقتی هم باید عملیات انجام گیرد و هم تقریب بزنیم، برای آن که پاسخ به مقدار واقعی نزدیک تر باشد، باید ابتدا عملیات را انجام دهیم و بعد از آن تقریب بزنیم.

اگر ابتدا حاصل عبارت $۴۴ + ۲۹ - ۵۵$ را به دست آوریم و سپس جواب به دست آمده را با تقریب کم تر از ۱۰ قطع کنیم، خواهیم داشت:

$$(قطع شده با تقریب کم تر از ۱۰) \quad ۴۴ + ۲۹ - ۵۵ = ۷۳ - ۵۵ = ۱۸ = ۱۰$$

حال اگر مقدار تقریبی هر یک از عددها را با روش قطع کردن و با تقریب کم تر از ۱۰ تقریب بزنیم و سپس محاسبه ی عبارت را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$۴۴ = ۴۰, \quad ۲۹ = ۲۰, \quad ۵۵ = ۵۰$$

$$۴۴ + ۲۹ - ۵۵ = ۴۰ + ۲۰ - ۵۰ = ۱۰$$

به این ترتیب حاصل عبارت از هر دو روش یکسان خواهد شد. لذا توصیه می کنیم که در محاسبات تقریبی برای این که جواب به دست آمده به مقدار واقعی نزدیک تر باشد از روش گرد کردن استفاده کنید.

مثال ۲: الف) حاصل ضرب $۱۱/۹ \times ۲۵/۲$ را به دست آورید.

$$۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۲۹۹/۱۸$$

ب) حاصل ضرب $۱۱/۹ \times ۲۵/۲$ را با قطع اعشار و با تقریب کم تر از ۱ به دست آورید.

$$۲۵/۲ = ۲۵, \quad ۱۱/۹ = ۱۱ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۲۵ \times ۱۱ = ۲۷۵$$

ج) حاصل ضرب $۱۱/۹ \times ۲۵/۲$ را ابتدا با قطع اعشار و تقریب کم تر از ۱۰ به دست آورید.

$$۲۵/۲ = ۲۰, \quad ۱۱/۹ = ۱۰ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰$$

د) در کدام حالت، اختلاف با پاسخ واقعی کم ترین مقدار است؟ همان طور که دیده می شود، در حالت (ب)، یعنی حالتی که رقم مورد تقریب کوچک تر است، مقدار تقریبی به مقدار واقعی نزدیک است.

اختلاف جواب ها بسیار زیاد می باشد و جواب در حالت (ب)، به مقدار واقعی نزدیک تر است. لذا باید در محاسبات خود از تقریب مناسب استفاده کنیم، همچنین اگر به جای روش قطع کردن، از روش گرد کردن استفاده می کردیم، جواب ها با اختلاف بسیار کم تری نسبت به روش قطع کردن به دست می آمدند.

$$۲۵/۲ = ۱۲ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۱۲ \times ۱۱/۹ = ۱۳۲/۹ = ۱۴ \rightarrow ۲۵/۲ = ۱۴$$

$$۲۵/۲ = ۱۰ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۱۰ \times ۱۱/۹ = ۱۱۰/۹ = ۱۲ \rightarrow ۲۵/۲ = ۱۲$$

ترتیب انجام عملیات

در انجام عملیات محاسباتی، باید به ترتیب زیر عمل کنیم

(۱) محاسبه ی عبارت داخل پرانتزها

(۲) انجام ضرب یا تقسیم از چپ به راست عبارت، هر کدام که زودتر دیده شد.

(۳) انجام جمع یا تفریق از چپ به راست عبارت، هر کدام که زودتر دیده شد.

بنابراین اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا باید ضرب ها و تقسیم ها و سپس جمع ها و تفریق ها را از چپ به راست عبارت انجام دهیم.

مثال ۳: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

ابتدا ضرب را انجام می دهیم

$$\text{الف) } ۵/۲ + ۱/۳ \times ۷/۱ = ۵/۲ + (۱/۳ \times ۷/۱) = ۵/۲ + ۷/۳ = ۱۴/۶ + ۷/۳ = ۱۴/۶ + ۱۴/۶ = ۲۸/۶ = ۱۴/۳$$

حالا ضرب را انجام می دهیم ابتدا تقسیم را انجام می دهیم

$$\text{ب) } ۲۰ - ۲۰ \div ۴ \times ۲ = ۲۰ - (۲۰ \div ۴) \times ۲ = ۲۰ - (۵ \times ۲) = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰$$

(راهنمایی: دقت داشته باشید که چون در این عبارت پرانتزی وجود ندارد، پس ابتدا به سراغ محاسبه ی تقسیم و سپس ضرب می رویم (چون تقسیم زودتر از ضرب دیده می شود) و در آخر تفریق را انجام می دهیم.)

$$\text{ج) } 3/7 - 0/3 \times (1/4 + 0/6) = 3/7 - (0/3 \times 2) = 3/7 - 0/6 = 3/7$$

$$\text{د) } (5\frac{1}{4} - 3\frac{3}{10}) \div (7/1 + 0/7) =$$

$$\text{محاسبہ اولیٰ پرائنٹر: } 5\frac{1}{4} - 3\frac{3}{10} = 2\frac{1 \times 5}{4 \times 5} - \frac{3 \times 2}{10 \times 2} = 2\frac{5}{20} - \frac{6}{20} = \frac{45}{20} - \frac{6}{20} = \frac{39}{20}$$

$$\text{محاسبہ دومین پرائنٹر: } 7/1 + 0/7 = 7/1 = \frac{7 \times 10}{10} = \frac{70}{10}$$

$$\text{محاسبہ کل عبارت: } \frac{39}{20} \div \frac{70}{10} = \frac{39}{20} \times \frac{10}{70} = \frac{1}{4}$$

مریم عزیز