

خلاصه درس و نکات ریاضی فصل اول: کسر متعارفی (ششم تیزهوشان)

تعریف: اگر دو عدد صحیح مانند a و b که در آن $b \neq 0$ (b عددی غیر صفر است) داشته باشیم، آن را به صورت

$\frac{a}{b}$ می‌نویسیم و به آن یک کسر متعارفی می‌گوییم که در آن a را صورت کسر و b را مخرج کسر می‌نامیم.

نکته:

۱- مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد.

۲- هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به صورت کسر $\frac{a}{1}$ نمایش داد.

۳- کسره‌های $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ را به ترتیب نصف، ثلث، ربع و خمس می‌نامیم.

۴- کسری که صورت آن صفر باشد، برابر صفر است.

مثال:

$$\frac{0}{12} = 0, \quad \frac{0}{5 \times 12} = 0, \quad \frac{0}{\frac{7}{8} + 4} = 0$$

انواع کسر:

کسره‌های کوچک‌تر از واحد: کسرهایی که صورتشان از مخرجشان کوچک‌تر است.

مثال:

$$\frac{5}{9} < 1, \quad \frac{1}{7} < 1$$

کسره‌های برابر واحد: کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها برابر باشد.

مثال:

$$\frac{12}{12} = 1, \quad \frac{6}{6} = 1, \quad \frac{1000}{1000} = 1$$

کسره‌های بزرگ‌تر از واحد: کسرهایی که صورتشان از مخرجشان بزرگ‌تر است.

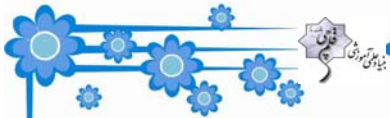
مثال:

$$\frac{8}{7} > 1, \quad \frac{3015}{3011} > 1$$

نکته: از بین کسره‌های گفته شده، تنها کسری را می‌توان به عدد مخلوط تبدیل کرد که بزرگ‌تر از واحد باشد.

مثال:

$$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}, \quad \frac{35}{22} = 1\frac{13}{22}$$



«ششم تیزهوشان»

روش تبدیل کسر متعارفی بزرگ تر از واحد به عدد مخلوط:

مثال: $\frac{22}{7}$

$$\frac{22}{7} = \frac{21+1}{7} = \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3\frac{1}{7}$$

روش اول:

$$\begin{array}{r} 22 \quad | \quad 7 \\ -21 \quad | \quad 3 \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$$

روش دوم:

* از روش اول می توان فهمید که هر عدد مخلوط را می توان به صورت حاصل جمع یک عدد صحیح و یک کسر نوشت.

روش تبدیل عدد مخلوط به کسر متعارفی:

مثال:

$$8\frac{2}{5} = \frac{(8 \times 5) + 2}{5} = \frac{42}{5}$$

تست: کدام تساوی درست است؟

$$1\frac{99}{100} = \frac{199}{100} \quad (4)$$

$$2\frac{0}{7} = 0 \quad (3)$$

$$0\frac{7}{15} = 0 \quad (2)$$

$$3\frac{3}{5} = \frac{33}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی «۴»:

درستی سایر گزینه ها به صورت زیر است:

$$\text{گزینه ی «۱» : } 3\frac{3}{5} = \frac{(3 \times 5) + 3}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\text{گزینه ی «۲» : } 0\frac{7}{15} = \frac{(0 \times 15) + 7}{15} = \frac{7}{15}$$

$$\text{گزینه ی «۳» : } 2\frac{0}{7} = \frac{(2 \times 7) + 0}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

مقایسه ی کسرها:

(۱) کسرهایی با مخرج های برابر: از دو کسر که دارای مخرج های مساوی باشند، کسری بزرگ تر است که صورت آن بزرگ تر باشد.

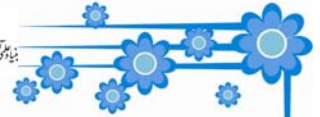
مثال:

$$\frac{3}{5} > \frac{2}{5} \quad , \quad \frac{4}{7} > \frac{3}{7}$$

(۲) کسرهایی با صورت های برابر: از دو کسر که دارای صورت های مساوی باشند، کسری بزرگ تر است که مخرج آن کوچک تر باشد.

مثال:

$$\frac{7}{3} > \frac{7}{5} \quad , \quad \frac{9}{4} < \frac{9}{2}$$



۳) کسرهایی با صورت و مخرج برابر: تمامی کسرهایی که صورتشان با مخرجشان برابر است باهم مساوی اند.

$$1 = \frac{5}{5} = \frac{25}{25} = \frac{1000}{1000} = \dots$$

۴) کسرهایی با صورت و مخرج نابرابر: اگر دو کسر نه مخرجشان باهم و نه صورتشان باهم مساوی باشد، ابتدا

آن‌ها را هم‌مخرج کرده و سپس مانند حالت اول آن‌ها را باهم مقایسه می‌کنیم.

مثال:

$$\frac{2}{5} \square \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}, \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \Rightarrow \frac{6}{15} > \frac{5}{15} \Rightarrow \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$$

نکته ۱: برای پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک می‌توانید کسرهایی مساوی با یک کسر را بنویسید. در کسرهایی مساوی

کوچک‌ترین مخرجی که به مخرج کسرهایی دیگر بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین مخرج مشترک نام دارد.

نکته ۲: هم‌چنین برای پیدا کردن کوچک‌ترین مخرج مشترک می‌توانیم از روش تعیین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

استفاده کنیم:

مثال:

$$\text{دو کسر } \frac{1}{24} \text{ و } \frac{5}{18} \text{ را مقایسه کنید.}$$

ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$24 \text{ های مقسوم‌علیه‌ها} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$18 \text{ های مقسوم‌علیه‌ها} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \Rightarrow \text{مقسوم‌علیه‌های مشترک} = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow 6 = \text{بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک}$$

$$24 = 6 \times 4 \quad \text{و} \quad 18 = 6 \times 3 \Rightarrow \text{مخرج مشترک} = 6 \times 4 \times 3 = 72$$

$$\frac{1}{24} \square \frac{5}{18} \Rightarrow \frac{3}{72} < \frac{20}{72}$$

نکته ۳: روش کلی مقایسه‌ی کسرها: روش «طرفین – وسطین» یک روش کلی برای مقایسه‌ی دو کسر است.

پیدا کردن یک کسر بین دو کسر:

$$(1) \text{ اگر } \frac{a}{b} \text{ و } \frac{c}{d} \text{ دو کسر باشند، آن‌گاه کسر } \frac{a+c}{b+d} \text{ بین آن دو قرار دارد.}$$

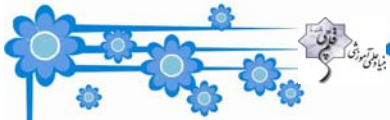
مثال:

$$\frac{1}{8} < \frac{2}{10} < \frac{1}{2}$$

(۲) میانگین گرفتن:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{5}{12} < \frac{1}{3}$$

مثال:



ششم تیزهوشان

۳) هم‌مخرج کردن:

$$\frac{1}{2} < ? < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

* **معکوس یک کسر:** برای نوشتن معکوس یک کسر (مخالف صفر) جای صورت و مخرج کسر را باهم عوض می‌کنیم.

معکوس عددی مانند a را با $\frac{1}{a}$ نشان می‌دهیم.

نکته: حاصل ضرب هر عدد در معکوس آن برابر یک می‌شود.

$$a \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{a} \Rightarrow a \times \frac{1}{a} = 1$$

جمع و تفریق کسرها:

۱- جمع و تفریق کسرها با مخرج‌های مساوی:

مثال:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3-1+5}{4} = \frac{7}{4}$$

۲- جمع و تفریق کسرها با مخرج‌های نابرابر: ابتدا کسرها را هم‌مخرج کرده، سپس یکی از مخرج‌ها را نوشته، صورت‌ها را

باهم جمع یا تفریق می‌کنیم.

مثال:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} - \frac{1}{6} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} - \frac{6}{36} = \frac{15+14-6}{36} = \frac{23}{36}$$

جمع و تفریق عددهای مخلوط: برای جمع و تفریق عددهای مخلوط، ابتدا قسمت‌های صحیح را باهم و قسمت‌های کسری را

باهم جمع یا از هم کم می‌کنیم. سپس حاصل این دو قسمت را باهم جمع می‌کنیم تا پاسخ عبارت به دست آید و در پایان جواب را تا جایی که ممکن است ساده می‌کنیم.

مثال:

$$3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} - 2\frac{1}{12} = (3+1-2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = 2 + \frac{6}{12} + \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = 2\frac{8}{12} = 2\frac{2}{3}$$

ضرب و تقسیم کسرها:

۱- برای ضرب چند کسر، صورت‌ها را درهم ضرب کرده، حاصل را در صورت کسر حاصل قرار می‌دهیم و مخرج‌ها را نیز

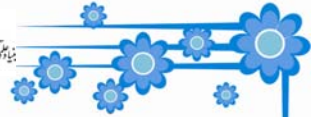
درهم ضرب کرده و آن را در مخرج کسر حاصل قرار می‌دهیم.

مثال:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 4 \times 1}{3 \times 5 \times 3} = \frac{8}{45}$$

نکته: در ضرب کسرها بهتر است در صورت امکان ابتدا کسرها را ساده کنیم، سپس عمل ضرب را انجام دهیم. برای این کار

صورت هر کسر با مخرج خودش یا با مخرج کسر دیگر (در صورت داشتن عامل مشترک) ساده می‌شوند.



مثال:

$$\frac{1}{\cancel{18}} \times \frac{1}{\cancel{5}} \times \frac{2}{1} = \frac{1 \times 1 \times 2}{5 \times 1 \times 1} = \frac{2}{5}$$

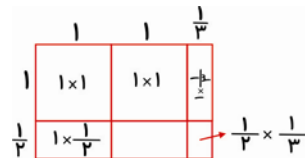
ضرب اعداد مخلوط: ابتدا اعداد مخلوط را به صورت کسره‌های متعارفی در آورده، سپس مانند ضرب کسرها عمل می‌کنیم.

مثال:

$$3\frac{3}{4} \times 2\frac{4}{7} = \frac{15}{4} \times \frac{18}{7} = \frac{15 \times 9}{2 \times 7} = \frac{135}{14}$$

ضرب دو عدد مخلوط به روش مساحتی:

مثال: پاسخ $2\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2}$ را به کمک مساحت پیدا کنید.



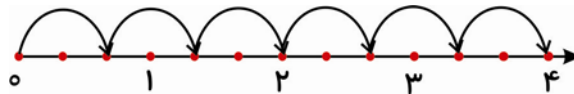
$$2\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2} = 1 + 1 + (1 \times \frac{1}{3}) + (1 \times \frac{1}{2}) + (1 \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} \times \frac{1}{2})$$

$$= 3 + \frac{3}{6} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

تقسیم کسرها:

۱- تقسیم عدد صحیح بر کسر (با استفاده از محور):

مثال: به کمک محور حاصل $4 \div \frac{2}{3}$ را به دست آورید.



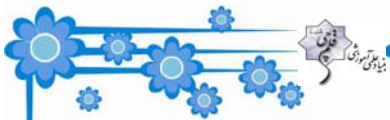
توضیح: هر واحد را به ۳ قسمت (عدد مخرج) تقسیم می‌کنیم. سپس تعداد $\frac{2}{3}$ ها را در ۴ واحد می‌شماریم.

$$4 \div \frac{2}{3} = 6$$

۲- تقسیم کسر بر عدد صحیح (با استفاده از رسم شکل):

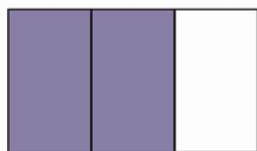
مثال:

$\frac{2}{3} \div 5$ را به کمک رسم شکل به دست آورید.

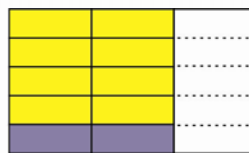


ششم تیزهوشان

الف) با توجه به این که $\frac{2}{3}$ از واحد کوچک تر است، ابتدا یک واحد کامل رسم کرده و آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و $\frac{2}{3}$ آن را رنگ می کنیم.



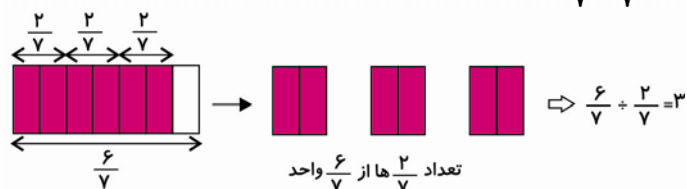
ب) سپس قسمت رنگ شده را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می کنیم.



حاصل تقسیم (قسمت رنگ شده) با توجه به شکل برابر $\frac{2}{15}$ است.

۳- تقسیم کسر بر کسر (با استفاده از رسم شکل)

مثال: به کمک رسم شکل حاصل $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$ را به دست آورید.



نکته ۱: در تقسیم دو کسر، پس از هم‌مخرج کردن کسرها، می توان با تقسیم صورت کسر اول به صورت کسر دوم حاصل عبارت را به دست آورد.

مثال:

$$\frac{4}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{4 \times 7}{3 \times 5} \div \frac{3 \times 5}{21} = \frac{28}{21} \div \frac{15}{21} = \frac{28}{15}$$

نکته ۲: برای تقسیم یک کسر بر کسر دیگر، کافی است کسر اول را نوشته در معکوس کسر دوم ضرب کنید.

مثال:

$$\frac{6}{35} \div \frac{4}{7} = \frac{6}{35} \times \frac{7}{4} = \frac{3}{10}$$