

به نام همه ی نام های او

فصل ۷ ریاضی پنجم: آمار و احتمال



این فصل شامل ۳ درس است. در درس اول با عنوان **جمع آوری و نمایش داده ها** به روش های مختلف جمع آوری و نمایش داده ها اشاره شده است. در درس دوم با عنوان **میانگین**، مفهوم میانگین به عنوان حد وسط داده ها به همراه روش های محاسبه آن مطرح شده است. **احتمال**، عنوان درس سوم این فصل می باشد که در آن، ضمن یادآوری نکات مربوط به سال های گذشته، به مفهوم بازی شانسی عادلانه و ناعادلانه اشاره شده است.

آمار و احتمال

جنگل، پناهگاه انواع جانوران و زیستگاه گونه های مختلف گیاهی است. همچنین، نقش مهمی در جلوگیری از فرسایش خاک و آلودگی آب دارد. داده ها نشان می دهند که بونش جنگلی در کشور ما در حال کم شدن است. خوب است فکر کنیم که چگونه می توانیم به حفظ جنگل ها کمک کنیم.

پیکار گلرنگ - استان مازندران

درس اول: جمع آوری و نمایش داده ها

داده: داده ها مقدارها یا اطلاعات عددی هستند که در مورد موضوعات مختلف به دست می آوریم. (جمع آوری می کنیم) برای جمع آوری داده ها از روش های مختلفی می توانیم استفاده کنیم.

روش های جمع آوری داده ها:

❖ مشاهده

❖ پرسیدن

❖ استفاده از پرسش نامه

❖ مراجعه به کتاب ها و سایت ها

❖ اندازه گیری

به عنوان مثال؛ اعداد ۲۱، ۲۰، ۲۱، ۲۰، ۲۲، ۱۹، ۲۰ و ۱۸ داده های ما از اندازه گیری دمای هوا در مدت یک هفته می باشند. (استفاده از روش اندازه گیری برای جمع آوری داده ها)

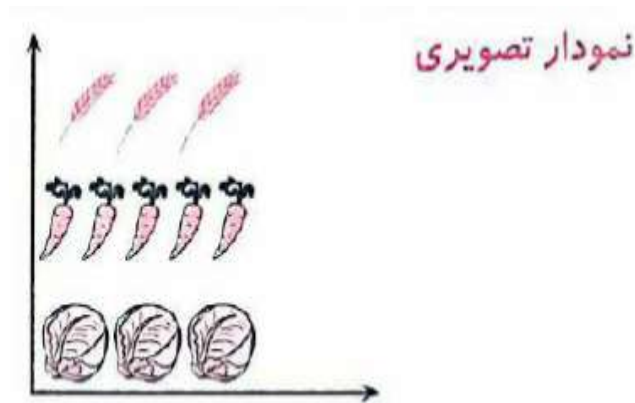
برای آنکه داده های عددی جمع آوری شده، راحت تر مورد استفاده قرار بگیرند؛ آنها را در یک جدول نظامدار قرار می دهیم که به آن **جدول داده ها** می گویند. در ادامه، برای نمایش کاربردی و هر چه بهتر داده ها، آنها را به صورت **نمودار** نشان می دهیم. ویژگی اصلی نمودار - در مقایسه با جدول داده ها - این است که اطلاعات بیشتری را در زمان کمتری به مخاطب انتقال می دهد.

انواع نمودارها

نمودارها انواع مختلف دارند. آنچه در استفاده از نمودارها اهمیت دارد، استفاده از نمودار مناسب برای موضوع مورد بررسی است.

۱. نمودار تصویری

معمولا برای نمایش داده هایی که به جای مقدار واقعی، با مقدارهای تقریبی نشان داده می شوند، استفاده می گردد. مثل جمعیت استان یا تولید گندم در یک استان و ... در نمودار تصویری، معمولا از تصویر حقیقی موضوع مورد بررسی یا یک نماد دیگر استفاده می شود که هر تصویر بیانگر تعداد یا مقدار مشخصی از یک داده است. - مثلا تصویر یک سیب نشانگر ۱ تن از این میوه - البته همان طور که اشاره شد، این نمودارها، دقت و صراحت نمودارهای دیگر را ندارند.

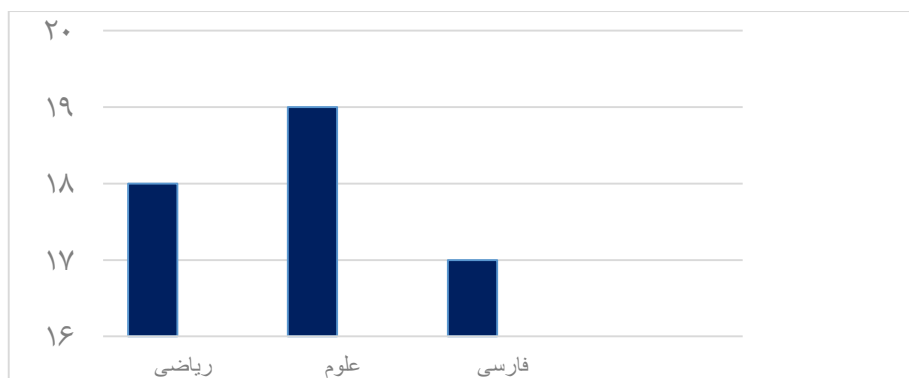


۲. نمودار ستونی

معمولا برای مقایسه داده ها مورد استفاده قرار می گیرد. همچنین بیشترین و کمترین داده نیز از روی ارتفاع ستون ها قابل تشخیص می باشد. برای رسم نمودار ستونی به این صورت عمل می کنیم؛

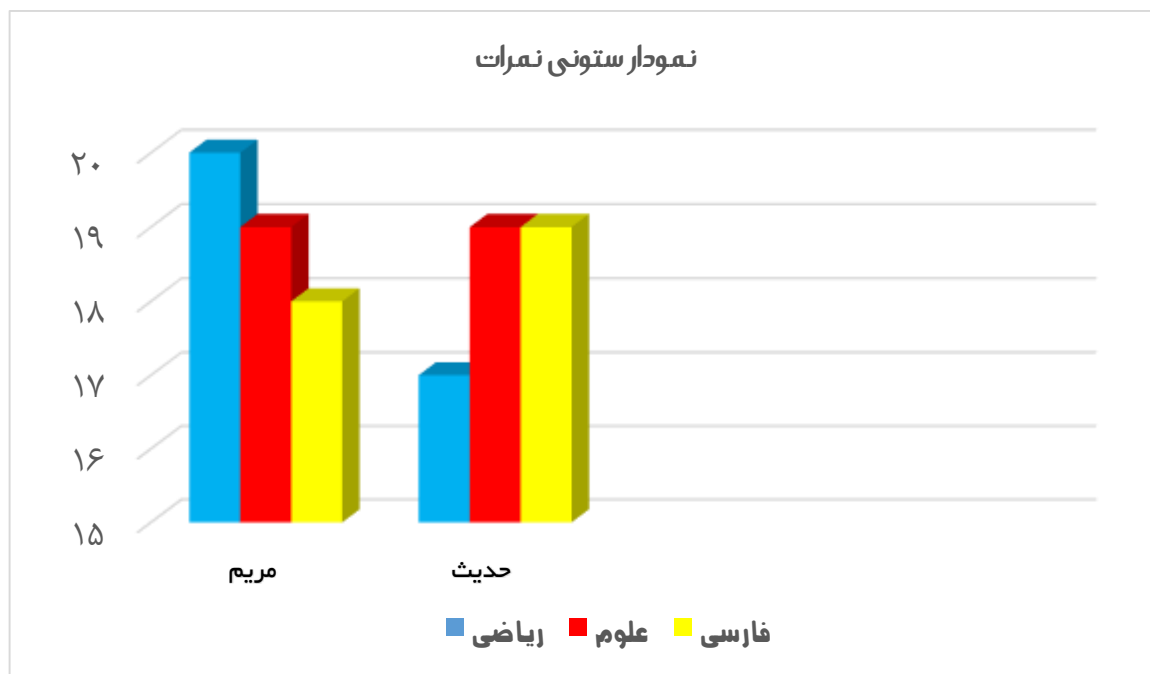
در مرحله اول دو محور عمود بر هم رسم می کنیم. روی محور افقی موضوع داده ها و در محور عمودی، اطلاعات عددی را می نویسیم. در مرحله ی بعدی، برای هر یک از موضوعات، ستونی به ارتفاع عدد مربوط به آن در جدول داده ها رسم می کنیم. نکته ای که می توان اضافه کرد این است که اعداد روی محور عمودی، لازم نیست که حتما از صفر شروع شود.

مثال: نمرات حسام در دروس ریاضی، علوم و فارسی به ترتیب ۱۸، ۱۹ و ۱۷ است. نمودار ستونی مربوط به آن را رسم کنید.



نکته بعدی هم این است که ما می توانیم چند موضوع مختلف را در یک نمودار ستونی مورد بررسی قرار دهیم. مثال: لیست نمرات مریم و حدیث در دروس ریاضی، علوم و فارسی در جدول زیر آمده است. نمودار ستونی آن را رسم کنید.

حدیث			مریم		
فارسی	علوم	ریاضی	فارسی	علوم	ریاضی
۱۹	۱۹	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰



از نمودار ستونی می توان برای محاسبه ی میانگین نیز استفاده کرد که در مبحث میانگین اشاره می شود.

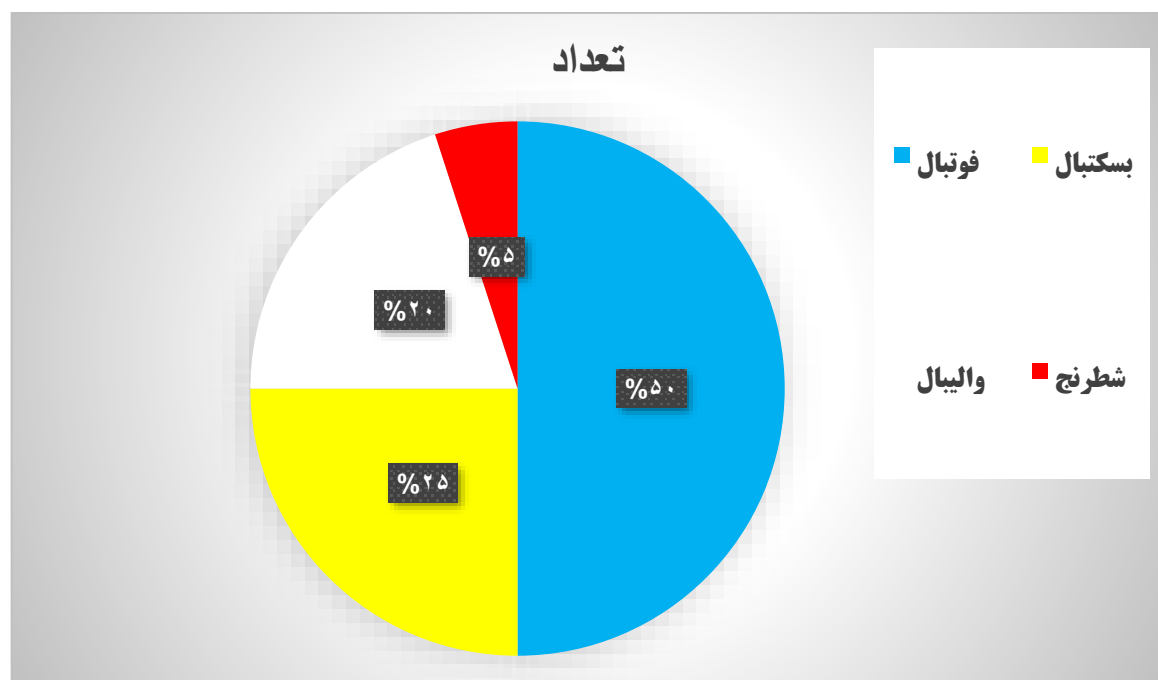
۳. نمودار دایره ای

نمودار دایره ای برای نشان دادن تعداد داده ها نسبت به کل داده ها مورد استفاده قرار می گیرد. به عبارت دیگر وقتی می خواهیم مشخص کنیم که یک مقدار مشخص، چگونه به قسمت های کوچکتر تقسیم شده است؛ از نمودار دایره ای کمک می گیریم. در نمایش نمودار دایره ای، معمولا از درصد استفاده می کنیم؛ اما به صورت نسبت و درجه نیز می توانیم مطرح کنیم. برای رسم نمودار دایره ای نیز به این صورت عمل می کنیم که ابتدا دایره ای رسم کرده و با توجه به مجموع داده ها، آن را به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. در مرحله بعد، نسبت تعداد هر یک از داده ها، به کل داده ها را مشخص می کنیم و در صورت نیاز آن را به درصد یا درجه (از ۳۶۰) تبدیل می کنیم. و نهایتا به کمک همین نسبت هایی که مشخص کردیم، بخشی از دایره را به آن داده اختصاص می دهیم.

مثال: تعداد دانش آموزان مدرسه هجرت که در هر یک از رشته های ورزشی ثبت نام کرده اند، در جدول زیر مشخص شده است. نمودار دایره ای مربوط به آن را رسم کنید.

رشته ورزشی	فوتبال	بسکتبال	والیبال	شطرنج
تعداد شرکت کنندگان	۵۰	۲۵	۲۰	۵

$$\frac{۵۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰\% = ۵۰\% \quad \frac{۲۵}{۱۰۰} \times ۱۰۰\% = ۲۵\% \quad \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰\% = ۲۰\% \quad \frac{۵}{۱۰۰} \times ۱۰۰\% = ۵\%$$

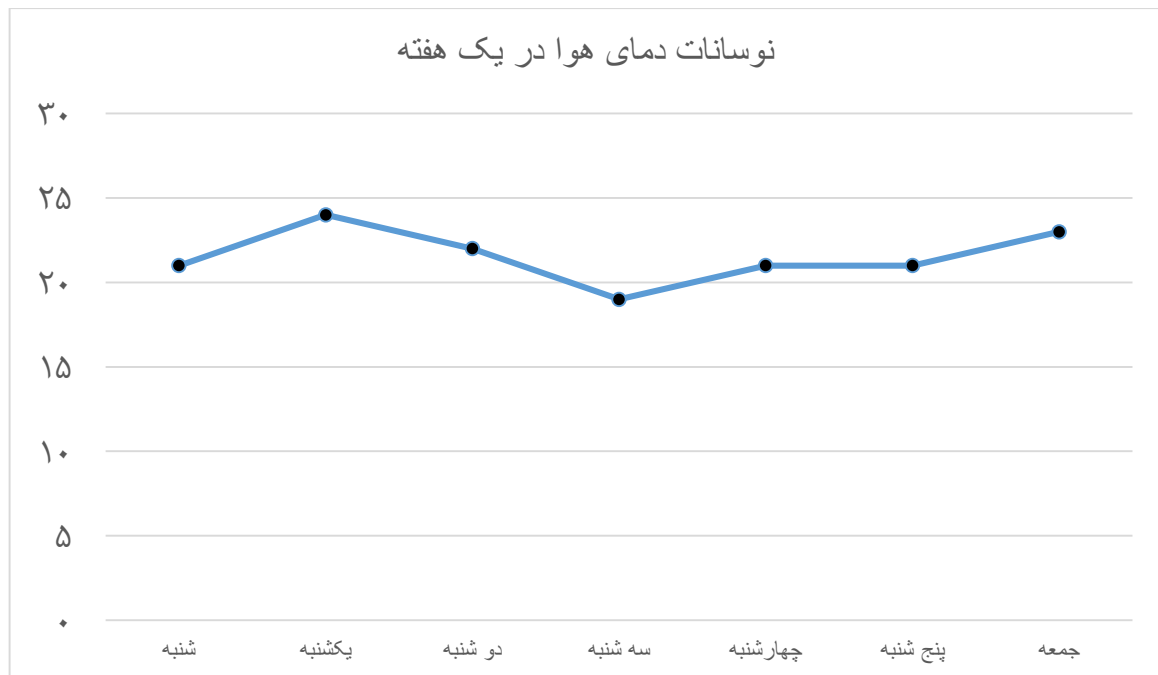


۴. نمودار خط شکسته

نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در بازه ی زمانی مشخص - مخصوصاً در مسائل مالی و تغییرات قیمت ارز و ... - استفاده می شود. مانند رسم نمودار ستونی، دو محور عمود بر هم رسم می کنیم؛ روی محور افقی موضوع داده ها و روی محور عمودی هم اطلاعات عددی را می نویسیم. سپس برای هر موضوع از روی محور افقی، با نقطه چین به سمت بالا - روی خط راست عمود - ادامه می دهیم و همین کار را از روی محور عمودی، برای عدد مربوط به همان موضوع به سمت راست انجام می دهیم. (بهتر است که از کاغذ شطرنجی استفاده کنیم) در واقع از روی موضوع، یک خط عمودی و از روی عدد مربوط به آن، یک خط افقی رسم می کنیم. محلی که دو خط به هم می رسند را با یک نقطه پر رنگ مشخص می کنیم و همین کار را برای همه ی موضوع ها و اعداد مربوط به خودشان تکرار می کنیم. در انتها، نقاط مشخص شده را به هم وصل می کنیم و نمودار خط شکسته ما به دست می آید. در نمودار خط شکسته، نشان دهنده تغییرات افزایشی، — نشانگر عدم تغییر و \ / نشان دهنده تغییرات کاهشی است.

مثال: محسن میانگین دمای هوا در یک هفته را در جدول زیر یادداشت کرده است. نمودار خط شکسته آن را رسم می کنیم.

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
دما	۲۱	۲۴	۲۲	۱۹	۲۱	۲۱	۲۳



درس دوم: میانگین

میانگین یعنی معدل و متوسط داده ها. به عبارتی نسبت مجموع داده ها به تعداد آن ها.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$$

$$\text{تعداد} \times \text{میانگین} = \text{مجموع}$$

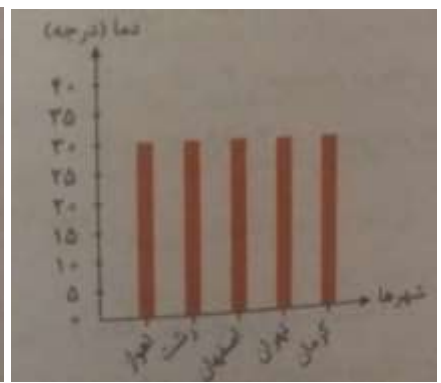
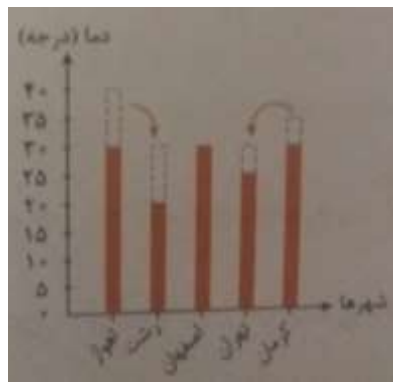
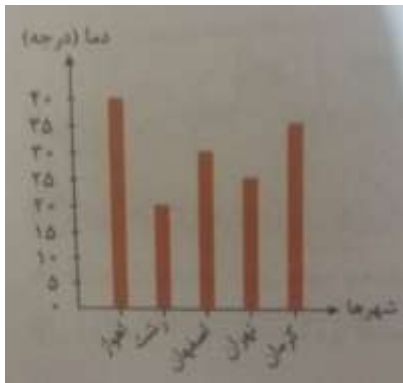
$$\text{مجموع} = \frac{\text{تعداد}}{\text{میانگین}}$$



پس برای به دست آوردن میانگین تعدادی عدد، مجموع آنها را بدست آورده و حاصل را بر تعداد آنها تقسیم می کنیم. اگر به جای تک تک اعدادی که داریم (تک تک داده ها)، میانگین آن ها را در نظر بگیریم، مجموع اعداد تغییری نخواهد داشت.

محاسبه میانگین با کمک به نمودار ستونی

در نمودار ستونی می توان با جابه جایی ستون ها و در کل، هم اندازه کردن آنها، میانگین را حساب می کنیم.



میانگین اعداد بزرگ

استفاده از روش کلی محاسبه میانگین برای اعداد بزرگتر، کاری زمان بر و البته با ضریب خطای بالاست. (انجام محاسبات و عملیات روی اعداد بزرگتر مخصوصاً برای دانش آموزان، سخت تر هست)

روشی که می توانیم برای محاسبه میانگین تعدادی اعداد بزرگ به کار ببریم، استفاده از میانگین فرضی است. به این صورت که عدد دلخواهی را به عنوان میانگین اعداد در نظر می گیریم. سپس میانگین فرضی را به ترتیب از همه ی داده ها کم می کنیم تا اختلاف تک تک اعداد با میانگین فرضی به دست آید. در نهایت میانگین این اختلاف ها - که شامل اعداد کوچکتر هست و به راحتی محاسبه می شود - را حساب کرده و آن را با میانگین فرضی جمع می کنیم. عدد نهایی میانگین داده های اصلی ما خواهد بود. البته با توجه به پایه ی تدریس و عدم آشنایی دانش آموزان با اعداد صحیح و همچنین راحتی کار، **کوچکترین داده** را به عنوان میانگین فرضی در نظر می گیریم. بررسی نکته مطرح شده با مثال زیر، مطلب ذکر شده را روشن تر می کند.

مثال: میانگین اعداد ۲۰۵۷، ۲۰۵۱، ۲۰۴۹، ۲۰۵۹، ۲۰۶۴ را محاسبه می کنیم. جدا از روش حل معمول؛ که مجموع اعداد را محاسبه کرده و بر تعداد آن ها تقسیم کنیم؛ روش بالا را به کار می بریم:



حالا میانگین اختلاف ها را به دست می آوریم:

$$\frac{۱۵+۲+۰+۱۰+۱۵}{۵} = \frac{۳۵}{۵} = ۷$$

در نهایت، میانگین اختلاف ها را به کوچکترین داده (میانگین فرضی) اضافه می کنیم تا میانگین اعداد اصلی حاصل شود؛

$$۲۰۴۹ + ۷ = ۲۰۵۶$$

در واقع مزیت این روش این است که به جای محاسبه میانگین اعداد بزرگ، میانگین اعداد کوچکتری را محاسبه می کنیم.

برخی از خواص میانگین حسابی

میانگین تعدادی عدد ثابت، همان عدد ثابت است. مثلا میانگین اعداد ۴،۴،۴،۴، همان عدد ۴ می شود. با اضافه و کم کردن یک مقدار ثابت به هر یک از داده ها، میانگین آن داده ها هم به همان اندازه اضافه یا کم می شود.

مثال:

$$\begin{array}{ccc} ۸, ۱۰, ۱۲, ۷, ۵, ۱۸ & \xrightarrow[\text{عدد ۴ جمع می کنیم}]{\text{هر یک از داده ها را با}} & ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۱, ۹, ۲۲ \\ \text{میانگین حسابی} = \frac{۸+۱۰+۱۲+۷+۵+۱۸}{۶} = ۱۰ & & \text{میانگین حسابی} = \frac{۱۲+۱۴+۱۶+۱۱+۹+۲۲}{۶} = ۱۴ \\ & & \xrightarrow{+۴} \end{array}$$

اگر تمام عددها را در عددی ثابت و غیر صفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، میانگین اعداد نیز در همان عدد ضرب یا بر همان عدد تقسیم می شود:

با یک مثال ساده بررسی می کنیم:

میانگین اعداد ۷، ۱، ۳، ۵ را به دست آورید و بگویید اگر همه ی اعداد را در ۵ ضرب کنیم، میانگین اعداد چه تغییری می کند؟

$$\frac{۵+۳+۱+۷}{۴} = ۴$$

حالا هر کدام از اعداد را ۵ برابر کرده و میانگین اعداد جدید را پیدا می کنیم. انتظار داریم میانگین هم ۵ برابر شده و عدد ۲۰ به دست بیاید.

$$۵ \times ۵ = ۲۵ \quad ۳ \times ۵ = ۱۵ \quad ۱ \times ۵ = ۵ \quad ۷ \times ۵ = ۳۵$$

حالا اگر میانگین اعداد جدید را به دست بیاوریم؛

$$۲۵ + ۱۵ + ۵ + ۳۵ = ۸۰ \longrightarrow ۸۰ \div ۴ = ۲۰$$

میانگین یک سری از اعداد منظم برابر است با میانگین کوچکترین و بزرگترین آنها

سری اعداد منظم، اعدادی هستند که در آنها فاصله ی هر دو عدد متوالی از هم به یک اندازه است. به عبارت دیگر، اعداد متوالی که فاصله آنها از هم، یک مقدار ثابت است. میانگین اعداد منظم در حالتی که تعداد اعداد فرد باشد، همان عددی خواهد بود که درست در وسط اعداد قرار گرفته است. اگر تعداد اعداد منظم زوج باشد، میانگین دو عدد وسطی، میانگین کل اعداد خواهد بود. در حالت کلی هم؛ میانگین دو عدد ابتدا و انتهای (میانگین کوچک ترین و بزرگترین عدد)، میانگین کل اعداد ما خواهد بود.

مثال: میانگین اعداد زیر را حساب می کنیم:

۱ ۳ ۵ ... ۱۹۷

طبق نکته ی بالا در رابطه با میانگین اعداد منظم، کافی است که میانگین دو عدد کوچک و بزرگ را بدست آوریم:

$$1 + 197 = 198 \longrightarrow 198 \div 2 = 99$$

تغییرات میانگین با اضافه و کم کردن اعداد

اگر تعدادی عدد داشته باشیم و بخواهیم عدد دیگری را طوری به این اعداد اضافه یا از آنها کم کنیم که میانگین آنها تغییری نکند یا برابر با مقدار خاصی شود؛ به این صورت عمل می کنیم:

مجموع اعداد داده شده را با استفاده از رابطه ی میانگین به دست می آوریم.

با در نظر داشتن تعداد اعداد و میانگین خواسته شده، مجموع اعداد را در شرایط جدیدی که مسئله مطرح کرده حساب می کنیم.

اختلاف اعداد به دست آمده در دو مرحله قبلی را حساب می کنیم. این همان عددی است که اگر به اعداد اول اضافه یا از آنها کم شود، میانگین با شرایطی که مسئله درخواست کرده است به دست می آید.

مثال: اعداد ۶، ۱۴، ۹، ۱۰ و ۱۱ را در نظر بگیریم. کدام یک از اعداد را حذف کنیم تا میانگین تغییری نکند؟ ابتدا مجموع اعداد را به دست می آوریم.

$$11 + 10 + 9 + 14 + 6 = 50$$

حالا در صورتی که یکی از اعداد را حذف کنیم، تعداد اعداد به ۴ کاهش می یابد. و با توجه به اینکه گفته میانگین تغییر نکند، خواهیم داشت:

$$4 \times 10 = 40 \longrightarrow 50 - 40 = 10$$

پس در صورتی که عدد ۱۰ را از مجموعه ی اعداد بالا حذف کنیم، میانگین اعداد تغییری نمی کند.

درس سوم: احتمال

در زندگی روزمره برای بیان کردن احتمال رخ دادن یک اتفاق، از عبارت هایی مثل **به طور حتم اتفاق می افتد، به احتمال بیشتر، به احتمال برابر، به احتمال کمتر و به طور حتم اتفاق نمی افتد** استفاده می کنیم. مثلاً در پرتاب یک تاس، عددی که تاس نشان می دهد؛ حتماً از عدد ۷ کوچکتر خواهد بود. (به طور حتم اتفاق می افتد) یا اینکه اگر از درون کیسه ای که دارای ۵ مهره آبی و ۳ مهره سفید است - بدون نگاه کردن - مهره ای بیرون بیاوریم؛ احتمال قرمز بودن آن وجود ندارد. (به طور حتم اتفاق نمی افتد).
حالا می خواهیم این عبارت ها را به زبان ریاضی و در قالب اعداد (کسری) مطرح کنیم.
نسبت تعداد حالت های اتفاق به تعداد کل حالت های ممکن را **احتمال** آن اتفاق می گوئیم.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت های اتفاق}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}}$$

❖ در نتیجه برای اینکه احتمال وقوع یک اتفاق را به صورت کسر بیان کنیم، کافی است تعداد حالت های آن اتفاق را در صورت و تعداد کل حالات ها را در مخرج کسر بنویسیم.

با کمی دقت معلوم می شود که این کسر، حداقل برابر **صفر**، و حداکثر برابر **یک** خواهد بود. چنانکه گاهی؛

◆ تعداد حالت های اتفاقی که می خواهیم بررسی کنیم، صفر هست. (مثلاً آمدن عدد بزرگتر از ۶ در پرتاب تاس) در این حالت، چون صورت کسر صفر می شود؛ در نتیجه با یک کسر مساوی صفر سر و کار خواهیم داشت و احتمال آن اتفاق با عدد صفر مشخص خواهد شد. (به طور حتم اتفاق نمی افتد).
◆ در مورد برخی دیگر از رخدادها، تعداد حالت های اتفاق از نصف کل تعداد حالت ها کمتر است. (کوچکتر از $\frac{1}{2}$ ، احتمال کمتر) مثلاً احتمال اینکه مهره ای سفید رنگ خارج شود از کیسه ای که ۱ مهره سفید و ۱۰ مهره آبی دارد.

◆ اگر تعداد حالت هایی که اتفاق می تواند رخ دهد، نصف کل حالت ها باشد، احتمال آن اتفاق با کسر $\frac{1}{2}$ (بعد از ساده سازی) بیان خواهد شد. (احتمال برابر) مثلاً در پرتاب تاس یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ بیاید.

♦ در صورتی که تعداد حالت های یک رخداد از نصف تعداد کل حالت ها بیشتر باشد، احتمال آن اتفاق از کسر $\frac{1}{2}$ بیشتر خواهد بود. (احتمال بیشتر) خارج شدن مهره آبی از جعبه ای که ۲ مهره آبی و یک مهره قرمز دارد.

♦ و در نهایت اینکه اگر همه ی حالت های ممکن، مربوط به حالت های اتفاق مورد نظر باشد، احتمال آن اتفاق با عدد ۱ بیان می شود. (به طور حتم اتفاق می افتد) خارج شدن مهره سفید رنگ از کیسه ای که فقط مهره سفید رنگ دارد.



با یک مثال، مطلب را بیشتر بررسی می کنیم:

در پرتاب یک تاس، احتمال های زیر را مشخص کنید.

الف) عدد ۸ بیاید.

اعداد روی تاس از ۱ تا ۶ هست. ($\frac{0}{6} = 0$): به طور حتم اتفاق نمی افتد.

ب) عدد ۶ بیاید.

روی تاس یک عدد ۶ وجود دارد. تعداد اعداد هم که ۶ تا مشخص هست. ($\frac{1}{6}$): احتمال کمتر

پ) عدد فرد بیاید.

از ۱ تا ۶، ۳ تا از عددها فرد هستند. ($\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$): احتمال برابر

ت) عددی کمتر از ۵ بیاید.

یعنی یکی از اعداد ۱ تا ۴. ($\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$): احتمال بیشتر

ث) عدد یک رقمی بیاید.

هر شش عدد، یک رقمی هستند. ($\frac{6}{6} = 1$): به طور حتم اتفاق می افتد.

بازی شانسی: هر بازی که نتیجه برد یا باخت در آن فقط بر اساس شانس و اتفاق باشد، بازی شانسی نامیده می شود.

بازی شانسی عادلانه: اگر در یک بازی شانسی، احتمال برنده شدن بازیکنان برابر باشد؛ می گوییم بازی عادلانه است.

مثال: در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج بیاید نفر اول و اگر فرد باشد، نفر دوم برنده است.