فصل چهارم : تقارن و اندازه گیری طول و زاویه

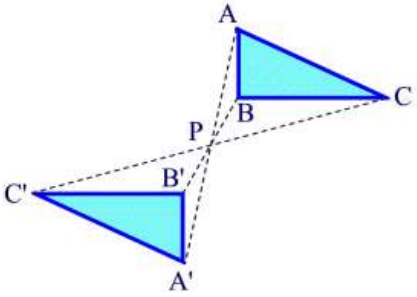
تقارن

برای پیدا کردن قرینه هر شکل ابتدا گوشه های هر شکل را با حروف الفبا نامگذاری می کنیم سپس در تقارن مرکزی از هر نقطه نامگذاری شده با خط کش به مرکز تقارن وصل کرده وبه همان اندازه ادامه می دهیم وقتی قرینه همه نقاط مشخص شد این نقاط را به ترتیب بر اساس شکل به هم وصل می کنیم.

- **قرینه نسبت به یک نقطه:**

یک شکل نسبت به یک نقطه قرینه شود که آن نقطه را نقطه مرکزی می گوییم. برای پیدا کردن قرینه هر شکل اول تمام راسهای یک شکل را نام گذاری می کنیم وفاصله هر راس را تانقطه مرکزی با خط کش اندازه می گیریم وبه همان فاصله از نقطه در جهت دیگر ادامه داده علامت می زنیم. در آخر تمام نقاط را به هم وصل می کنیم.در تقارن مرکزی اندازه شکل تغییر نمی کند.اما جهت تغییر می کند

در تصویر زیر نقاط A و C نسبت به نقطه مرکزی Pقرینه شدند. نکته: نقطه مرکزی Pنقطه میانی پاره خط $A'A$و$C'C$ قرار می گیرد.



در حقیقت شکل حول یک نقطه دوران می کند. یا دوران موافق حرکت عقربه ساعت است یا عکس حرکت عقربه های ساعت. شکل سمت چپ مخالف عقربه ساعت دوران کرده. شکل به یک اندازه (ایزومتریک- دارای یک میزان، هم اندازه)انتقال یافته

اما جهت تغییر کرده.

خصوصیات شکل قرینه شده در تقارن مرکزی (نقطه مرکزی) :

۱. فاصله (طولهای پاره خط راس تا نقطه =فاصله نقطه تا راس قرینه نظیر)

۲. اندازه زاویه ها (همان اندازه)

۳. تقارن خطوط موازی (درقرینه هم همان خطوط موازیند.)

۴. جهت (در تقارن مرگزی معکوس)

۵. نقطه میانی (نقاط واقع بر هر خط در رسم قرینه وسط خطوط می ماند)مثل نقطه مرکزی ونقطه های که شکل نسبت به ان قرینه شده وسط

۶. حروف علامت گذاری (در قرینه از همان حروف شکل اصلی می توان استفاده کرد.)

مشخصات: شکلی که نسبت به یک نقطه P قرینه شود فاصله راس A تا نقطه مرکزی P مساوی فاصله نقطه مرکزی P تا نقطه قرینه A' ونقطه Pوسط AA'هست.

تقارن مرکزی در حقیقت دوران یک شکل حول یک نقطه به اندازه دوران 180^{o}

- وقتی قرینه یک شکل را نسبت به نقطه پیدا کنیم و شکل و قرینه اش روی هم قرار بگیرند، اگر شکل مرکز تقارن داشته باشد، می گوییم آن شکل تقارن مرکزی دارد و آن نقطه، مرکزتقارن شکل است.

- **قرینه نسبت به یک خط**:

قرینه شکل نسبت به خط k به طرف دیگر(خط rk) انتقال می یابد .

یعنی هر نقطه از شکل اصلی مثل C تا خط همان اندازه فاصله دارد که نقطه قرینه C' (طرف دیگرخط) تا خط همان اندازه فاصله دارد. اندازه قرینه شکل نسبت به خط تغییر نمی کند. اما جهت شکل تغییر کرده

قرینه مثلث ABC= مثلث $A'B'C'$

توجه با رسم قرینه هر نقطه نسبت به خط می بینیم که خط تقارن عمود بر تمام فاصله هر نقطه تا نقطه قرینه است.

شکل به یک اندازه (ایزومتریک- دارای یک میزان، هم اندازه)انتقال یافته اما جهت تغییر کرده.

خصوصیات شکل قرینه شده در تقارن نسبت به خط :

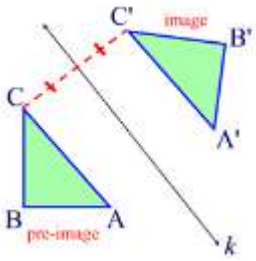
۱. فاصله (طولهای پاره خط راس تا خط =فاصله خط تا راس قرینه نظیر)

۲. اندازه زاویه ها (همان اندازه)

۳. قرینه خطوط موازی (درقرینه هم همان خطوط موازیند.)

۴. جهت شکل (در تقارن نسبت به خط برگردان شده)

۶. حروف علامت گذاری (در قرینه از همان حروف شکل اصلی می توان استفاده کرد.)



- قرینه یک نقطه نسبت به یک خط، در صورتیکه آن نقطه، روی همان خط باشد همان نقطه خواهد بود.

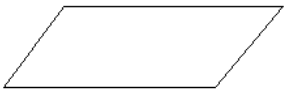
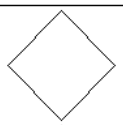
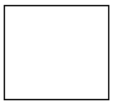
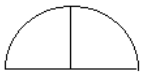
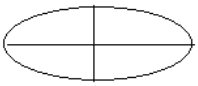
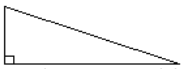
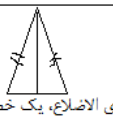
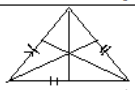
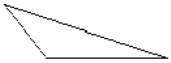
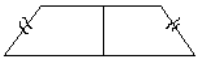
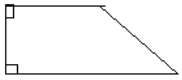
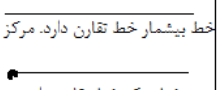
- وقتی قرینه یک شکل را نسبت به خط تقارن پیدا کنیم و شکل و قرینه اش روی هم قرار بگیرند، می گوییم آن شکل تقارن محوری دارد و آن خط، خط تقارن شکل است.

- **خط تقارن (محور تقارن)**:

محور تقارن یک شکل، خطی است که قرینه ی شکل نسبت به آن خط، بر خود شکل منطبق شود. (۱)

- **مرکز تقارن**:

نقطه ای است که قرینه ی نقاط شکل نسبت به آن نقطه، بر خود شکل کاملا منطبق شود. (۲) مرکز دایره، مرکز تقارن است. و در متوازی الاضلاع، مربع، مستطیل، لوزی، دایره و بیضی، محل برخورد قطرها، مرکز تقارن می باشد.

 متوازی الاضلاع خط تقارن ندارد. مرکز تقارن دارد	 لوزی دو خط تقارن دارد مرکز تقارن دارد	مستطیل ۲خط تقارن دارد. مرکز تقارن دارد	 مربع ۴ خط تقارن دارد. مرکز تقارن دارد
ربع دایره، یک خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد.	 نیم دایره، یک خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد	 بیضی، دو خط تقارن دارد مرکز تقارن دارد	دایره، بیشمار خط تقارن دارد مرکز تقارن دارد.
 مثلث قائم الزاویه، خط تقارن ندارد مرکز تقارن ندارد	 مثلث متساوی الاضلاع، یک خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد	 مثلث متساوی الاضلاع، ۳خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد	 مثلث مختلف الاضلاع، خط تقارن و مرکز تقارن ندارد
 ذوزنقه ی متساوی الساقین،۱خط تقارن دارد. مرکز تقارن ندارد	 دوزنقه قائم الزاویه، خط تقارن و مرکز تقارن ندارد	ذوزنقه غیرمشخص، خطتقارن و مرکز تقارن ندارد	مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، یک خط تقارن دارد. مرکز تقارن دارد
بخشی از دایره، یک خط تقارن دارد. مرکز تقارن ندارد	زاویه، یک خط تقارن داردکه نیمسازآن است مرکز تقارن ندارد.	پاره خط، دو خط تقارن دارد، یکی خودش و دیگری عمودمنصف آن. مرکز تقارن ندارد.	 خط بیشمار خط تقارن دارد. مرکز تقارن ندارد. نیم خط، یک خط تقارن دارد. خودش خط تقارن می باشد.

چند ضلعی منتظم:

هرگاه در چند ضلعی، همه ضلع ها با هم مساوی و همه ی زاویه ها با هم مساوی باشند به آن، چندضلعی منتظم می گویند. مثلث متساوی الاضلاع یک سه ضلعی منتظم و مربع یک چهار ضلعی منظم است. چند ضلعی های منتظم به تعداد ضلع ها خط تقارن دارند، مثلا پنج ضلعی منتظم، پنج خط تقارن دارد و یا هشت ضلعی منتظم، هشت خط تقارن دارد.

- در هشت ضلعی منتظم، محل برخورد خط های تقارن، مرکز تقارن نام دارد. اما پنج ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.
- در چند ضلعی های منتظم، اگر تعداد اضلاع چندضلعی منتظم زوج باشد، محل برخورد خطهای تقارن، مرکز تقارن می باشد. اما اگر تعداد اضلاع چندضلعی منتظم فرد باشد، این شکل مرکز تقارن ندارد.

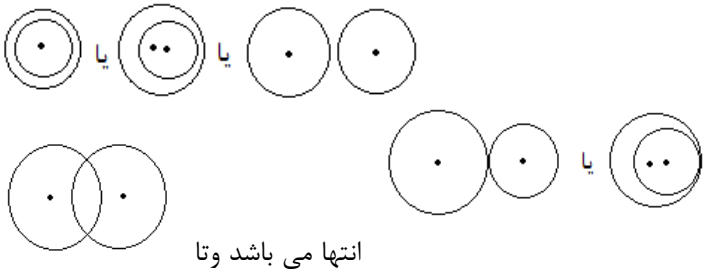
چند نکته مهم

- یک مثلث حداکثر می تواند سه خط تقارن داشته باشد. (مثلث متساوی الاضلاع)
- ذوزنقه حداکثر می تواند یک خط تقارن داشته باشد. (ذوزنقه متساوی الساقین)
- دایره بی شمار، خط تقارن دارد، اما قسمتی از دایره، فقط یک خط تقارن دارد.
- متوازی الاضلاع خط تقارن ندارد، اما محل برخورد قطرها، مرکز تقارن متوازی الاضلاع می باشد.
- هر قطر دایره، یک خط تقارن آن است و مرکز دایره، مرکز تقارن آن می باشد.
- در دایره، مربع، لوزی، بیضی قطرها خط تقارن هستند.
- هرگاه قرینه ی یک مثلث قائم الزاویه ی مختلف الاضلاع را نسبت به وتر آن رسم کنیم، شکل حاصل، چهارضلعی است که حتما دو زاویه قائمه دارد.

- هرگاه قرینه ی یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را نسبت به وتر آن رسم کنیم، شکل حاصل حتما مربع است.

دو دایره ی متمایز(جدا از هم) نسبت به هم، دارای حالات زیر هستند.

۱. دو دایره همدیگر را قطع نمی کنند.(برخورد نمی کنند)
۲. دو دایره همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
۳. دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند.

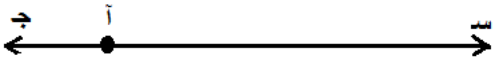


اندازه گیری طول و زاویه

خط: خط از نقطه ها تشکیل شده است که بدون ابتدا و انتها می باشد وتا بی نهایت ادامه دارد. خط انواع مختلفی دارد که شامل:

پاره خط : قسمتی از یک خط را که بین دو نقطه قرار گرفته است "پاره خط" می نامند. پاره خط را با نام نقاط دو سر آن نام گذاری میکنیم.

نیم خط : قسمتی از یک خط از یک طرف یا یک نقطه جدا شده است "نیم خط" مینامند. نیم خط را ابتدا با نام نقطه (حروف بزرگ) سپس نام یک سرخط نامگذاری می کنیم.

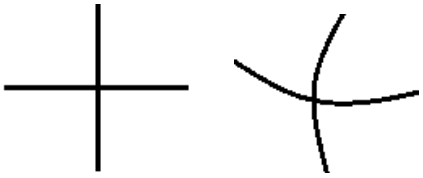


خط راست : به خطی گفته می شود که در یک امتداد و یک راستا باشد مانند خط کشی برای اندازه گیری یک ضلع مربع.

خط شکسته : به خطی که صاف و مانند خط راست نیست بلکه مانند یک مربع گوشه هایی دارد. این نوع خط به دو حالت است که عبارت است از : خط شکسته ی باز مانند دو خـــط که همدیگر را قـــــطع ولی از هم نگذرند و خط شکسته ی بسته مانند مربع، مثلث ، مستطیل ، لوزی

خط خمیده : خطی است که مانند خط شکسته می مانند ولی با این تفاوت که گوشه ای در کار نمی باشد . این نوع خط نیز به دو حالت است که عبارت است از : خط خـــــــــــــمیده ی باز مانند : حرف **C** در الفبای انگلیسی یا عدد هشت که اگر شکل شکسته ی بالای آن خمیده باشد خط خمیده ی باز است و خط خمیده ی بسته مانند : یک دایره یا یک بیضی.

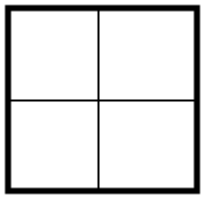
خطوط متقاطع : به دو خط که به هر یک از شکل های بالا باشد و همدیگر رادر یک نقطه قطع کنند(یک نقطه مشترک داشته باشند)دو خط متقاطع می گویند . مانند: ضربدر .



خطوط عمود : به دو خط راست که همدیگر را قطع و محل برخورد آنها یک زاویه ی ۹۰ درجه را درست کند برای فهمیدن این تعریف یک مربع یا یک مستطیل بکشید و شکل گوشه های آن را مشاهده کنید که آن گوشه را زاویه ۹۰ و رابطه ی آن دو خط همان گوشه را با هم را عمود نامیده.

خط تقارن : خط تقارن همان محل تا خوردگی است که دو نیمه کاملاً بر هم منطبق بوده و مساوی هم باشند .

- برای رسم کردن یک خط ، کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم .
- هر پاره خط فقط یک نقطه وسط ویک عمود منصف دارد .
- فاصله یک نقطه از خط برابر است با کوتاه ترین فاصله یعنی خط عمود از آن نقطه بر خط .



خط موازی : به دو خط که فاصله ی بین آن ها در همه نقاط یکسان بوده وهر چه آن ها را ادامه دهیم یکدیگر را قطع نکنند دو خط موازی گفته می شود .

طریقه رسم دو خط موازی :

۱– با استفاده ازخط کش (مشخص کردن دو نقطه به یک فاصله از خط)

۲– با استفاده از گونیا (رسم دو خط عمود بر یک خط)

- اگر دو خط بر یک خط عمود باشد آن دو خط با هم موازیند .
- فاصله دو خط موازی برابر است با فاصله ی یک نقطه از یک خط تا خط دیگر .

قطر: پاره خطی است که دوزاویه غیرمجاور(دو رأس غیرمجاور)را درچند ضلعی ها به هم وصل می کند.

تعداد قطرهای هر شکل = {(تعداد اضلاع)× تعداد اضلاع-۳}÷۲

تعداد قطر از هر رأس چند ضلعیها = تعداد اضلاع-۳

تعداد اضلاع مقابل هر رأس = تعداد اضلاع -۲

- مثلث ها قطر ندارند. چهارضلعی ها ۲قطر دارند. پنج ضلعی ها ۵قطردارند.

شش ضلعی ها ۶ قطردارند. هشت ضلعی ها۲۰قطردارند دایره بیشمار قطر دارد

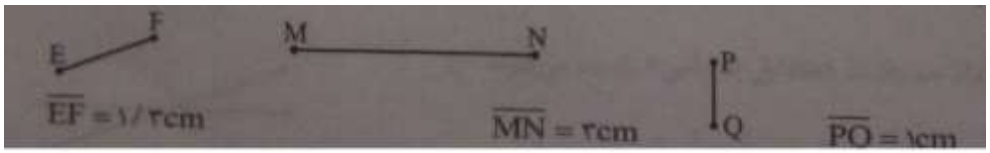
اندازه یا طول پاره خط :

فاصله ی بین نقاط دو سر هر پاره خط را که با خط کش اندازه گیری می کنیم ، اندازه یا طول پاره خط می نامند. برای نشان دادن اندازه ی پاره خط ، روی نام پاره خط یک خط تیره قرار میدهیم.

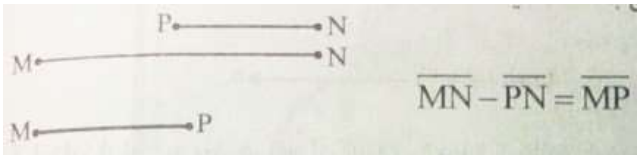
- مقایسه ی پاره خط ها معمولا با توجه به طول آن ها صورت می گیرد.

جمع و تفریق پاره خط ها:

در جمع پاره خط ها ، آن هارا دنبال هم قرار داده تا پاره خط حاصل جمع ، به دست آید.



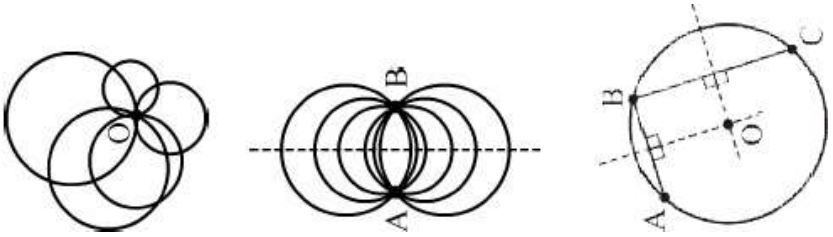
در تفریق پاره خط ها ، آن ها را روی هم قرار داده ، تا پاره خط حاصل تفریق به دست آید.



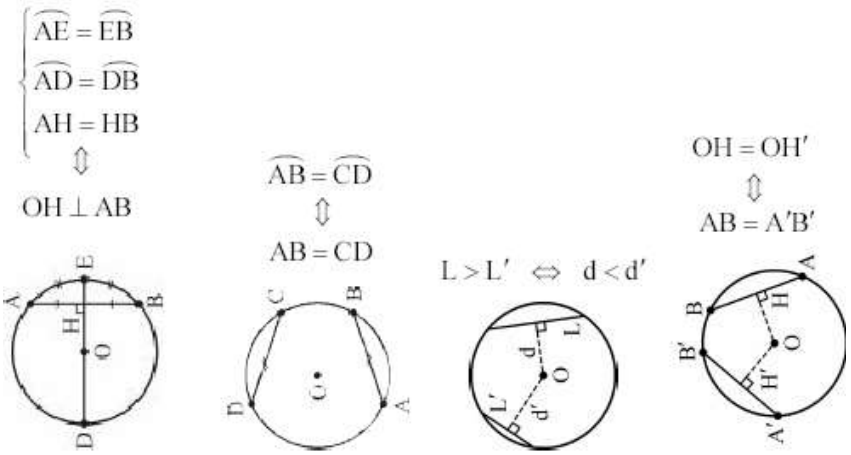
- نسبت بین پاره خط ها را میتوان با توجه به اندازه یا طول پاره خط ها به دست آورد.
- رابطه هایی که میتواند بین پاره خط ها برقرار باشد نیز بر اساس اندازه های آنهاست که با روابط بزرگتری ، کوچکتری و مساوی نشان داده میشوند.

یک سری نکات در مورد این مباحث :

- از یک نقطه بی شمار خط میگذرد.
- از دو نقطه فقط یک خط میگذرد.
- اگر نقاط تشکیل دهنده ی پاره خط ها روی یک خط قرار داشته باشند می توان با حذف نقطه ی مشترک حاصل جمع یا تفریق را به دست آورد.
- از یک نقطه بی شمار دایره می گذرد، که مرکز این دایره ها هر نقطه ای در صفحه به غیر از خود نقطه است.
- از دو نقطه ی A , B در صفحه بی شمار دایره می گذرد که مکان هندسی مراکز این دایره ها خط عمود منصف پاره خط AB می باشد
- از سه نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست، تنها یک دایره می گذرد که همان دایره ی محیطی مثلثی است که سه نقطه ی مذکور رئوس آن می باشند.
- از سه نقطه ی واقع بر خط راست، هیچ دایره ای نمی گذرد.



- در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف میکند. و خطی که مرکز یک دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می کند بر آن وتر عمود است.
- در یک دایره، کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.
- در یک دایره، از دو وتر نابرابر ؛ آن که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است.
- در هر دایره، واترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله اند و بر عکس.



تعداد نیم خط ها

۲× تعداد نقاط = **تعدادنیم خطها روی خط راست**

۱× تعداد نقاط = **تعداد نیم خط ها روی نیم خط**

۰× تعداد نقاط = **تعداد نیم خط ها روی پاره خط**

- هرگاه چند نقطه ی متمایز، بر روی یک خط راست باشند، تعداد کل نقاط برابر است با تعداد نقاط گفته شده.
- هرگاه چند نقطه ی متمایز، بر روی یک نیم خط باشند، تعداد کل نقاط برابر است با تعداد نقاط گفته شده + ۱ که این همان نقطه ی ابتدایی نیم خط است.
- هرگاه چند نقطه ی متمایز، بر روی یک پاره خط باشند، نیم خطی در شکل وجود ندارد.

تعداد پاره خط ها

۲÷(تعدادفاصله ها × تعداد نقاط) = **تعداد پاره خط ها**

روش دوم برای این کار این است که ابتدا فاصله ی بین نقاط را شماره گذاری کرده و سپس آنها را با هم جمع کنیم.

- فرمول ذکر شده فقط زمانی کاربرد دارد که شکل ما فقط یک خط یا نیم خط یا پاره خط باشد.
- چنانچه شکل از چند پاره خط یا ... تشکیل شده باشد باید نیم خط یا پاره خط های هر قسمت را بطور جداگانه محاسبه کرده و با هم جمع کرد.

مقایسه و اندازه گیری زاویه ها

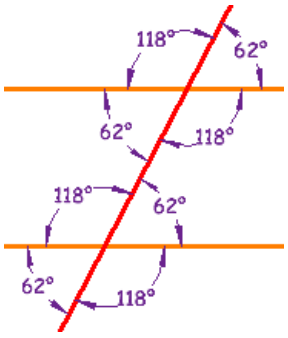
زاویه: دو نیم خط با مبدأ مشترک را زاویه گویند. بعبارتی دو نیم خط همدیگر را در نقطه ای قطع کنند زاویه تشکیل می گردد و نقطه برخورد دو نیم خط را رأس زاویه می نامند.

اضلاع زاویه: به هر کدام از دو نیم خط تشکیل دهنده زاویه اضلاع زاویه می نامند.

رأس زاویه : محل برخورد و نقطه مشترک دو نیم خط را رأس زاویه می گویند .

نام گذاری زاویه : برای نام گذاری زاویه از سه حرف یا یک حرف (حرف رأس) استفاده می شود . اگر با سه حرف نام گذاری کردیم حتماً باید حرف رأس زاویه در وسط دو حرف دیگر باشد .

گونیا : وسیله ای است که به کمک آن می توان زاویه راست (قائمه) رسم کرد .



- برای تشخیص دادن زاویه راست از گونیا استفاده می کنیم .

نقاله: وسیله ای است برای اندازه گیری و رسم زاویه ها.

نیمساز زاویه : نیم خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند .

- با استفاده از پرگارنیمساز زاویه را رسم می کنیم .

صفحه بین دو ضلع: فاصله بین دو ضلع زاویه را صفحه زاویه می نامند.

- واحد اندازه گیری زاویه, درجه است. که اندازه ان برابر ۱/۹۰ زاویه قائمه است.
- وسیله اندازه گیری زاویه ، نقاله است.

انواع زاویه

زاویه صفر : زاویه ای است که دو ضلع آن کاملا بر هم منطبق شده است و طبیعتا اندازه ی آن صفر درجه است.

زاویه تند (حاده) : زاویه ای که از زاویه راست(قائمه- ۹۰درجه) کوچکتر است. اندازه ی آن بین صفر و ۹۰درجه است

زاویه راست (قائمه یا ۹۰درجه) : بوسیله ی گوشه ای گونیا آن را رسم می کنیم.برابر با ۹۰ درجه است.

زاویه باز (منفرجه) : زاویه ای که از زاویه راست یا قائمه(۹۰درجه) بزرگتر است و از زاویه نیم صفحه (۱۸۰درجه)کوچکتر است. اندازه ی آن بین ۹۰ و ۱۸۰درجه است

زاویه نیم صفحه(۱۸۰درجه) : زاویه ای که دو برابر زاویه راست است. برابر با ۱۸۰درجه است. با خط کش می توان رسم کرد.

- در حقیقت زاویه نیم صفحه نوعی زاویه ی باز خاص است که دو ضلع زاویه در امتداد هم بوده و در خلاف جهت همدیگر هستند.

زاویه های متمم: دو زاویه را متمم گویند که مجموعشان ۹۰درجه باشد.

انواع زاویه های متمم: مجاور هم درون شکل جدا از هم

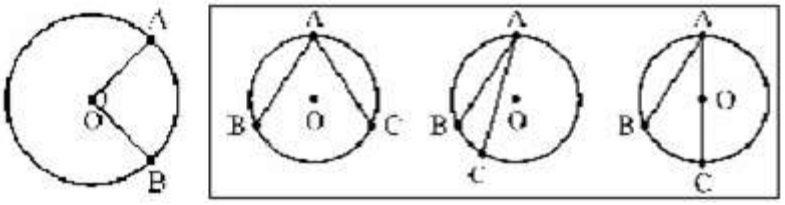
زاویه های مکمل: دو زاویه را مکمل گویند که مجموعشان ۱۸۰درجه باشد.

انواع زاویه های مکمل: مجاور هم درون شکل جدا از هم

زاویه های متقابل به رأس: دو زاویه که رأس مشترک دارند و اضلاع آنها دو به دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشد.

زاویه مرکزی: زاویه ای است که رأس آن بر مرکز دایره و اضلاعش شعاع هایی از دایره است و اندازه اش برابر است با کمان رو به رویش لذا واحد اندازه گیری کمان هم، همان واحد اندازه گیری زاویه نام دارد.

زاویه محاطی: زاویه ای است که رأس آن بر محیط دایره و اضلاعش وترهایی از دایره است و اندازه اش برابر است با نصف کمان روبه رویش؛ لذا واحد اندازه گیری کمان هم، همان واحد اندازه گیری زاویه نام دارد. هر تعداد زاویه ی محاطی که کمان روبرویشان با هم برابر باشد از نظر اندازه با هم برابرند.



زاویه مجاور: به دو زاویه که در رأس و یک ضلع مشترک هستند. و دو ضلع دیگر زاویه ها در دو طرف ضلع مشترک قرار دارد.

زاویه مجانب: به دو زاویه مجاور و مکمل دو زاویه مجانب می گویند.

- هر زاویه مجانب ، زاویه مکمّل است ولی هر زاویه مکمّل، زاویه مجانب نیست

زاویه کاو(برآمده یا محدب): زاویه ای است که اندازه آن بین 180^{o} و ۳۶۰ درجه است.

زاویه کوژ : زاویه ای که اندازه آن کمتراز ۱۸۰درجه باشد.

زاویه تمام صفحه: یا دایره ی کامل. زاویه ای که اندازه اش ۳۶۰درجه است.

- بزرگترین زاویه، زاویه تمام صفحه است.
- دوعدد طبیعی باید با هم برابر باشند تا حاصلضرب آنها بیشترین مقدار ممکن باشد.
- زاویه ی بین دو نیمساز همیشه برابر است با نصف مجموع دو زاویه.
- اگر یک برگ کاغذ را به هر صورت دو بار تا بزنید. مجموع زوایای حاصل در محل تا خوردگی همیشه برابر ۳۶۰ درجه است.
- از برخورد یک خط اریب با دو خط موازی ۸ زاویه ی حاده و منفرجه به وجود می آید. که زوایای حاده با یکدیگر برابر دو زوایای منفرجه نیز با یکدیگر مساوی می باشند.

اندازه گیری زاویه

وسیله ی اندازه گیری زاویه نقاله نام دارد.

واحد استاندارد اندازه گیری زاویه درجه نام دارد.

یک درجه برابر (یک ، سیصدو شصتم) یک دایره ی کامل است. به عبارت دیگر اگر یک دایره ی کامل را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت آن یک درجه است.

برای اندازه ی گیری زاویه، همانند طول که واحد هایی همچون متر،اینچ و ... دارد و قابل تبدیل به یکدیگر می باشند، ۳ واحد مرسوم وجود دارد.

۱- درجه: هرگاه محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه ی مرکزی رو به رو هر قسمت را یک درجه می نامند درجه را با D نشان می دهیم.

۲- گراد: هرگاه محیط دایره را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه ی مرکزی روبرو به هر قسمت را یک گراد می نامند و گراد را با G یا gr کنار یک عدد نشان می دهیم.

۳- رادیان: هرگاه کمانی از دایره را انتخاب کنیم که در ازای آن (طول) مساوی شعاع دایره باشد، زاویه ی مرکزی رو به روی آن را یک رادیان می نامند و آن را با R نشان می دهیم.

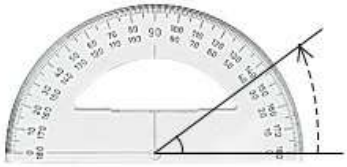
روش اندازه گیری زاویه با نقاله :

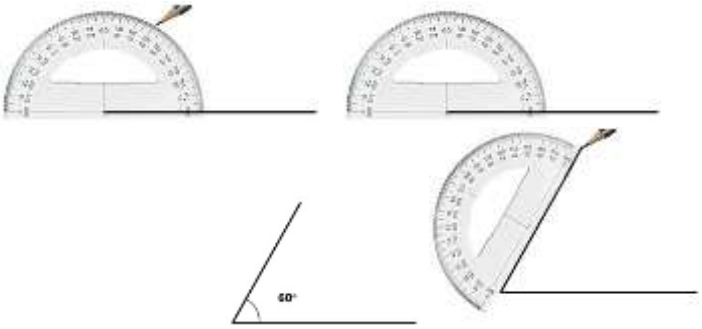
نقاله را روی زاویه طوری قرار دهید که یکی از ضلع ها روی خط راست پایین نقاله باشد. نقاله را طوری حرکت بدهید که ضلع روی خط نقاله حرکت کند و نقطه ی مرکز نقاله روی راس زاویه قرار گیرد. حالا ضلع دیگر زاویه روی درجه بندی نقاله قرار دارد . دقت کنید که برای خواندن زاویه از صفر شروع کرده و اندازه ی زاویه را بخوانید. این زاویه ۳۶° است.

روش رسم زاویه با نقاله

رسم کردن زاویه به همان سادگی اندازه گیری آن است. مثال: یک زاویه ۶۰° رسم کنید.

۱. با یک خط صاف شروع می کنیم. اول یک خط صاف می کشیم. ۲. خط نقاله را روی خط (یک ضلع زاویه) قرار می دهیم. دقت کنید که مرکز نقاله روی نقطه ی آخر خط قرار گیرد. این نقطه راس زاویه است. ۳. از صفر شروع کرده و ۶۰ درجه را علامت می زنیم. ۴. با خط کش از نقطه علامت گذاری یک خط به راس زاویه رسم می کنیم ۵. زاویه را با یک منحنی مشخص می کنیم و روی آن اندازه ی زاویه را می نویسیم.





مجموع زوایای داخلی

- مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

۱۸۰×(۲-تعداد اضلاع) = **مجموع زوایای داخلی**

۲- تعداد اضلاع= **تعداد مثلثهای حاصل از رسم قطرهای یک رأس**

۱۸۰×(۴-تعدادپر) = **مجموع زوایای داخلی ستاره**

۱+۲÷(۱+تعداد خط)×(تعداد خط ها) = **محاسبه خطوطی که صفحه را به قسمت های مختلف تقسیم می کند.**

مجموع زوایای خارجی

مجموع زوایای خارجی تمام اشکال هندسی ۳۶۰ درجه می باشد.

تعداد زاویه ها

۲÷(تعدادنیم خط ها×تعداد پاره خط ها) = **تعداد زاویه ها**

- اندازه زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور
- هرشکلی به اندازه اضلاع خودش زاویه دارد.
- اشکال منتظم اشکالی هستند که اضلاع و زاویه هایشان با هم برابر باشد.
- هرگاه دو یا چند خط موازی را یک خط مورب قطع کند زاویه های تند بدست آمده با هم برابرند و همه ی زاویه ها ی باز بدست آمده باهم برابرند.
- وتر دایره, پاره خطی است که یک نقطه روی محیط دایره را به نقطه ای دیگر روی محیط دایره وصل می کند.
- یک دایره بی شما وتر دارد.
- بزرگترین وتر دایره قطر دایره است.

فرمول بدست آوردن زاویه بین عقربه های ساعت

برای محاسبه زاویه‌ی بین دو عقربه‌ی ساعت شمار و دقیقه شمار ، مقدار ساعت را در عدد ۳۰ ضرب کرده، مقدار دقیقه را در عدد۵/۵ ضرب کرده، عدد کوچک تر را از عدد بزرگ تر کم می کنیم.

(۵/۵ × دقیقه) − (۳۰ × ساعت) = **زاویه داخلی بین عقربه های ساعت**

اندازه ی زاویه داخلی − ۳۶۰درجه = **زاویه خارجی بین عقربه های ساعت**

- در صورتی که جواب به دست آمده از ۱۸۰ درجه بیش‌تر باشد در این صورت زاویه محدب بین دو عقربه محاسبه شده است در نتیجه باید آن را از ۳۶۰ کم می کنیم.
- اگر پس از اینکه عددهای داخل پرانتزها را بدست آوردید، حاصل پرانتز دوم از اول بیشتر شد جای پرانتزها را عوض می کنیم.
- اگر در مسئله ای زاویه بین عقربه های ساعت در زمان ۱۸:۴۲ را خواستند. حتما عدد چنین ساعت هایی را به بعدازظهر تبدیل کنید. (ساعت: ۶:۱۸) در این فرمول نباید عدد ساعت از ۱۲ بیشتر باشد.
- در یک دور صفحه ساعت که معادل ۱۲ ساعت است. عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ۱۱بار از روی هم عبور می کنند پس در هر شبانه روز این دو عقربه ۲۲بار از روی هم عبور می کنند و در نتیجه ۲۲ بار زاویه بین عقربه ها صفر می شود.
- در یک دور صفحه ساعت که معادل ۱۲ ساعت است. عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ۲۲بار با هم زاویه قائمه می سازند. پس در هر شبانه روز این دو عقربه ۴۴بار با هم زاویه قائمه می سازند.

درمورد مثلث ها

اجزای اصلی مثلث: ضلع ها و زاویه ها

اجزای فرعی مثلث: ارتفاع، میانه، نیمساز، عمودمنصف

نیمساز: پاره خطی است که زاویه را نصف می کند. (هرمثلث سه نیمساز زاویه داخلی و سه نیمساز زاویه خارجی دارد.)

میانه: پاره خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل رسم می شود. میانه مثلث را به دو مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می کند.

- کابرد نیمساز در زندگی روزانه: اگر ساعت مچی عقربه دار خود را در کف دست به حالت افقی نگه داریم. طوریکه عقربه ساعت شمار بطرف خورشید باشد، در این حالت نیمساز زاویه ای که بین عقربه ی ساعت شمار و عدد ۱۲ تشکیل شده جنوب را نشان می دهد.

ارتفاع: پاره خطی است که از یک رأس بر ضلع روبرو عمود رسم شود.

وتر : به ضلع رو به روی زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه وتر می گویند .

عمود منصف : خطی است که از یک رأس بر ضلع مقابل عمود باشد وآن را به دوقسمت مساوی تقسیم کند. هر مثلثی که عمود منصف داشته باشد، متساوی الساقین است.

مثلث قائم الزاویه : به مثلثی که یکی از زاویه های آن راست (قائمه) باشد مثلث قائم الزاویه می گویند.

تساوی دو مثلث : حالت های سه گانه ی تساوی دو مثلث در زیر آمده است.

حالت اوّل : اگر در دو مثلث دو ضلع و زاویه ی بین آن ها مساوی باشند آن دو مثلث با هم مساوی اند.

حالت دوم : اگر دو زاویه و ضلع بین آن ها از مثلثی با دو زاویه وضلع بین آن ها از مثلثی دیگر مسا وی باشند این دو مثلث با هم مساوی اند.

حالت سوم : اگر سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلث دیگری به ترتیب مساوی باشند این دو مثلث با هم مساوی اند.

- هر مثلث سه ارتفاع دارد که حداقل یکی از آنها در داخل مثلث قرار دارد.
- در مثلث قائم الزاویه دو ارتفاع روی اضلاع مثلث قرار می گیرند.
- اگر یکی از زاویه های مثلث باز باشد دو ارتفاع مثلث در خارج آن قرار می گیرند.
- اگر هر سه زاویه مثلثی تند باشد سه ارتفاع آن مثلث داخلی می باشند.
- در هر مثلث مجموع اندازه های ارتفاع مثلث از محیط آن مثلث کوچکتر است.
- اگر وسط دو ضلع مثلثی را بهم وصل کنیم پاره خط حاصل موازی با ضلع سوم و نصف آن می باشد. و مساحت قسمت کوچکتر ۱/۳ مساحت قسمت بزرگتر است.
- اگر وسط های سه ضلع مثلث را بطور متوالی به هم وصل کنیم شکل به ۴ مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می شود.
- فاصله ی هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.
- در مثلث، حاصلضرب هر قاعده در ارتفاع نظیرش برابر است با حاصلضرب قاعده ی دیگر در ارتفاع نظیرش.

- در مثلث متساوی الساقین، زاویه های پای ساق با هم برابرند.
- در مثلث متساوی الاضلاع, زاویه های آن با هم برابر و اندازه ی هر کدام از آنها برابر ۶۰ درجه می باشد.
- فاصله ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه تا دو ضلع زاویه با هم برابر است.
- اگر وسط اضلاع یک مثلث را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک مثلث خواهدبود.
- در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است.
- در هر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.
- اندازه ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه تند ۱۵ درجه دارد ، یک چهارم اندازه وتـــــر است.
- در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر وتر نصف وتر است.
- مساحت هر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین همواره مساوی است با ربع مجذور وتر(یا ربع حاصلضرب وتر در خودش)

انواع مثلث :

۱-**مثلث متساوی الاضلاع** : مثلثی است که سه ضلع و سه زاویه ی مساوی دارد. و اندازه ی هر سه زاویه آن ۶۰ درجه است.

۲-**مثلث متساوی الساقین** : مثلثی که دو ضلع (دوساق)مساوی دارد.و دو زاویه ی مجاور آن دو ضلع برابرند.

۳-**مثلث قائم الزاویه** : مثلثی که یک زاویه ی قائمه (۹۰ درجه) دارد. به ضلع روبرو به زاویه ی قائمه وتر می کویند.

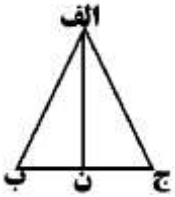
۴-**مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین** : مثلثی که یک زاویه ی قائمه دارد و دو ضلع زاویه ی قائمه ی آن برابرند.

۵-**مثلث مختلف الاضلاع** : اندازه ی ضلع های آن باهم فرق دارند.

رسم مثلث: برای رسم یک مثلث سه روش وجود دارد: ۱- سه ضلع را به ما بدهد ۲- دو زاویه و یک ضلع را بدهد ۳- دو ضلع و یک زاویه را بدهد.

- در رسم یک مثلث به روش سه ضلع باید مجموع دو ضلع کوچک تر، بیشتر از ضلع بزرگتر شود.
- در هر مثلث همیشه اندازه یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است.
- یک مثلث نمی تواند بیش از یک زاویه قائمه داشته باشد.
- یک مثلث نمی تواند بیش از یک زاویه ی باز داشته باشد.
- یک مثلث حداقل دو زاویه تند دارد.
- در هر مثلث نقطه ای که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله باشد، آن نقطه محل برخورد عمودمنصف های آن مثلث است.
- در هر مثلث میانه ی نظیر هر ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.
- در هر مثلث میانه ی نظیر هر ضلع از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است.
- در هر مثلث میانه ها در یک نقطه داخل مثلث همرسند. این نقطه همواره داخل مثلث قرار می گیرد.
- نقطه ی همرسی سه میانه به فاصله ی $\frac{۲}{۳}$ طول هر میانه از رأس و به اندازه ی $\frac{۱}{۳}$ طول هر میانه از وسط ضلع مقابل واقع است.
- اگر نیمسازهای مثلثی را رسم کنیم، نقطه ی تقاطع نیمسازها از سه ضلع به یک اندازه است.
- در یک مثلث اندازه ی یک زاویه ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه ی غیرمجاور داخلی.

- در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع وارد بر هر ضلع از قاعده کوچکتر است. یعنی حدود ۸۵٪ قاعده است.
- هر مثلثی که دو ارتفاعش خارج از مثلث رسم شود، منفرجه الزاویه(باز) است.
- در مثلثی که یک زاویه ی منفرجه(باز) داشته باشد، محل برخورد عمود منصف ها در خارج از مثلث است.



- هر مثلثی که دو ارتفاع مساوی داشته باشد، متساوی الساقین است.
- هر مثلثی که مجموع دو زاویه ی آن با زاویه ی سوم آن برابر باشد، قائم الزاویه است.
- در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصلضرب دو ضلع عمود بر هم تقسیم بر وتر
- اگر ارتفاع مثلث بر وسط ضلع مقابل رسم شده باشد، عمود منصف و میانه هم نامیده می شود.
- از دوران مثلث قائم الزاویه دور اضلاع قائمه، مخروط ایجاد می شود.

میانه > الف.ج + الف.ب ÷ ۲

- در هر مثلث اندازه ی زاویه ای که از برخورد دو نیمساز زاویه ی داخلی مثلث درست می شود را می توان از رابطه ی زیر بدست آورد.

۹۰ + ۲ ÷ زاویهٔداده شده
۲ ÷ ۱۸۰ + زاویهٔداده شده

- نیمساز دو زاویه ی تند در مثلث قائم الزاویه همواره یک زاویه ی ۱۳۵ درجه است.
- در هرمثلث قائم الزاویه بین اضلاع آن رابطه ی زیر برقرار است.

(یک ضلع قائم ×خودش) + (یک ضلع قائم ×خودش) = وتر × وتر

- در مثلث قائم الزاویه اگر دو ضلع عمود برهم ۳ و ۴ باشند، وتر مثلث حتما ۵ می باشد. این رابطه در مثلث های دیگر هم برقرار است.
- اگر اندازه ی سه ضلع مثلث را در یک عدد بزرگتر از صفر ضرب کنیم اعداد حاصل فیثاغورثی می شوند.

در مورد چهارضلعی ها

- اگر وسط اضلاع یک مربع را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک مربع خواهدبود.
- اگر وسط اضلاع یک مستطیل را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک لوزی خواهدبود.
- اگر وسط اضلاع یک متوازی الاضلاع را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک متوازی الاضلاع خواهدبود.
- اگر وسط اضلاع یک لوزی را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک مستطیل خواهدبود.
- در متوازی الاضلاع مجموع زوایا ۳۶۰درجه است و هر دو زاویه ی مجاور آن با هم ۱۸۰درجه می شود.
- در متوازی الاضلاع ۴ جفت زاویه مکمل داریم.
- در ذوزنقه ی متساوی الساقین هر دو زاویه ی مجاور با هم برابرند در نتیجه تنها دو جفت زاویه ی مکمل داریم
- خطی که وسط های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می کند نصف مجموع دوقاعده است واگر آن را ضرب در ارتفاع کنیم مساحت بدست می آید

- **ذوزنقه** : به هر چهار ضلعی که فقط دو ضلع موازی داشته باشد ذوزنقه می گویند .
- **ذوزنقه قائم الزاویه** : به ذوزنقه ای که یکی از زاویه های آن قائمه باشد ذوزنقه قائم الزاویه می گویند .