

فصل هشتم
ریاضی نهم

نام آزمون: فصل هشتم ریاضی نهم

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۱/۳۱

۱ از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن چه شکلی پدید می آید؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان ایلام ۹۳-۹۲)

- ۱ یک مخروط ۲ دو مخروط با قاعده ی مشترک
۳ یک کره و یک مخروط با شعاع مشترک ۴ یک مخروط و یک هرم

۲ مجموعه نقاطی از فضا که فاصله ی همه ی آن ها از یک نقطه به نام مرکز برابر باشند را گویند. (لرستان - استعدادهای درخشان ۹۵)

- ۱ کره ۲ دایره ۳ نیم کره ۴ مخروط

۳ اگر قطر کره ای را ۲ برابر کنیم، آنگاه به حجم اولیه ی آن چقدر افزوده می شود؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان کردستان ۹۳-۹۲)

- ۱ ۸ برابر حجم اولیه ۲ ۷ برابر حجم اولیه ۳ ۴ برابر حجم اولیه ۴ ۳ برابر حجم اولیه

۴ یک رویه نیم کره دارای قاعده ای به مساحت ۲ می باشد. مساحت این رویه نیم کره کدام است؟

- ۱ 8π ۲ 2 ۳ 16π ۴ 4

۵ حجم هرمی با قاعده لوزی به قطرهای ۳ و ۴ و ارتفاع ۵ چه قدر است؟

- ۱ ۶۰ ۲ ۳۰ ۳ ۱۰ ۴ ۲۰

۶ چند جمله از جمله های زیر نادرست است؟ (نمونه دولتی - استان های البرز و قزوین ۹۶-۹۵)

- حجم کره ای به شعاع ۳ برابر است با 36π
- از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر، یک مخروط به وجود می آید.
- چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.
- مساحت جانبی استوانه ای به شعاع قاعده ی r و ارتفاع r برابر است با $2\pi r^2$.

- ۱ ۲ ۳ ۴

۷ در یک مکعب مستطیل در بسته به ابعاد ۳، ۳ و ۴ سانتی متر مقداری آب ریختیم. اگر این ظرف را در دو حالت (یک بار روی سطح مستطیل و بار دیگر روی سطح مربع) روی زمین قرار دهیم، نسبت ارتفاع های آب در دو حالت کدام است؟ (نمونه دولتی - استان مازندران ۹۶-۹۵)

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{3}{4}$

۸ در یک هرم با قاعده ی مثلث، در یک رأس سه یال آن دویه دو بر هم عمودند. اگر اندازه ی این یال ها ۲ و ۳ و ۴ سانتی متر باشد، حجم هرم چند سانتی متر مکعب است؟ (نمونه دولتی - استان های کرمان و خراسان رضوی ۹۶-۹۵)

- ۱ ۴ ۲ ۸ ۳ ۱۲ ۴ ۲۴

۹ مساحت کره ای برابر 16π است. حجم کره چقدر است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان سیستان و بلوچستان - استان خراسان جنوبی و شمالی ۹۳-۹۲)

- ۱ $\frac{28}{3}\pi$ ۲ $\frac{29}{3}\pi$ ۳ $\frac{31}{3}\pi$ ۴ $\frac{32}{3}\pi$



فصل هشتم ریاضی نهم

۱۰ اگر عدد مساحت یک کره ۳ برابر عدد حجم آن باشد، شعاع کره کدام یک از اعداد زیر است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان های سمنان، مازندران شهرستان های استان تهران ۹۲-۹۳)

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱ برای پوشاندن سطح یک توپ کروی شکل، ۴۳۲ سانتی متر مربع چرم مصرف شده است. قطر این توپ چند سانتی متر است؟ ($\pi=3$) (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان بوشهر ۹۲-۹۳)

۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)

۱۲ سطح کره ای که حجم آن 36π می باشد برابر است با (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان های آذربایجان غربی، شرقی، اردبیل و زنجان ۹۲-۹۳)

16π (۴)

36π (۳)

4π (۲)

9π (۱)

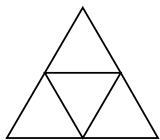
۱۳ مساحت کره ای 100π است، حجم آن است.

$\frac{500}{3}\pi$ (۴)

$\frac{400}{3}\pi$ (۳)

500π (۲)

$\frac{500}{2}\pi$ (۱)



۱۴ با سطح مثلث شکلی، به ضلع 20 cm یک چهاروجهی منتظم ساخته ایم. مساحت جانبی آن کدام است؟

$25\sqrt{3}$ (۲)

$100\sqrt{3}$ (۱)

$75\sqrt{3}$ (۴)

$50\sqrt{3}$ (۳)

۱۵ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعده آن مربع است.

(۲) اگر شعاع کره ای را دو برابر کنیم حجم آن چهار برابر می شود.

(۳) در هرم منتظم شکل وجه های جانبی همیشه مثلث متساوی الاضلاع است.

(۴) حجم استوانه ای که شعاع و ارتفاع آن a باشد، برابر πa^3 می باشد.

۱۶ مساحت جانبی هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن 4 سانتی متر می باشد، چند سانتی متر مربع است؟

$12\sqrt{2}$ (۴)

$24\sqrt{2}$ (۳)

$12\sqrt{3}$ (۲)

$16\sqrt{3}$ (۱)

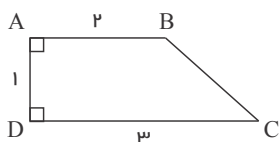
۱۷ در داخل یک مکعب به ضلع a ، بزرگ ترین کره ممکن قرار دارد. نسبت مساحت کره به مساحت کل مکعب کدام است؟

$\frac{\pi}{8}$ (۴)

$\frac{\pi}{6}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)



۱۸ حجم حاصل از دوران دوزنقه مقابل، حول ضلع DC چند سانتی متر مکعب است؟

$\frac{7}{3}\pi$ (۲)

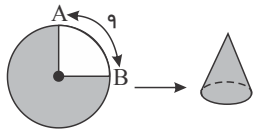
3π (۱)

$\frac{4}{3}\pi$ (۴)

$\frac{13}{3}\pi$ (۳)

فصل هشتم ریاضی نهم

با $\frac{3}{4}$ یک دایره، یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم. اگر طول کمان AB مطابق شکل برابر ۹ باشد، شعاع قاعدهٔ مخروط کدام است؟ ($\pi=3$)



۶ ۲

۲۷ ۱

۹ ۴

۴٫۵ ۳

۱۹

مساحت کره‌ای برابر با 36π است. حجم آن برابر است با:

27π ۴

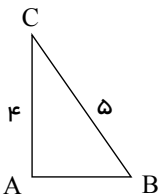
108π ۳

9π ۲

36π ۱

۲۰

شکل زیر را یکبار حول ضلع AB و بار دیگر حول ضلع AC دوران می‌دهیم. اختلاف حجم دو مخروط حاصل کدام است؟ (نمونه دولتی - شهر تهران ۹۵-۹۶)



6π ۲

4π ۱

8π ۴

2π ۳

۲۱

مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگتر دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟ (نمونه دولتی - استان‌های سیستان و بلوچستان، خراسان جنوبی، خراسان شمالی و هرمزگان ۹۵-۹۶)

12π ۴

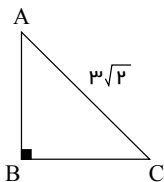
10π ۳

$\frac{48\pi}{5}$ ۲

$\frac{26\pi}{5}$ ۱

۲۲

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل برابر کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان‌های همدان و لرستان ۹۲-۹۳)



12π ۲

9π ۱

27π ۴

18π ۳

۲۳

اندازه‌ی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $6\sqrt{2}$ است. اگر این مثلث را حول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن دوران دهیم حجم حاصل از این دوران چقدر است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان بوشهر ۹۲-۹۳)

216π ۴

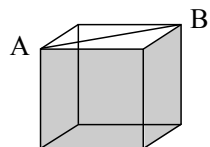
144π ۳

72π ۲

36π ۱

۲۴

یک اسفنج مکعب شکل به ضلع $3b$ را در راستای پاره خط AB بریده‌ایم، مساحت کل یکی از قسمت‌های ایجاد شده چقدر است؟ (نمونه دولتی - استان‌های چهارمحال و بختیاری و فارس ۹۵-۹۶)



$(18\sqrt{2} + 54)b^2$ ۲

$3\sqrt{2}b^2$ ۱

$(27 + 9\sqrt{2})b^2$ ۴

$27b^2$ ۳

۲۵

یک ظرف چوبی توخالی به شکل نیم کره داریم که قطر خارجی آن 10 cm و ضخامت آن 1 cm است. می‌خواهیم سطح کل این ظرف را رنگ کنیم. اگر برای هر متر مربع، به 100 گرم رنگ نیاز باشد، چند گرم مصرف می‌شود؟ ($\pi \approx 3$) (نمونه دولتی - استان‌های چهارمحال و بختیاری و فارس ۹۵-۹۶)

$2,73$ ۴

$7,43$ ۳

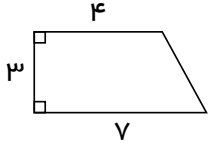
$22,29$ ۲

$7,24$ ۱

۲۶

فصل هشتم ریاضی نهم

اگر یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه را با اندازه‌ی اضلاع مشخص شده در شکل زیر، حول قاعده‌ی کوچک‌تر دوران دهیم، حجم شکل حاصل را به دست آورید. (نمونه دولتی - استان‌های کرمان و خراسان رضوی ۹۵-۹۶)



۴۵π

۶۰π

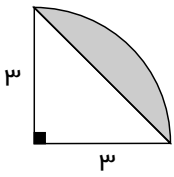
۳۶π

۵۴π

۲۷

حجم قسمت هاشورخوردہ حول دوران ضلع ۳ سانتی‌متر برابر است با:

(نمونه دولتی - استان گلستان ۹۵-۹۶)



۶π

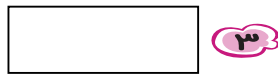
۱۲π

۹π

۳π

۲۸

مقداری آب را در استوانه‌ای که سر و ته آن بسته است، ریخته‌ایم. با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف، سطح آب به کدام شکل نمی‌تواند باشد؟ (به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده‌ایم). (استعدادهای درخشان ۹۵-۹۶)



۲۹

کره‌ای داخل استوانه‌ای محاط شده است. اگر حجم فضای بین کره و استوانه 18π باشد، شعاع و حجم کره به ترتیب برابر است با: (نمونه دولتی - استان گیلان ۹۵-۹۶)

$(36\pi, 6)$

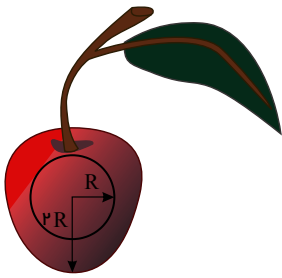
$(72\pi, 6)$

$(18\pi, 3)$

$(36\pi, 3)$

۳۰

می‌توان پذیرفت که ضخامت گوشت یک گیلای با ضخامت هسته آن برابر است. همچنین می‌توان پذیرفت که گیلای و هسته‌ی آن هر دو کروی هستند. نسبت حجم گوشت گیلای به حجم هسته‌ی آن برابر کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان قم ۹۲-۹۳)



۳

۷

۸

۲۷

۳۱

ورزشگاهی به شکل نیم کره به شعاع ۴۰ متر است. اگر بخواهیم نمای خارجی این ورزشگاه را رنگ کنیم و هر قوطی رنگ، برای رنگ آمیزی ۸۰ متر مربع کافی باشد، حداقل چند قوطی رنگ برای رنگ آمیزی لازم است؟ ($\pi = 3,14$) (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان گلستان ۹۲-۹۳)

۲۵۲

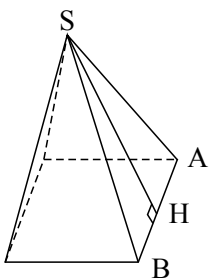
۲۵۰

۱۲۶

۱۲۵

۳۲

در هرم منتظم مربع القاعده‌ی زیر، $SA = 10\text{ cm}$ و $SH = 8\text{ cm}$ است، حجم این هرم کدام است؟ (نمونه دولتی - استان آذربایجان شرقی ۹۵-۹۶)



$12\sqrt{28}\text{ cm}^3$

$48\sqrt{28}\text{ cm}^3$

$48\sqrt{14}\text{ cm}^3$

$24\sqrt{14}\text{ cm}^3$

۳۳

فصل هشتم ریاضی نهم

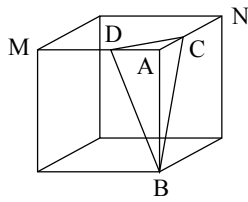
۳۴ حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع 3cm که وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند، کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی - استان زنجان ۹۵-۹۶)

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۱)



۳۵ در مکعب زیر نقطه‌ی C وسط AN و نقطه‌ی D وسط AM است. اگر $AB = 1$ باشد، حجم هرم $ABCD$ کدام است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان خوزستان ۹۲-۹۳)

$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{18}$ (۳)

۳۶ مخروطی به شعاع قاعده‌ی 3 و ارتفاع 6 واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله‌ی 4 واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان قم ۹۲-۹۳)

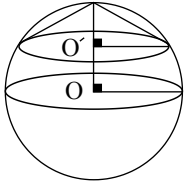
2π (۴)

$\frac{4\pi}{3}$ (۳)

π (۲)

$\frac{2\pi}{3}$ (۱)

۳۷ در شکل زیر شعاع کره R و $OO' = \frac{R}{3}$ می‌باشد. نسبت حجم کره به حجم مخروط چقدر است؟ (نمونه دولتی - استان‌های مرکزی و ایلام ۹۵-۹۶)



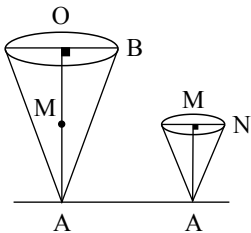
$\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

$\frac{27}{2}$ (۴)

$\frac{27}{4}$ (۳)

۳۸ ظرفی مخروطی مانند شکل زیر داریم، اگر از نقطه‌ی M وسط ارتفاع مخروط موازی با سطح قاعده‌ی مخروط برش بزنیم، حجم مخروط به دست آمده چند برابر مخروط اولیه خواهد بود؟ (نمونه دولتی - استان مازندران ۹۵-۹۶)



$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

۳۹ با استفاده از سه هرم مربع‌القاعده متساوی‌الشکل، می‌توانیم یک مکعب به بعد a بسازیم، طول بلندترین یال این هرم کدام است؟ (نمونه دولتی - استان‌های مرکزی و ایلام ۹۵-۹۶)

$2a\sqrt{3}$ (۴)

$a\sqrt{3}$ (۳)

a (۲)

$a\sqrt{2}$ (۱)

۴۰ شعاع قاعده‌ی یک مخروط با شعاع یک نیم‌کره مساوی است. اگر ارتفاع مخروط سه برابر شعاع قاعده‌اش باشد، نسبت حجم این مخروط به حجم نیم‌کره کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان‌های فارس و کهگیلویه و بویراحمد ۹۲-۹۳)

$\frac{2}{4}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

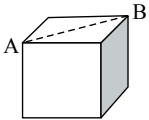
1 (۱)

فصل هشتم ریاضی نهم

۴۱ قاعده‌ی هرمی مربعی است به ضلع 3cm ، اگر حجم هرم 24 سانتی‌متر مکعب باشد، ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟ (نمونه دولتی و تیزهوشان - استان چهارمحال و بختیاری ۹۳-۹۲)

- ۱ ۶ ۲ ۴ ۳ $\frac{8}{3}$ ۴ ۸

۴۲ یک اسفنج مکعب شکل به ضلع 5 را در راستای پاره‌خط AB بریده‌ایم. مساحت کل یکی از قسمت‌های بریده شده چقدر است؟



- ۱ 375 ۲ 750 ۳ $25(3 + \sqrt{2})$ ۴ $25(3 + 2\sqrt{2})$

۴۳ قاعده‌ی یک هرم، شش‌ضلعی منظم به ضلع 4 می‌باشد اگر ارتفاع آن $10\sqrt{3}$ باشد حجم هرم کدام است؟

- ۱ $24\sqrt{3}$ ۲ 720 ۳ $720\sqrt{3}$ ۴ 240

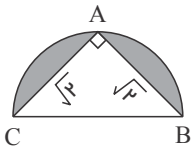
۴۴ قاعده‌ی یک هرم منظم مربعی به ضلع 6 است. اگر وجه‌های این هرم مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، حجم هرم کدام است؟

- ۱ $18\sqrt{2}$ ۲ $24\sqrt{2}$ ۳ $36\sqrt{2}$ ۴ $72\sqrt{2}$

۴۵ مکعبی به ضلع $\sqrt{12}$ درون یک کره محاط شده است. حجم کره چند است؟

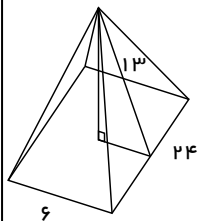
- ۱ $32\sqrt{3}\pi$ ۲ $64\sqrt{6}\pi$ ۳ 288π ۴ 36π

۴۶ حجم حاصل از دوران قسمت هاشورخورده حول BC کدام است؟



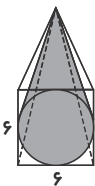
- ۱ $\frac{4}{3}\pi$ ۲ π ۳ $\frac{2}{3}\pi$ ۴ 8π

۴۷ حجم شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



- ۱ 192 ۲ 129 ۳ 229 ۴ 196


۴۸ مطابق شکل، مخروطی داخل یک هرم با قاعده‌ی مربع، طوری قرار گرفته که قاعده‌ی آن بر اضلاع مربع مماس است. اگر حجم هرم 120 باشد، حجم مخروط کدام است؟



- ۱ 90π ۲ 120π ۳ 60π ۴ 30π

۴۹ کره‌ای که حجم آن 36π است را داخل استوانه محاط می‌کنیم. حجم استوانه چه قدر است؟

- ۱ 36π ۲ 54π ۳ 27π ۴ 45π



فصل هشتم
ریاضی نهم

صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم که ارتفاع آن را نصف کند، نسبت حجم هرم مخروط بزرگ به حجم هرم کوچک چه قدر است؟

۱۶

۸

۴

۲

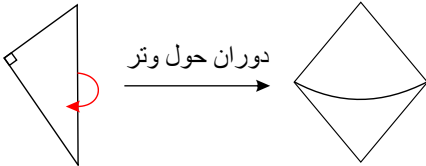
۵۰

@riazicafe



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۲



۱

گزینه ۱

۲

گزینه ۲

اگر قطر کره دو برابر شود، شعاع نیز دو برابر شده و حجم که با $\frac{4}{3}\pi r^3$ محاسبه می‌شود، (چون توان سوم شعاع ظاهر شده) ۸ برابر می‌شود، یعنی ۷ برابر به حجم اولیه افزوده می‌شود.

۳

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ اولیه}$$

$$V = 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 7\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \text{ ثانویه}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi(8r^3)$$

گزینه ۴

نکته: مساحت رویه نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره). مطابق نکته در این مسأله، مساحت قاعده نیم کره برابر ۲ می‌باشد، پس مساحت رویه نیم کره برابر ۴ است.

۴

گزینه ۳

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 4}{2} \times 5 = 10$$

۵

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{2}$$

گزینه ۴

عبارت اول صحیح است. چرا که داریم:

$$V \text{ کره با شعاع } 3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4\pi \times 27}{3} = 36\pi$$

۶

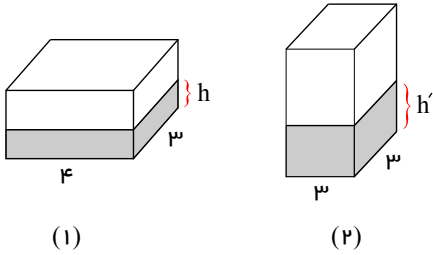
عبارت دوم نادرست است؛ چرا که از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر دو مخروط ایجاد می‌شود.

عبارت سوم نیز صحیح است؛ چرا که یک چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.

عبارت چهارم صحیح است؛ چرا که داریم:

$$S \text{ جانبی استوانه به شعاع } r \text{ و ارتفاع } r = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = 2\pi r \times r = 2\pi r^2$$

گزینه ۴



$$(1) \rightarrow \text{در این حالت } V = 4 \times 3 \times h = 12h$$

$$(2) \rightarrow \text{در این حالت } V = 3 \times 3 \times h' = 9h'$$

چون مقدار آب داخل مکعب ثابت است پس حجم هر دو ثابت و با هم برابر است.

$$12h = 9h' \rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۱

کافی است یکی از وجه‌ها را که دو یال عمود برهم، اضلاع قائمه‌ی آن هستند، به عنوان قاعده و یال دیگر را که بر این وجه عمود است، به عنوان ارتفاع هرم در نظر گرفت.

$$V = \frac{1}{3} \underbrace{S}_{\text{قاعده}} \times \underbrace{h}_{\text{ارتفاع}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \right) \right) \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

گزینه ۴

$$4\pi r^2 = 16\pi \rightarrow 4r^2 = 16 \rightarrow r^2 = \frac{16}{4} = 4 \rightarrow r = \sqrt{4} = 2 \quad \text{شعاع کره}$$

$$\text{فرمول مساحت کره} = 4\pi r^2$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8 = \frac{32\pi}{3}$$

گزینه ۱

$$\text{مساحت کره} = 3 \times \text{حجم کره} \Rightarrow S = 3V$$

$$\text{دو طرف ساده می‌شود} = 4\pi r^2 = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r^2 = r^3 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را به } r^2} \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^3}{r^2} \rightarrow r = 1$$

گزینه ۲

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2$$

$$4 \times 3 \times r^2 = 432 \rightarrow 12r^2 = 432 \rightarrow r^2 = \frac{432}{12} = 36 \rightarrow r = \sqrt{36} = 6$$

$$d = 2r = 2 \times 6 = 12$$

گزینه ۳

$$\text{حجم کره} = 36\pi \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \rightarrow \frac{4}{3}r^3 = 36$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{\frac{36}{1}}{\frac{4}{3}} = \frac{\cancel{36} \times 3}{\cancel{4} \times 1} = 27 \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \rightarrow r = 3 \text{ شعاع}$$

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 3^2 = 4 \times \pi \times 9 = 36\pi$$

نکته: اگر شعاع کره ۳ باشد، حجم و مساحت کره مساوی می‌شوند.

گزینه ۴

ابتدا باتوجه به مساحت کره شعاع آن را به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow 4r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

با داشتن شعاع کره می‌توانیم حجم آن را نیز محاسبه کنیم.

$$V \text{ کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{125 \times 4}{3}\pi = \frac{500}{3}\pi$$

۱۳

گزینه ۴

مساحت جانبی این چهاروجهی منتظم از ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ ساخته می‌شود. پس ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ را محاسبه می‌کنیم.

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ است.

پس مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ برابر می‌شود با:

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

حال مساحت ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم:

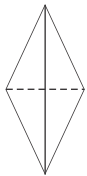
$$25\sqrt{3} \times 3 = 75\sqrt{3}$$

۱۴

گزینه ۴

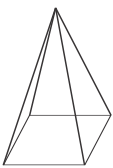
بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعده آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



گزینه ۲: نادرست. اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

گزینه ۳: نادرست. هرم منتظم شکلی است که قاعده آن شکل منتظمی باشد و ممکن است وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد.



گزینه ۴: درست.

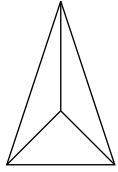
حجم استوانه به صورت $\pi r^2 h$ است و اگر $r = a$ و $h = a$ آنگاه:

$$\pi r^2 h = \pi a^3$$

۱۵

گزینه ۲

چون هرم منتظم است، پس قاعده آن مثلث متساوی الاضلاع است و در واقع شکل همان چهاروجهی منتظم است و مساحت جانبی آن از ۳ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است.



نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ است.

حال مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ را به دست می آوریم که برابر است با:

$$\frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} \times 3 = 12\sqrt{3}$$

حال مساحت مثلث را در ۳ ضرب می کنیم:

گزینه ۳

کره ای که ایجاد می شود دارای شعاع $\frac{a}{2}$ می باشد.

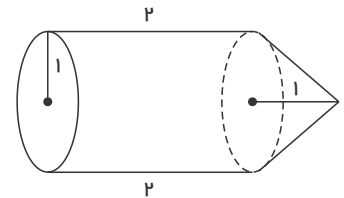
$$\frac{\text{مساحت کره}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{4\pi r^2}{6a^2} = \frac{4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{6a^2} = \frac{4\pi \frac{a^2}{4}}{6a^2} = \frac{\pi}{6}$$

گزینه ۲

شکل زیر از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است.

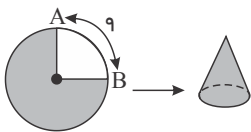
$$\text{حجم شکل حاصل} = V_{\text{مخروط}} + V_{\text{استوانه}} =$$

$$\pi(1)^2 \times 2 + \frac{1}{3} \pi(1)^2 \times 1 = 2\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$$



گزینه ۳

اگر طول کمان AB برابر ۹ باشد، پس محیط کل دایره برابر $36 = 4 \times 9$ است و $\frac{3}{4}$ آن برابر ۲۷ است. پس محیط



قاعده مخروط برابر ۲۷ است. حال شعاع قاعده را به دست می آوریم:

$$2\pi R = 27 \Rightarrow 2 \times 3 \times R = 27 \Rightarrow R = \frac{9}{2} = 4,5$$

گزینه ۱

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 36\pi \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (3)^3 = 36\pi$$

گزینه ۱

ابتدا طول AB را با استفاده از رابطه ی فیثاغورس می یابیم:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{9} = 3$$

دوران حول $AB \leftarrow$ شعاع قاعده = 4 و ارتفاع 3

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi (4)^2 \times 3 = \frac{1}{3} \pi 16 \times 3 = 16\pi$$

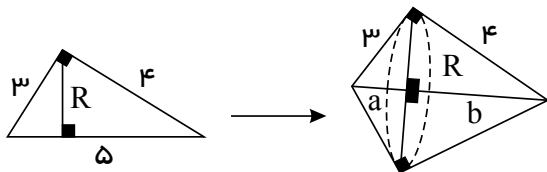
دوران حول $AC \leftarrow$ شعاع قاعده = 3 و ارتفاع 4

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi R_2^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 4 = \frac{1}{3} \pi 9 \times 4 = 12\pi$$

$$\rightarrow V_1 - V_2 = 16\pi - 12\pi = 4\pi$$

گزینه 2

مثلث گفته شده قائم الزاویه است، چرا که $5^2 = 4^2 + 3^2$. حال این مثلث را حول وتر دوران می‌دهیم. دو مخروط قائم به شعاع R و ارتفاع‌های a و b تشکیل می‌شود.



$$\text{مثلث } S = \frac{3 \times 4}{2} = 6 = \frac{R \times 5}{2} \rightarrow R = \frac{12}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مخروط سمت چپ } V = \frac{1}{3} \pi R^2 a \\ \text{مخروط سمت راست } V = \frac{1}{3} \pi R^2 b \end{array} \right\} \rightarrow \text{کل } V = \frac{1}{3} \pi R^2 a + \frac{1}{3} \pi R^2 b$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 (a+b) = \frac{5}{3} \pi R^2 = \frac{5}{3} \pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{1}{3} \pi \times \frac{144}{5} = \frac{48\pi}{5}$$

22

گزینه 1

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \xrightarrow{AB=BC} (AC)^2 = 2(AB)^2$$

$$\rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 2(AB)^2 \rightarrow 9 \times 2 = 2(AB)^2 \rightarrow AB = \sqrt{9} = 3$$

$$AB = BC = 3 \text{ cm}$$

از دوران حول AB نیز مخروط به شعاع و قاعده‌ی 3 به وجود می‌آید.

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 3}{3} = 9\pi$$

23

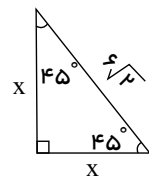
گزینه 2

در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین دو ساق برابرند و دو زاویه 45 درجه هم دارد.

24

$$(ضلع)^2 + (ضلع)^2 = (وتر)^2 \rightarrow x^2 + x^2 = (6\sqrt{2})^2$$

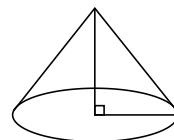
$$36 \times 2 = 72$$



$$\rightarrow 2x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \pi \times (6)^2 \times 6$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 216 = \frac{216\pi}{3} = 72\pi$$



گزینه ۴

شکل جدید از ۲ وجه مربع به ضلع ۳b، یک وجه مستطیل شکل به طول AB و عرض ۳b و همچنین دو مثلث قائم الزاویه به ضلع‌های قائمه ۳b تشکیل می‌شود. ابتدا طول AB را به دست می‌آوریم:

$$(AB)^2 = (3b)^2 + (3b)^2 = 9b^2 + 9b^2 = 18b^2 \rightarrow AB = \sqrt{18b}$$

$$\text{مساحت وجه مستطیل} = 3\sqrt{2b} \times 3b = 9\sqrt{2b}^2$$

$$\text{مساحت‌های دو وجه مربعی} = 2 \times 3b \times 3b = 18b^2$$

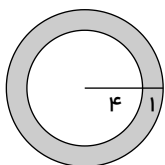
$$\text{مساحت‌های دو وجه مثلثی} = 2 \times \frac{3b \times 3b}{2} = 9b^2$$

$$\text{مساحت کل شکل} = 9\sqrt{2b}^2 + 18b^2 + 9b^2 = 9\sqrt{2b}^2 + 27b^2 = b^2(9\sqrt{2} + 27)$$

۲۵

گزینه ۴

قسمت‌هایی که باید رنگ شوند، شامل سطح یک نیم کره بیرونی به شعاع ۵ سانتی‌متر، سطح یک نیم کره داخلی با شعاع ۴ سانتی‌متر و ضخامت ظرف که شکلی مانند شکل روبرو دارد:



$$\text{مساحت نیم کره‌ی بیرونی} = 2\pi R^2 = 2 \times 3 \times 5^2 = 150\text{cm}^2$$

$$\text{مساحت نیم کره‌ی داخلی} = 2\pi R'^2 = 2 \times 3 \times 4^2 = 96\text{cm}^2$$

$$\text{مساحت شکل بالایی} = (\pi \times 5^2) - (\pi \times 4^2) = 25\pi - 16\pi = 9\pi = 9 \times 3 = 27\text{cm}^2$$

$$\text{کل مساحت رنگ شده} = 150 + 96 + 27 = 273\text{cm}^2 = 0,273\text{m}^2$$

$$\text{گرم} = 100 \times 0,273 = 27,3$$

که در بین گزینه‌ها موجود نیست.

۲۶

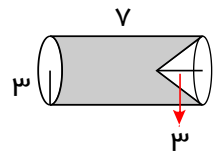
گزینه ۳

شکل حاصل یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۷ است که یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۳ از آن کم شده است.

۲۷

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3 = 9\pi$$



$$\rightarrow V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = 63\pi - 9\pi = 54\pi$$

گزینه ۱

شکل حاصل یک نیم کره با شعاع ۳ می شود که باید یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳ را از آن کسر کرد.

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \times 3^3 = \frac{2 \times 27}{3} \pi = 18\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 3 = 9\pi$$

$$\rightarrow V_{\text{هاشور خورده}} = 18\pi - 9\pi = 9\pi$$

۲۸

گزینه ۱

به سادگی و تجسم می تواند گزینه های ۲ و ۳ و ۴ را تشکیل داد.

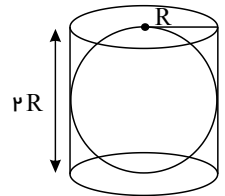
۲۹

گزینه ۱

شعاع کره و شعاع قاعده ی استوانه را R در نظر می گیریم. بنابراین ارتفاع استوانه $2R$ می شود:

$$\text{استوانه } V = \pi R^2 h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$



$V_{\text{کره}} - V_{\text{استوانه}}$ = حجم فضای بین کره و استوانه

$$= 2\pi R^3 - \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^3 \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \pi R^3 \left(\frac{6-4}{3}\right) = \pi R^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi R^3$$

فضای بین کره و استوانه طبق صورت مسأله برابر 18π است. $\left(\frac{2}{3} \pi R^3 = 18\pi\right) \leftarrow$

$$\rightarrow R^3 = \frac{18}{\frac{2}{3}} \rightarrow R^3 = \frac{54}{2} = 27 = 3^3 \rightarrow R = 3 \rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \pi \times 27 = 36\pi$$

۳۰

گزینه ۲

$$\text{حجم کره کوچک} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

شعاع کره بزرگ تر ۲ برابر شعاع کره کوچکتر (هسته گیلاس) می باشد.

۳۱

$$\text{حجم کره بزرگ} = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = \frac{4\pi \times 2 \times 2 \times 2 \times R^3}{3} = \frac{4}{3} \times 8\pi R^3$$

$$\text{حجم گوشت گیلاس} = \text{اختلاف حجمها} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 8 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 7 \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

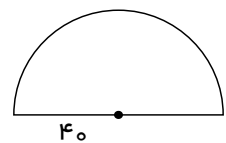
$$\text{نسبت حجمها} = \frac{7 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 7$$

گزینه ۲

$$\text{کره } S = 4\pi r^2 \rightarrow \text{نیم کره } S = \frac{4\pi r^2}{2}$$

$$\rightarrow \text{نیم کره } S = \frac{4\pi \times 40 \times 40}{2} = 3200\pi \text{ m}^2$$

$$3200\pi \div 80 = 400\pi \rightarrow 400 \times 3,14 = 1256$$



۳۲

گزینه ۲

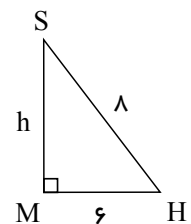
ابتدا اندازه‌ی AH یعنی نصف ضلع قاعده‌ی مربع را می‌یابیم.

بنابر قضیه‌ی فیثاغورث داریم: $AS^2 = SH^2 + AH^2$

$$AH^2 = AS^2 - SH^2$$

$$\rightarrow AH^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{36} = 6$$



۳۳

ضلع مربع

$$\rightarrow AB = 2 \times 6 = 12 \rightarrow \text{مساحت قاعده} = 12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$$

حال باید ارتفاع هرم را بیابیم، MH نصف ضلع مربع است.

$$h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \rightarrow h = \sqrt{28} \rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}(S)(h)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{144}{1} \times \sqrt{28} = 48\sqrt{28} \text{ cm}^3$$

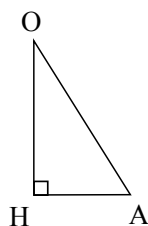
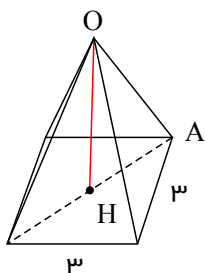
گزینه ۱

ابتدا ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم، مطابق شکل داریم:

اندازه‌ی AH نصف قطر مربع است.

$$(\text{قطر مربع})^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \rightarrow \text{قطر مربع} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



۳۴

همچنین OA برابر ضلع مربع یعنی 3 cm است، پس داریم:

$$OH^2 = OA^2 - HA^2 \rightarrow OH^2 = 3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$9 - \frac{18}{4} = \frac{36 - 18}{4} = \frac{18}{4} \rightarrow OH = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \text{حجم هرم} = \frac{1}{3} (\text{مساحت مربع}) \times OH = \frac{1}{3} (3)^2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۴

برای بدست آوردن حجم هرم، اگر مثلث DAC را قاعده در نظر بگیریم با توجه به اینکه $AD = AC$ و هر کدام نصف وجه‌های مکعب هستند مساحت قاعده از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید:

$$\text{مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

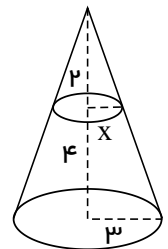
$$V_{\text{هرم}} = \frac{\text{ارتفاع} \times S_{\text{قاعده}}}{3} = \frac{\frac{1}{8} \times 1}{3} = \frac{1}{24}$$

۳۵

گزینه ۱

ابتدا شعاع مخروط کوچک را به کمک قضیه تالس به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جزء}}{\text{کل}} \quad \frac{2}{6} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{2 \times 3}{6} = 1 \rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 1^2 \times 2}{3} = \frac{2}{3} \pi$$

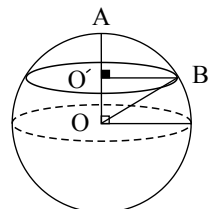


۳۶

گزینه ۳

از O به B وصل می‌کنیم. اندازه‌ی OB مساوی شعاع کره یعنی R است. بنابراین $O'B$ یعنی شعاع قاعده‌ی مخروط را با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث $OO'B$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} O'B^2 &= OB^2 - OO'^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 \\ &= R^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{9R^2}{9} - \frac{R^2}{9} = \frac{8R^2}{9} \\ \rightarrow O'B &= \sqrt{\frac{8R^2}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} R \end{aligned}$$



۳۷

همچنین ارتفاع مخروطی یعنی AO' برابر است با:

$$AO' = AO - OO' = R - \frac{R}{3} \Rightarrow \frac{3R - R}{3} = \frac{2R}{3}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (O'B)^2 \times AO' = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{8}}{3} R \right)^2 \times \frac{2R}{3} = \frac{1}{3} \pi \times \frac{8}{9} R^2 \times \frac{2}{3} R = \frac{16}{81} \pi R^3$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{16}{81} \pi R^3} = \frac{4}{3} \times \frac{81}{16} = \frac{27}{4}$$

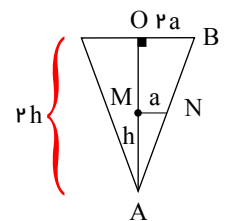
گزینه ۳

دو مثلث AOB و AMN متشابه هستند و چون M وسط ضلع OA است، نسبت تشابه آنها برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین شعاع MN نیز نصف شعاع OB است. اگر $MN = a$ و $AM = h$ باشد، در این صورت $OB = 2a$ و $AO = 2h$ است، پس داریم:

$$V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3} \pi a^2 h$$

$$V_{\text{مخروط بزرگ}} = \frac{1}{3} \pi (2a)^2 2h = \frac{1}{3} \pi \times 8a^2 h$$

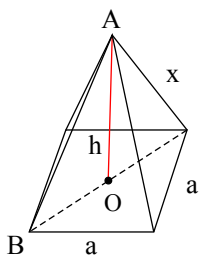
$$\rightarrow \frac{V_{\text{مخروط کوچک}}}{V_{\text{مخروط بزرگ}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi a^2 h}{\frac{1}{3} \pi a^2 h \times 8} = \frac{1}{8}$$



۳۸

گزینه ۳

برای ساختن یک مکعب به وسیله سه هرم مربع القاعده یکسان بایستی شکل هرم‌ها به صورت زیر باشند: یال AB بزرگترین یال این هرم است که همان قطر اصلی مکعب می‌باشد. پس داریم:



$$AB = a\sqrt{3}$$

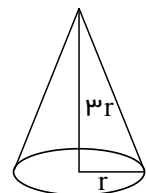
۳۹

گزینه ۲

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 \times 3r}{3} = \pi r^3, \quad h = 3r$$

$$V = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2} = \frac{4\pi r^3}{6} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{نیم کره}}} = \frac{\pi r^3}{\frac{2}{3} \pi r^3} = \frac{3\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{3}{2}$$



۴۰

گزینه ۴

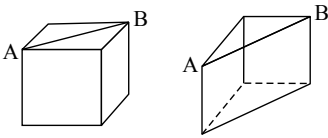
$$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \text{حجم} \rightarrow \frac{(3 \times 3) \times x}{3} = 24 \rightarrow \frac{9 \times x}{3} = \frac{24}{1}$$

$$\rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm}$$

۴۱

گزینه ۳

شکل برش داده شده را رسم می‌کنیم:



این شکل، ۵ وجه دارد: دو وجه به شکل مثلث در بالا و پایین که هر کدام نصف مساحت وجه مکعب سابق را دارد و دو وجه مربع و یک وجه مستطیل، کافی است طول AB را به دست آوریم با توجه به رابطه فیثاغورس.

$$AB^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow AB^2 = 50 \Rightarrow AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 5\sqrt{2} \times 5 = 25\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت دو وجه مربع} = 2 \times 5 \times 5 = 50$$

$$\text{مساحت دو وجه مثلث} = \text{مساحت یک مربع} = 5 \times 5 = 25$$

$$\Rightarrow \text{مساحت کل} = 25\sqrt{2} + 50 + 25 = 75 + 25\sqrt{2} = 25(3 + \sqrt{2})$$

۴۲

گزینه ۴



نکته: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ است.

شش ضلعی منتظم به ضلع a از ۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a تشکیل شده است.

مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است.

حال با ۶ برابر کردن آن داریم:

$$6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

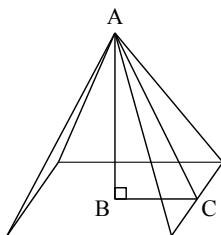
$$\text{برای این سؤال: مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{3 \times 4^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} \times 10\sqrt{3} = 240$$

۴۳

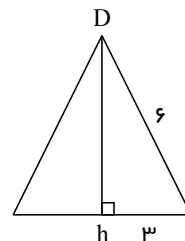
گزینه ۳

باتوجه به مثلث قائم‌الزاویه ABC

در شکل ارتفاع این هرم را محاسبه می‌کنیم (البته ابتدا باید ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ را به دست بیاوریم):

$$Dh^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow (Dh)^2 = 36 - 9$$

$$Dh^2 = 27 \Rightarrow Dh = \sqrt{27}$$

حال برای مثلث ABC داریم:

$$AB^2 + BC^2 = (AC)^2$$

$$AB^2 + 3^2 = (\sqrt{27})^2 \Rightarrow AB^2 = 27 - 9 \Rightarrow AB = \sqrt{18}$$

حال باتوجه به رابطه حجم هرم داریم:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \sqrt{18} = 12\sqrt{18} = 12\sqrt{9 \times 2} = 36\sqrt{2}$$

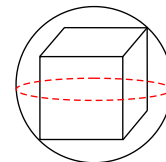
گزینه ۴

اگر ضلع مکعب برابر a باشد، آنگاه قطر مکعب $\sqrt{3}a$ است که برابر قطر کره است.

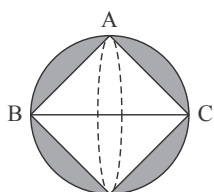
$$\Rightarrow \sqrt{3}a = 2R \stackrel{a=\sqrt{12}}{\Rightarrow} \sqrt{3} \times \sqrt{12} = 2R$$

$$\Rightarrow \sqrt{36} = 2R \rightarrow 2R = 6 \rightarrow R = 3$$

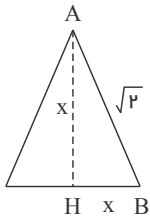
$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi$$



گزینه ۳

از دوران شکل حول BC یک کره که در داخل آن دو مخروط که از قاعده به هم متصل هستند، کم شده است.

برای به دست آوردن حجم حاصل از قسمت هاشور خورده، حول BC کافیست حجم کره را منهای دو مخروط ایجاد شده کنیم.



باتوجه به رابطه فیثاغورس:

$$AH^2 + BH^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1$$

پس شعاع کره و شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط برابر 1 است.

$$V_{\text{کره}} - V_{\text{دو مخروط}} = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

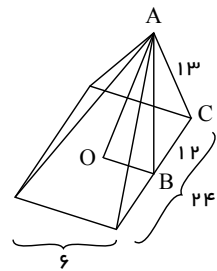
گزینه 1

ابتدا برای مثلث ABC رابطه فیثاغورس را می نویسیم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$AB^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$



47

حال برای مثلث AOB داریم:

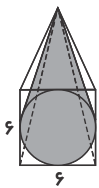
$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$AO^2 = 3^2 = 5^2 \Rightarrow AO^2 = 16 \Rightarrow AO = 4$$

پس ارتفاع این هرم برابر 4 است حال حجم هرم را محاسبه می کنیم:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 24 \times 4 = 192$$

گزینه 4



نکته: حجم هر هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h , برابر است با: $V = \frac{1}{3}Sh$

نکته: حجم هر مخروط با شعاع قاعده R و ارتفاع h , برابر است با: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

48

مطابق شکل، ارتفاع مخروط و هرم برابر است، پس با استفاده از مساحت قاعده و حجم هرم، ارتفاع را به دست می آوریم:

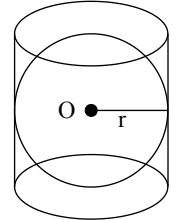
$$V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow 120 = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times h \Rightarrow 120 = 12h \Rightarrow h = 10$$

حال باتوجه به اینکه طول ضلع مربع قطر دایره است، داریم:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times (3)^2 \times 10 = 30\pi$$

گزینه ۲

هنگامی که کره‌ای درون استوانه‌ای محاط می‌شود شعاع قاعده استوانه و کره برابر است و ارتفاع استوانه برابر است با قطر کره.



۴۹

(ارتفاع استوانه) $h = 2r$ و (شعاع استوانه) $R = r$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = 36\pi \rightarrow r^3 = 36 \times \frac{3}{4} = 27 \rightarrow r = 3$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

گزینه ۳

ابتدا طبق قضیه تالس نسبت شعاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \xrightarrow{h' = \frac{1}{2}h} \frac{r'}{r} = \frac{1}{2} \rightarrow r = 2r'$$

$$\frac{V_{\text{مخروط بزرگ}}}{V_{\text{مخروط کوچک}}} = \frac{\frac{1}{3} \times r^2 \pi \times h}{\frac{1}{3} \times r'^2 \pi \times h'} = \frac{(2r')^2 \times 2h'}{(r')^2 \times h'} = \frac{4r'^2 h'}{r'^2 h'} = 8$$

۵۰

پاسخنامه کلیدی

| | | | | | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| ۱ | ۲ | ۱۱ | ۲ | ۲۱ | ۱ | ۳۱ | ۲ | ۴۱ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۱۲ | ۳ | ۲۲ | ۲ | ۳۲ | ۲ | ۴۲ | ۳ |
| ۳ | ۲ | ۱۳ | ۴ | ۲۳ | ۱ | ۳۳ | ۲ | ۴۳ | ۴ |
| ۴ | ۴ | ۱۴ | ۴ | ۲۴ | ۲ | ۳۴ | ۱ | ۴۴ | ۳ |
| ۵ | ۳ | ۱۵ | ۴ | ۲۵ | ۴ | ۳۵ | ۴ | ۴۵ | ۴ |
| ۶ | ۴ | ۱۶ | ۲ | ۲۶ | ۴ | ۳۶ | ۱ | ۴۶ | ۳ |
| ۷ | ۴ | ۱۷ | ۳ | ۲۷ | ۳ | ۳۷ | ۳ | ۴۷ | ۱ |
| ۸ | ۱ | ۱۸ | ۲ | ۲۸ | ۱ | ۳۸ | ۳ | ۴۸ | ۴ |
| ۹ | ۴ | ۱۹ | ۳ | ۲۹ | ۱ | ۳۹ | ۳ | ۴۹ | ۲ |
| ۱۰ | ۱ | ۲۰ | ۱ | ۳۰ | ۱ | ۴۰ | ۲ | ۵۰ | ۳ |