فصل نهم
ریاضی هفتم

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۶/۰۴
زمان برگزاری: ۴۰ دقیقه
آموزشگاه همکلاسی: کرج
کانال دکتر ریاضی: @Math_Dr

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: فصل نهم ریاضی هفتم آمادگی آزمون تکمیل ظرفیت پایه هشتم مدارس تیزهوشان

۱ در کیسه‌ای شش مهرهٔ قرمز، چهار مهرهٔ آبی و پنج مهرهٔ سبز قرار داشت. دو مهره از کیسه خارج کردیم که یکی آبی و دیگری سبز بود. احتمال آن‌که مهرهٔ سوم که به تصادف از کیسه خارج می‌شود، مهره‌ای قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

۲ بناست در یک مسابقهٔ فوتبال زنندهٔ پنالتی با پرتاب یک سکه از بین ابراهیم و داریوش انتخاب شود. اگر احتمال گل شدن ضربهٔ پنالتی با احتمال گل نشدنِ آن یکسان باشد، احتمال آن که ابراهیم پنالتی را گل کند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۳ در خانواده‌ای با سه فرزند، احتمال کدام پیشامد از بقیه کم‌تراست؟

۱) هم پسر و هم دختر داشته باشند.
۲) فقط یکی دختر باشد.
۳) حداقل دو تا پسر باشند.
۴) فرزند سوم برادر داشته باشد.

۴ اگر تاسی را دو بار پرتاب کنیم احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده **۷** باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

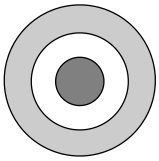
۵ یک تاس و **۳** سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه تعداد دفعاتی که «رو» ظاهر می‌شود با عدد روی تاس برابر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴۸}$ ۲) $\frac{۵}{۴۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۳۶}$

۶ اگر یک سال کبیسه **۳۶۶** روز داشته باشد احتمال آنکه **۵۳** تا یکشنبه داشته باشد چقدر است؟ (المپیاد آفریقای جنوبی)

۱) $\frac{۵۳}{۲۶۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶۶}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۵۳}$

۷ یک تابلو خاص از **۳** تا دایرهٔ هم مرکز تشکیل شده است. و نسبت شعاع این **۳** دایره: **۱**، **۲** و **۳** است. نقطه‌ای به دلخواه انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که نقطه در حلقهٔ بیرونی قرار گیرد چند برابر آن است که نقطه در دایره مرکزی بیفتد؟(المپیاد آفریقای جنوبی – **۱۳۹۱**)



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸ یک تاس شش وجهی را طوری ساخته‌اند که احتمال ظاهر شدن عدد **۲** در آن $\frac{۱}{۵}$ است. احتمال ظاهر شدن عددی زوج در یک بار پرتاب این تاس چقدر است؟ (اعداد غیر از **۲** هم‌شانس هستند) (نمونه دولتی – آذربایجان غربی – اردبیل –**۹۶** – **۹۵**)

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۹ سکهٔ سالمی را سه بار انداخته‌ایم و هر بار «رو» آمده است. احتمال این که سکه در پرتاب چهارم هم رو بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۰ روی ۶ کارت اعداد ۱ تا ۶ را نوشتیم و کارت‌ها را داخل کیسه‌ای ریختیم. دو کارت را به طور هم‌زمان به دلخواه بر می‌داریم، احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو کارت بزرگ‌تر یا مساوی ۹ باشد، چند است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۱۱ اگر تمام زیرمجموعه‌های $A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ را بنویسیم و یکی از این زیرمجموعه‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه در مجموعهٔ انتخاب شده حاصلضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۷ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲ در حومهٔ شهر در ساعات اوج مصرف به طور متوسط هر ۷ روز یک بار منبع انرژی قطع می‌شود. در زمانی غیر از آن به طور متوسط هر ۱۷ روز قطع می‌شود. بعضی روزها منبع انرژی هم در زمان اوج مصرف و هم غیر آن قطع می‌گردد. ساعات اوج مصرف بین ۶ تا ۹ صبح و ۵ تا ۹ عصر است. احتمال آن‌که منبع انرژی این منطقه در یک روز خاص قطع نشود چه‌قدر است؟ (المپیاد آفریقای جنوبی – ۱۳۸۷)

۱) $\frac{۱}{۱۱۹}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۸۸}$ ۳) $\frac{۲۳}{۱۱۹}$ ۴) $\frac{۲۴}{۱۱۹}$

۱۳ نوید در یک مهمانی شرکت کرده بود. او متوجه شد که ۳ نفر از میهمانان در یک روز هفته و یک ماه از سالی که او به دنیا آمده بود متولد شده‌اند. همچنین او متوجه شد همگی میهمانان در ۶ ماه نخست سال متولد شده‌اند. در این مهمانی حداقل چند نفر شرکت کرده باشند (با نوید) که مطمئن باشیم چنین اتفاقی می افتد؟ (المپیاد آفریقای جنوبی –۱۳۸۶)

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۱۹۶

۱۴ در یک قرعه‌کشی هفتگی ۶ عدد به طور تصادفی از مجموعه اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و... ۴۸، ۴۹ انتخاب می‌شوند. خانواده فاضلی یک بلیط قرعه‌کشی خریده است با اعداد: ۲،۱۷،۲۶،۲۹،۳۰،۴۳، پنج عدد اول قرعه‌کشی ۲،۴۳،۳۰،۲۶،۱۷ بودند. شانس این که عدد بعدی ۲۹ باشد چقدر است؟ (المپیاد آفریقای جنوبی – ۱۳۸۰)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۴۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴۹}$

۱۵ اگر $A\cup B=\{۱,۲,\cdots,۱۰\}$ و $B\cup C=\{۶,۷,\cdots,۱۴\}$ باشد، مجموعهٔ $(A\cup B)\cup C$ چند عضو دارد؟

۱) نوزده ۲) چهارده ۳) دوازده ۴) شانزده

۱۶ از بین اعداد دورقمی فرد عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشد ولی مضرب ۳ نباشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴۵}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۱۷ دو رأس متمایز یک شش‌ضلعی را هم‌زمان با هم، بدون ترتیب و اتفاقی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این دو رأس مجاور یک‌دیگر باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰}$

۱۸ در یک کیسه ۲۰ مهرهٔ قرمز و ۳۰ مهرهٔ آبی و تعدادی مهرهٔ سفید وجود دارد، به نحوی که اگر بخواهیم از میان این مهره‌ها، یک مهره به تصادف برداریم، احتمال سفید بودن آن $\frac{۹}{۱۱}$ است. احتمال این که این مهره قرمز باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲}{۳۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵۵}$

۱۹ اگر مجموعهٔ A دارای ۳ عضو و مجموعهٔ B دارای ۵ عضو باشد و اشتراک این دو مجموعه دارای ۴ زیرمجموعه باشد، $B-A$ دارای چند زیرمجموعه است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۰ علی می‌خواهد برای مجموعهٔ کل حالت‌های $S=\{۱,۲,۳\}$، پیشامدهای مختلفی را بنویسد. او حداکثر برای چند مقدار مختلف احتمال، می‌تواند پیشامد بنویسد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

@riazicafe

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۲ بعد از خروج یه مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ سبز:

$$n(S) = ۶ + ۳ + ۴ = ۱۳$$

$$n(A) = ۶ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۳}$$

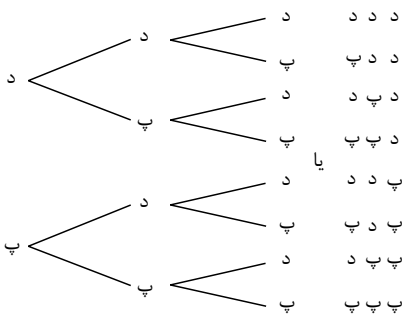
۲ گزینه ۲ برای این ضربه، **۴** حالت وجود دارد:

یک: ابراهیم انتخاب شود و گل بزند. دو: ابراهیم انتخاب شود و گل نزند.

سه: داریوش انتخاب شود و گل بزند. چهار: داریوش انتخاب شود و گل نزند.

یکی از چهار حالت بالا مطلوب است، پس احتمال $\frac{۱}{۴}$ است.

۳ گزینه ۲ ابتدا به کمک راهبرد تفکر نظام‌دار کلیهٔ حالت‌ها را در نظر می‌گیریم:



سپس احتمال هر گزینه را حساب می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $\frac{۶}{۸}$ گزینهٔ ۲: $\frac{۳}{۸}$ گزینهٔ ۳: $\frac{۴}{۸}$ گزینهٔ ۴: $\frac{۶}{۸}$

۴ گزینه ۱ اگر تاس را دو بار پرتاب کنیم، کل حالت‌ها برابر $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ می‌شود. حال حالت‌هایی را که مجموع دو تاس **۷** می‌شود، بررسی می‌کنیم.

$$A = \{ (\underset{\text{تاس } a \downarrow}{۱} , \underset{\uparrow \text{تاس } b}{۶}) (۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱) \}$$

پس کل حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر با **۷** می‌شود، یعنی $n(A) = ۶$

حال:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

۵ گزینه ۱ ابتدا تعداد کل حالت‌های پرتاب یک تاس و سه سکه را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = ۶ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴۸$$

حال مجموعهٔ A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (شمارهٔ تاس برابر تعداد دفعات رو آمدن سکه‌ها):

$$A = \{ (۱ , ر , ر , پ) \text{ و } (۱ , ر , پ , ر) \text{ و } (۱ , پ , ر , ر)$$

@riazicafe

(ر ، ر ، پ ، ۲) و (ر ، پ ، ر ، ۲) و (پ ، ر ، ر ، ۲) و

و (ر ، ر ، ر ، ۳)}

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۴۸}$$

۶

گزینه ۳ باقی‌مانده ۳۶۶ بر ۷ عدد ۲ است یعنی در هر سال کبیسه ۲ روز در هفته ۵۳ بار تکرار می‌شود و آن دو روز آغاز سال است پس اگر سال با شنبه یا یکشنبه شروع شود ۵۳ تا یکشنبه داریم یعنی به احتمال $\frac{۲}{۷}$

۷

گزینه ۳ شعاع دایره‌ها را r ، $۲r$ ، $۳r$ در نظر می‌گیریم.

مساحت حلقهٔ بیرونی برابر است با: $\pi(۳r)^۲-\pi(۲r)^۲=۵\pi r^۲$

مساحت دایرهٔ مرکزی برابر است با: $\pi r^۲$

$$\text{نسبت احتمال‌ها}=\frac{۵\pi r^۲}{\pi r^۲}=۵$$

۸

گزینه ۳ احتمال آمدن عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۵}$ است پس احتمال اینکه عددی غیر از ۲ بیاید برابر $\frac{۴}{۵}$ است $\left(۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}\right)$. احتمال اعداد به غیر از ۲ (۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶) برابر $\frac{۴}{۵}$ شده است و چون احتمال این اعداد هم شانس است پس:

$$\frac{۴}{۵}\div ۵=\frac{۴}{۲۵}$$

احتمال زوج آمدن عدد تاس

$$\text{احتمال عدد ۶}+\text{احتمال عدد ۴}+\text{احتمال عدد ۲}=\frac{۱}{۵}+\frac{۴}{۲۵}+\frac{۴}{۲۵}=\frac{۱۳}{۲۵}$$

۹

گزینه ۱ دقّت کنید احتمال رو یا پشت آمدن سکهٔ سالم در پرتاب چهارم، از احتمال پرتاب‌های قبلی جدا است، یعنی همان $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۰

گزینه ۴ ۶ کارت داریم (مانند پرتاب دو تاس)، تعداد کل حالت‌ها برابر $۶\times ۶=۳۶$ است چون دو کارت را همزمان برداشته‌ایم حالت‌هایی که دو عدد یکسان هستند را حذف می‌کنیم. $۳۶-۶=۳۰$

حال حالت‌هایی را که مجموع دو کارت بزرگ‌تر مساوی ۹ است، بررسی می‌کنیم.

$$\text{مجموع ۹}=\{(۳,۶)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۳)\}$$

$$\text{مجموع ۱۰}=\{(۴,۶)(۶,۴)\}$$

$$\text{مجموع ۱۱}=\{(۵,۶)(۶,۵)\}$$

تعداد این حالت‌ها برابر ۸ است، پس داریم:

$$\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

۱۱

گزینه ۲ مجموعهٔ $A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ و $n(A)=۶$. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ۶ عضوی برابر $n(S)=۲^۶=۶۴$ است.

حال برای انتخاب مجموعه‌ای که حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن برابر ۷ باشد، ۱ و ۷ را به عنوان کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه در نظر می‌گیریم (چون حاصل‌ضرب هیچ کدام از اعداد دیگر در هم برابر ۷ نمی‌شود).

$B = \{۱, \square, \square, ۷\}$

و برای اینکه ۱ و ۷ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو این مجموعه‌ها باشند، عضوهای ۳ یا ۵ می‌توانند در مجموعه قرار بگیرند یا قرار نگیرند، پس برای هر کدام دو حالت وجود دارد: $۲ \times ۲ = ۴$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۶۴} = \frac{۱}{۱۶}$$

۱۲ گزینه ۳ احتمال آنکه برق قطع بشود برابر است با:

$$\left(۱ - \frac{۱}{۷}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۱۷}\right) = \frac{۹۶}{۱۱۹}$$

احتمال آنکه برق قطع نشود برابر است با:

$$۱ - \frac{۹۶}{۱۱۹} = \frac{۲۳}{۱۱۹}$$

۱۳ گزینه ۳

۷ روز هفته داریم و ۶ ماه، بنابراین $۷ \times ۶ = ۴۲$ انتخاب وجود دارد. در این صورت برای اینکه ۳ نفر در روز و ماه مشترک باشند باید حداقل $۴۲ \times ۲ + ۱ = ۸۵$ مهمان وجود داشته باشد.

۱۴ گزینه ۳ از مجموعه‌ی اعداد ۱،۲،۳ ... ۴۹، ۴۹ عدد وجود دارد که پنج تای از آن‌ها انتخاب شده است پس ۴۴ عدد می‌ماند. شانس این که عدد ششم ۲۹ باشد، برابر است با: $\frac{۱}{۴۴}$

۱۵ گزینه ۲

$$(A \cup B) \cup C = \{۱, ۲, \cdots, ۱۴\} \Rightarrow n(A \cup B \cup C) = ۱۴$$

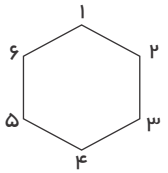
۱۶ گزینه ۱ تعداد اعداد دورقمی که فرد ۴۵ تاست:

$$S = \{۱۱, ۱۳, \cdots, ۹۷, ۹۹\} \Rightarrow n(S) = \frac{۹۹ - ۱۱}{۲} + ۱ = ۴۵$$

اعداد دورقمی فرد مضرب ۳ نیستند:

$$A = \{۲۵, ۳۵, ۵۵, ۶۵, ۸۵, ۹۵\} \Rightarrow n(A) = ۶ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۴۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

۱۷ گزینه ۳ از آن‌جا که رأس‌های متمایز، بی‌ترتیب و کاملاً تصادفی با هم انتخاب شده‌اند، می‌توانیم دو رأس انتخاب شده را در کنار هم نشان دهیم. کلّ حالات ممکن و حالات مطلوب:



$$S = \{(۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۱,۶), (۲,۳), (۲,۴), (۲,۵), (۲,۶), (۳,۴), (۳,۵), (۳,۶), (۴,۵), (۴,۶), (۵,۶)\}$$
$$\Rightarrow n(S) = ۱۵$$

@riazicafe

$A=\{(۱,۲),(۱,۶),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}\Rightarrow n(A)=۶$

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$

۱۸

گزینه ۴ تعداد مهره‌های سفید موجود در کیسه را x در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

احتمال سفید بودن مهره $=\frac{x}{۲۰+۳۰+x}=\frac{۹}{۱۱}\Rightarrow ۹x+۴۵۰=۱۱x\Rightarrow ۲x=۴۵۰\Rightarrow x=۲۲۵$

بنابراین تعداد کل مهره‌های این کیسه برابر است با:

$۲۰+۳۰+۲۲۵=۲۷۵$

پس احتمال قرمز بودن مهره‌ای که به تصادف از کیسه خارج می‌شود برابر است با:

$\frac{۲۰}{۲۷۵}=\frac{۴}{۵۵}$

۱۹

گزینه ۳ مجموعه‌ای که ۴ زیرمجموعه داشته باشد دارای ۲ عضو است، پس A و B دارای ۲ عضو مشترک هستند. بنابراین مجموعهٔ $B-A$ دارای $۳-۲=۱$ عضو است. یک مجموعهٔ ۳ عضوی دارای ۸ زیرمجموعه است، بنابراین گزینهٔ ۳ درست است.

۲۰

گزینه ۳ نکته: همواره مجموعهٔ حالت‌های مطلوب زیرمجموعه‌ای از کل حالت‌ها است.

مطابق نکته: تعداد کل مجموعه پیشامدهایی که می‌توان روی مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳\}$ نوشت، برابر تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه یعنی ۸ عدد است.

زیرمجموعه‌های S : $\underbrace{\{\}}_{\text{۰ عضو}}$ ، $\underbrace{\{۱\},\{۲\},\{۳\}}_{\text{۱ عضو}}$ ، $\underbrace{\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\}}_{\text{۲ عضو}}$ ، $\underbrace{\{۱,۲,۳\}}_{\text{۳ عضو}}$

بنابراین احتمال‌های پیشامدهای علی می‌تواند $\frac{۰}{۳}$ یا $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۳}$ باشد. یعنی او حداکثر برای ۴ مقدار احتمال می‌تواند پیشامدهای مختلف بنویسد.

۱ ☆ ۲	۵ ☆ ۱	۹ ☆ ۱	۱۳ ☆ ۳	۱۷ ☆ ۳
۲ ☆ ۲	۶ ☆ ۳	۱۰ ☆ ۴	۱۴ ☆ ۳	۱۸ ☆ ۴
۳ ☆ ۲	۷ ☆ ۳	۱۱ ☆ ۲	۱۵ ☆ ۲	۱۹ ☆ ۳
۴ ☆ ۱	۸ ☆ ۳	۱۲ ☆ ۳	۱۶ ☆ ۱	۲۰ ☆ ۳

@riazicafe