



هم کلاسی
Hamkelasi.ir

۱۰۱- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

$B \cap A' = \emptyset$ (۴) $A \cap B' = \emptyset$ (۳) $A \cap B' = A$ (۲) $B \cap A' = A$ (۱)

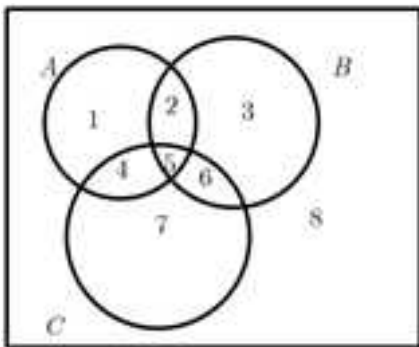
۱۰۱- گزینه ۴ واضح است که سه گزینه دیگر درست هستند.

۱۰۲- مجموعه $(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$ با کدام مجموعه برابر است؟

B' (۴) A (۳) $A \cap B'$ (۲) $A \cup B'$ (۱)

$$(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B)) = \{1, 4\} \cup \{1, 4, 7, 8\} = B'$$

۱۰۲- گزینه ۴



۱۰۳- در مجموعه‌های چهار عضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد.

تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ کدام است؟

۶ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۱۰۳- گزینه ۳

$$\begin{cases} x + 2 = 5 \rightarrow x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ t - 1 = 4 \rightarrow t = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2 = 7 \rightarrow x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4 \\ t - 1 = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$$

زیرا



۱۰۴- کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟

(۲) $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

(۱) $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

(۴) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

(۳) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow q &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\ &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \\ &\equiv [\sim p \vee (p \wedge q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)] \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \end{aligned}$$

۱۰۴- گزینه ۱

۱۰۵- باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب، ۸ و ۵ است. باقی مانده تقسیم

$P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

(۴) $2x - 2$

(۳) $2x + 6$

(۲) $x + 2$

(۱) $-x + 4$

$$p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + ax + b$$

$$p(1) = 8 \rightarrow a + b = 8$$

$$p(-\frac{1}{2}) = 5 \rightarrow -\frac{1}{2}a + b = 5$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 6 \Rightarrow R = 2x + 6$$

۱۰۵- گزینه ۳

۱۰۶- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ و $y = \frac{1}{2}x + 2$ ، کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

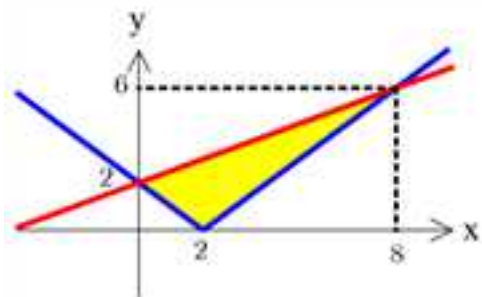
(۲) ۹

(۱) ۸

۱۰۶- گزینه ۴

مساحت قسمت رنگی = مساحت ذوزنقه - سفیدها

$$S = \left(\frac{(2+6) \times 8}{2} \right) - \left(\frac{2 \times 2}{2} + \frac{6 \times 6}{2} \right) = 12$$



۱۰۷- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

۱۰۷- گزینه ۱

$f^{-1}(20) = ?$

$x + \sqrt{x} = 20 \rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$

$(x - 25)(x - 16) = 0 \rightarrow x = 16$

$g^{-1}(16) = ?$

$\frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 16 - 16x = 9x + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

۱۰۸- فریته نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را 4 واحد به سمت راست،

انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

$x = 2/5$ (۴)

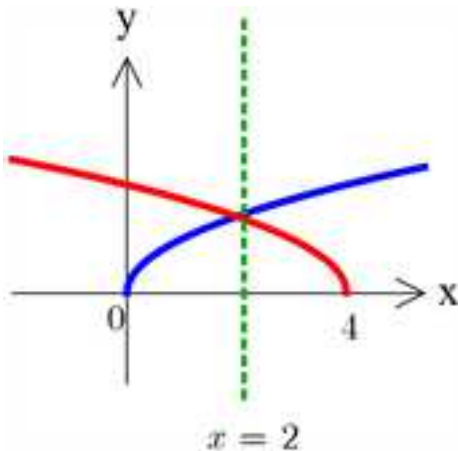
$x = 2$ (۳)

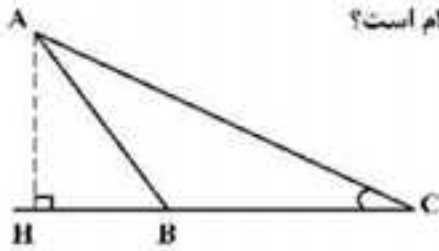
$x = 1/5$ (۲)

$x = 1$ (۱)

۱۰۸- گزینه ۳

دو نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{-(x-4)}$ را رسم میکنیم.





۱۰۹- در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه ارتفاع AH کدام است؟

(۱) $\frac{3}{25}$

(۲) $\frac{3}{5}$

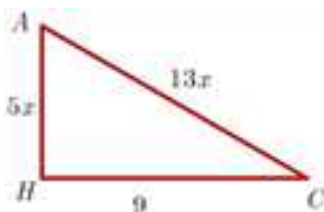
(۳) $\frac{3}{6}$

(۴) $\frac{3}{75}$

۱۰۹- گزینه ۴

چون مقدار \sin را داریم میتوان به این صورت در نظر گرفت:

با نوشتن رابطه فیثاغورث داریم:



$$(13x)^2 = (5x)^2 + 81 \rightarrow x^2 = \frac{81}{144} \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$AH = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = \frac{3}{75}$$

۱۱۰- اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{3}{5}$

(۱) $-\frac{4}{5}$

۱۱۰- گزینه ۳

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) &= \cos\frac{11\pi}{4} \cos\alpha - \sin\frac{11\pi}{4} \sin\alpha \\ &= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-7\sqrt{2}}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

۱۱۱- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x) = 1$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

$$\frac{11\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{9\pi}{2} \quad (3)$$

$$6\pi \quad (2)$$

$$5\pi \quad (1)$$

۱۱۱- گزینه ۲

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$x_1 = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, x_3 = \frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, x_4 = \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\pi$$

۱۱۲- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. یعنی

$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$ مجموع اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟

$$3980 \quad (4)$$

$$4010 \quad (3)$$

$$4020 \quad (2)$$

$$4120 \quad (1)$$

۱۱۲- گزینه ۳

جمله اول هر دسته را میتوان به فرم $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ و جمله آخر هر دسته را میتوان به فرم

$\frac{n(n-1)}{2} + 1 + (n-1)$ در نظر گرفت. پس جمله اول و آخر دسته بیستم به این صورت است:

$$\text{جمله اول} \quad \frac{20 \times 19}{2} + 1 = 191$$

$$\text{جمله آخر} \quad 191 + (20 - 1) = 210$$

از عدد ۱۹۱ تا ۲۱۰ تعداد ۲۰ جمله داریم پس: $s = \frac{20}{2}(191 + 210) = 4010$

۱۱۳- مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی مانده را از دست

بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می ماند؟ ($\log 3 = 0,48$)

۲۴ = (۱) ۲۷ = (۲) ۳۰ = (۳) ۲۴ = (۴)

۱۱۳- گزینه ۱

$$24 \times \left(\frac{90}{100}\right)^t = 8 \rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{3}$$

$$t(\log 9 - \log 10) = (-\log 3)$$

از طرفین لگاریتم میگیریم داریم: پس ۱۲ ماه طول میکشد این اتفاق بیفتد

$$t = \frac{-0,48}{2 \times 0,48 - 1} = 12$$

$$t = 12 \times 30 = 360 \text{ یعنی}$$

۱۱۴- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ کدام است؟

۱ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) -۱ (۴)

۱۱۴- گزینه ۱

$$\frac{2^{2n} \times 2 - \frac{2}{2^{2n}}}{2 \times 2^{2n} + 3 \times \frac{2}{2^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{2n})^2 \times 2 - 2}{(2^{2n})^2 \times 2 + 6} = 1$$

۱۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}}$ کدام است؟

۴) $5/6$

۳) $5/8$

۲) $1/2$

۱) $1/5$

۱۱۵- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} \xrightarrow{\text{hop}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{-6}{5} = -1/2$$

۱۱۶- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

۴) $5/2$

۳) ۱

۲) -۱

۱) $2/3$

۱۱۶- گزینه ۱

با توجه به شروط داده شده باید در نقاط $x = 0, x = 2$ پیوستگی ها بررسی شوند.

$$x = 0 \rightarrow (0-1)[0^+] = 0 + 0 + b$$

$$x = 2 \rightarrow (2-1)[2^-] = 4 + 2a + b$$

داریم:

$$b = 0 \rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

۱۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط‌های مجانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است. کدام است؟

(۱) $1/25$ (۲) $1/5$ (۳) $1/75$ (۴) $-1/5$

۱۱۷- گزینه ۱

$$y = -1 \rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \rightarrow a = 2$$

$$2x^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{2} \rightarrow -1 = \frac{-b}{2} \rightarrow b = 2 \\ P = \frac{c}{2} \rightarrow -2 = \frac{c}{2} \rightarrow c = -4 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{-2 - 3}{2 - 2 - 4} = \frac{5}{-4} = -1/4$$

۱۱۸- اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

(۱) $-1/2$ (۲) $1/4$ (۳) $1/2$ (۴) 1

۱۱۸- گزینه ۲

$$g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$$

$$g'(x) = \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{1 + \tan^2 x}} f'(\sqrt{1 + \tan^2 x})$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \times f'(2) \rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

۱۱۹- آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21-x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع با کدام مقدار x است؟

$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$ (۴)
 $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (۳)
 $2 + 2\sqrt{2}$ (۲)
 $4 + \sqrt{2}$ (۱)

۱۱۹- گزینه ۴

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x) \rightarrow -1 = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

$$\rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = x - 2 \rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Delta' = 50$$

$$x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, x = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} \otimes$$

۱۲۰- خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۳ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) -۴ (۱)

۱۲۰- گزینه ۳

$$x = 4 \rightarrow y = 8$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{(\sqrt{x})^2} \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۱۲۱- اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ برابر ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

۱ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) -3 (۳) -1 (۴)

۱۲۱- گزینه ۴

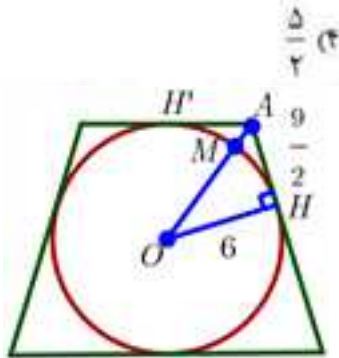
$$S = \tan \alpha + \tan \beta = \frac{-3}{2}$$

$$P = \tan \alpha \tan \beta = \frac{-1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{-3}{2}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = -1$$



۱۲۲- یک دوزنقه متساوی الساقین با قاعده‌هایی به اندازه ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده کوچک دوزنقه، کدام است؟



۲ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۱۲۲- گزینه ۱

اگر دوزنقه متساوی الساقین با قاعده های x, y بر یک دایره محیط شود

شعاع آن $\frac{\sqrt{xy}}{2}$ خواهد بود. پس: $OH = 6 \rightarrow r = \frac{3 \times 4}{2} = 6$

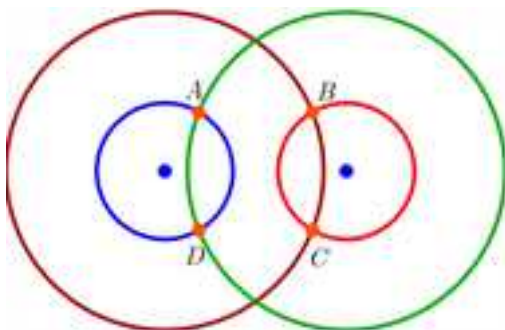
از طرفی $AH = AH' = \frac{x}{2} = \frac{9}{2}$

با استفاده از فیثاغورث داریم: $OA = \frac{15}{2}$ سوال مقدار AM را خواسته است.

$$AM = OA - OM = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

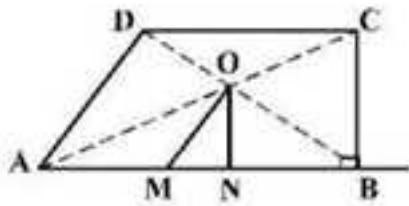
۱۲۳- پاره خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

- (۱) لوزی
- (۲) متوازی‌الاضلاع
- (۳) مستطیل
- (۴) دوزنقه متساوی‌الساقین



۱۲۳- گزینه ۳

۱۲۴- مطابق شکل زیر، از محل تلاقی قطرهای ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ ($\hat{B} = 90^\circ$)، پاره‌خط‌های OM و ON به ترتیب



موازی با AD و BC رسم شده‌اند. نسبت $\frac{AM}{BN}$ ، کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ کوچک‌تر از ۱ (۳)
- ۴ بزرگ‌تر از ۱ کوچک‌تر از ۲ (۴)

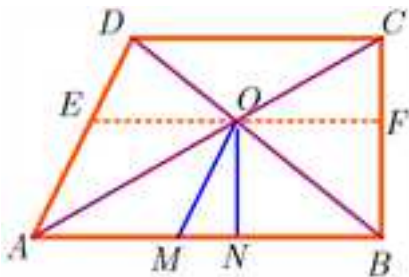
۱۲۴- گزینه ۱

از نقطه محل تلاقی دو قطر موازی قاعده ها رسم میکنیم:

چهارضلعی $OEAM$ متوازی الاضلاع پس: $OE = AM$

چهارضلعی $OFBN$ متوازی الاضلاع پس: $OF = BN$

چون $OE = OF$ لذا: $AM = BN$ پس جواب گزینه ۱ است.



۱۲۵- اندازه قاعده‌های ذوزنقه‌های ۵ و ۹ واحد است. پاره‌خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه چنان رسم می‌کنیم که ذوزنقه را به دو

قسمت با مساحت مساوی، تقسیم کند. اندازه پاره‌خط، کدام است؟

- ۷ (۱)
- $\sqrt{53}$ (۲)
- $2\sqrt{3}$ (۳)
- $\sqrt{57}$ (۴)

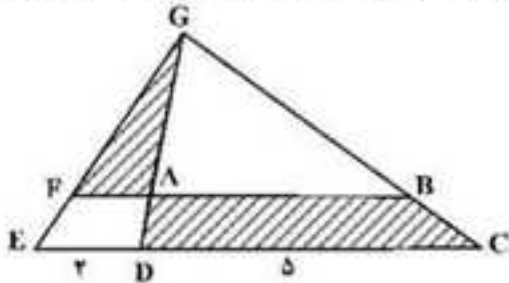
۱۲۵- گزینه ۲

اگر در یک ذوزنقه با قاعده های x, y خطی موازی قاعده های ذوزنقه رسم شود بطوریکه طول پاره خط رسم

شده $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$ باشد، آنگاه مساحت دو ذوزنقه ایجاد شده برابر است و برعکس

پس طول پاره خط رسم شده برابر $\sqrt{\frac{5^2 + 9^2}{2}} = \sqrt{53}$ خواهد بود.

۱۲۶- در شکل زیر، $DG = 2DA$ و اندازه پاره‌خط‌های DE و DC ، به ترتیب، ۲ و ۵ واحد هستند. مساحت مثلث AFG چند درصد مساحت ذوزنقه $ABCD$ است؟

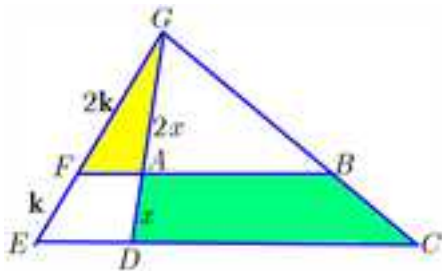


- ۴۰ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۳۲ (۳)
- ۲۴ (۴)

۱۲۶- گزینه ۳ طبق تالس نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت اضلاع است

$$\text{تالس در مثلث } GDC: \frac{2}{3} = \frac{AB}{5} \rightarrow AB = \frac{10}{3}$$

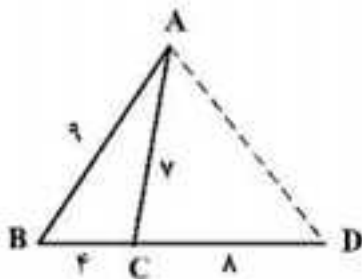
$$\text{تالس در مثلث } ADE: \frac{2}{3} = \frac{AF}{2} \rightarrow AF = \frac{4}{3}$$



$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 2h}{\frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} + 5 \right) \times h} = \frac{8}{25} = 32\%$$

۱۲۷- در شکل روبه‌رو، اندازه پاره خط AD ، کدام است؟

- ۹ (۱)
- $3\sqrt{10}$ (۲)
- ۱۰ (۳)
- $6\sqrt{2}$ (۴)



۱۲۷- گزینه ۱

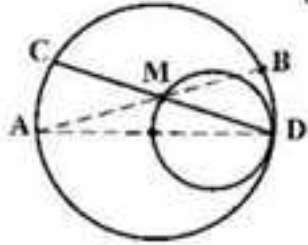
طبق قضیه استوارت داریم:

$$9^2 \times 8 + x^2 \times 4 = 7^2 \times 12 + 4 \times 8 \times 12$$

$$\div 4 \rightarrow 81 \times 2 + x^2 = 49 \times 3 + 8 \times 12$$

$$\rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = 9$$

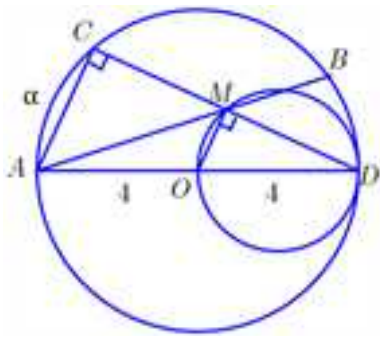
۱۲۸- در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟



- ۸ (۱)
- ۹ (۲)
- ۶ (۳)
- ۱۲ (۴)

۱۲۸- گزینه ۴

طبق فرمول طول کمان داریم: $\frac{L}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360}$ با جایگذاری داریم: $\frac{4\pi}{2\pi \times 4} = \frac{\alpha}{360} \rightarrow \alpha = 60$



لذا: $\hat{D} = 30^\circ$

ضلع روبرو به زاویه ۶۰ درجه $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{وتر}$

$$MD = 2\sqrt{3}$$

$$AC \parallel OM \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{CM} = \frac{4}{4} \rightarrow CM = 2\sqrt{3}$$

طبق روابط طولی در دایره داریم: $MA \times MB = MC \times MD = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$

۱۲۹- چهار نقطه $A(1, 10)$ ، $B(9, -9)$ ، $M(a, 4)$ و $N(a, 0)$ را در صفحه مختصات، در نظر بگیرید. کمترین اندازه خط شکسته AMNB، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۹ (۳)

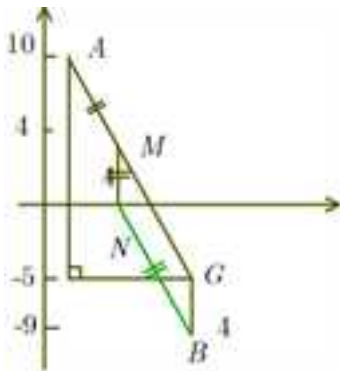
۲۰ (۲)

۲۱ (۱)

۱۲۹- گزینه ۱

به اندازه MN از نقطه B بالای می آییم در مثلث قائم الزاویه درست شده

داریم: $AG = 17$ پس کوتاه ترین مسیر نشان داده شده $17 + 4 = 21$



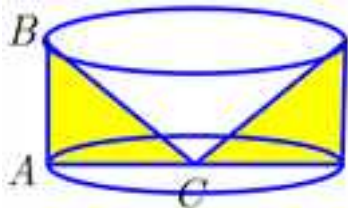
۱۳۰- حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $2\sqrt{6}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

80π (۴)

75π (۳)

70π (۲)

60π (۱)



۱۳۰- گزینه ۴

ارتفاع برابر ۵ و شعاع قاعده برابر $2\sqrt{6}$ است.

$$V = \pi R^2 h = \pi (2\sqrt{6})^2 \times 5 = 120\pi$$

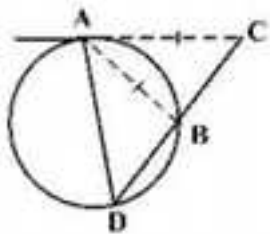
استوانه

$$V = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 \times 5 = 40\pi$$

مخروط

جواب $= 120\pi - 40\pi = 80\pi$

۱۳۱- در شکل زیر، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



$BC = BA$ (۱)

$BD = AC$ (۲)

$BC = BD$ (۳)

$DA = DC$ (۴)

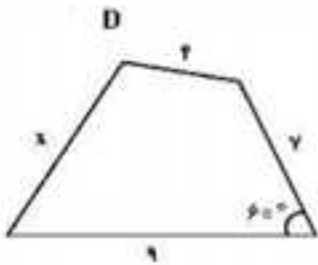
مشابهند ABC, ADC پس دو مثلث $A_1 = \frac{AB}{2}, \hat{D} = \frac{AB}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AC} \rightarrow \cancel{AB} \times AC = AD \times BC$$

میدانیم اگر از نقطه ای خارج دایره مماس بر دایره رسم کنیم طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است:

$$AC^2 = CB \times CD$$

از مقایسه ی روابط اخیر داریم: $AD \times BC = CB \times CD \Rightarrow AD = CD$



۱۳۲- چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است. $(x+2)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{51}$
- (۲) $\sqrt{55}$
- (۳) $\sqrt{57}$
- (۴) $\sqrt{59}$

۱۳۲- گزینه ۲

قابل محاط بودن یعنی مجموع زوایای روبرو ۱۸۰ درجه است.
طبق قضیه کسینوس ها داریم:

$$y^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 9 \times \frac{1}{2} = 67$$

دوباره در مثلث روبروی قضیه کسینوس ها را مینویسیم:

$$y^2 = x^2 + 4^2 - 2x \times 4 \times \frac{-1}{2} = 67 \rightarrow x = -2 + \sqrt{55}$$

$$x + 2 = \sqrt{55}$$

۱۳۳- کوچک ترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می کند؟

- (۱) $1, -3$
- (۲) $2, -2$
- (۳) $2, -1$
- (۴) $3, -2$

۱۳۳- گزینه ۱

کوچک ترین دایره خواسته شده دایره ای است که AB قطر آن باشد

$$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

معادله دایره خواسته شده با شعاع فوق و مرکز وسط AB :

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 = 13 - 9 = 4$$

$$\begin{cases} x+1 = 2 \rightarrow x = 1 \\ x+1 = -2 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

۱۳۴- از بین دایره‌های گذرا از نقطه $A(1, -4)$ و مماس بر خطهای $4x + 3y = 0$ و محور y ها، بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

$$\frac{22}{9} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$\frac{17}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

۱۳۴- گزینه ۲

مرکز دایره را $O(\alpha, \beta)$ میگیریم.

$$OC = |\alpha| \quad \text{و} \quad OB = \frac{|4\alpha + 3\beta|}{5}$$

$$OA = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta + 4)^2} \quad \text{و}$$

میدانیم این سه رابطه با هم برابر هستند

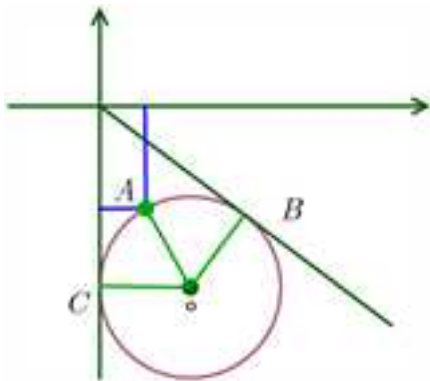
$$\begin{cases} \beta = -3\alpha \Rightarrow * \\ \alpha = 3\beta \otimes \end{cases} \quad \text{اگر } OB = OC \Rightarrow \frac{|4\alpha + 3\beta|}{5} = |\alpha| \quad \text{پس:}$$

$$\frac{|4\alpha + 3(-3\alpha)|}{5} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (-3\alpha + 4)^2} \quad \text{با جایگذاری * داریم:}$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 + 1 - 2\alpha + 9\alpha^2 + 16 - 24\alpha$$

که از بین دو جواب به دست آمده R_r جواب است.

$$9\alpha^2 - 26\alpha + 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \rightarrow R_r = 1 \\ \alpha = \frac{17}{9} \rightarrow R_r = \frac{17}{9} \end{cases}$$



۱۳۵- در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{2}$ واحد و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

۳ (۴)

$4 - \sqrt{2}$ (۳)

$2,5$ (۲)

$4 - 2\sqrt{2}$ (۱)

۱۳۵- گزینه ۳

با توجه به اندازه‌های قطر بیضی: $2a = 8, 2b = 2\sqrt{2}$
پس: $c = 3$

میدانیم در هر بیضی: $MF + MF' = 2a = 8$

$$MF + MF' = 8 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 64$$

$$\Rightarrow 36 + 2MF \times MF' = 64 \Rightarrow MF \times MF' = 14$$

$$\begin{cases} MF + MF' = 8 \\ MF \times MF' = 14 \end{cases} \Rightarrow MF = 4 - \sqrt{2}, MF' = 4 + \sqrt{2}$$

۱۳۶- اگر نقطه $F(-2, 25)$ کانون سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b ، کدام است؟

۲ (۴)

-2 (۳)

-3 (۲)

-4 (۱)

۱۳۶- گزینه ۲

$$y^2 + ay + bx + 1 = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -b\left(x - \frac{a^2 - 4}{4b}\right)$$

راس سهمی: $S\left(\frac{a^2 - 4}{4b}, \frac{-a}{2}\right)$ چون سهمی رو به چپ یا راست باز می‌شود پس: $\frac{-a}{2} = -2 \rightarrow a = 4$

با توجه به عدد پشت پرانتز: $4p = -b \rightarrow p = \frac{-b}{4}$

$$\frac{a^2 - 4}{4b} - \frac{b}{4} = \frac{-1}{4} \xrightarrow{a=4} \frac{3}{b} - \frac{b}{4} = \frac{-1}{4} \rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$
 طول کانون این سهمی:



۱۳۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد. درایه‌های سطر اول ماتریس A^T . کدام است؟

(۱) $[30 \ 6 \ 64]$ (۲) $[30 \ 6 \ 78]$
 (۳) $[24 \ 8 \ 86]$ (۴) $[30 \ 6 \ 86]$

گزینه ۴ - ۱۳۷

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ -2 & -2 & -36 \\ 14 & 4 & 42 \end{bmatrix} \text{ پس: } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۳۸ - از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریس X ، کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

گزینه ۳ - ۱۳۸

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

در رابطه داده شده برای یافتن ماتریس مورد نظر:

$$X = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} B^{-1} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

۱۳۹- جوابهای معادله $= 0$ کدام است؟

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$$

۲، ۵ (۴)

۱، ۵ (۳)

۱، ۴ (۲)

۱، -۴ (۱)

۱۳۹- گزینه ۳

$$-4 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

با بسط داریم:

$$(x-1)(x-5) = 0 \rightarrow x = 1, x = 5$$

۱۴۰- اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای، به صورت $2x+1$ ، $x+1$ و $2x+3$ است. مساحت مثلث، کدام است؟

۳۹ (۴)

۴۵ (۳)

۵۴ (۲)

۶۰ (۱)

۱۴۰- گزینه ۱

$$(2x+3)^2 = (2x+1)^2 + (x+1)^2$$

با فیثاغورث داریم: $4x^2 + 9 + 12x = 4x^2 + 1 + 4x + x^2 + 1 + 2x$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

پس مساحت مثلث: $S = \frac{15 \times 8}{2} = 60$

۱۴۱- تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

- ۹۴۸ (۱) ۹۵۲ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۲ (۴)

۱۴۱- گزینه ۲

$$\text{یکان صفر } 9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504 \quad \text{یکان ۵: } 8 \times 8 \times 7 \times 1 = 448$$

$$\text{پس تعداد کل برابر است با } 504 + 448 = 952$$

۱۴۲- تعداد جملات در بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$ ، کدام است؟

- ۷۲ (۱) ۷۸ (۲) ۸۴ (۳) ۹۱ (۴)

۱۴۲- گزینه ۴

تعداد جملات یعنی محاسبه کنیم چند جمله به صورت $a^x b^y c^z$ داریم که $x + y + z = 12$

$$\text{با حل معادله سیاله فوق داریم:} \quad \binom{12+3-1}{3-1} = \binom{14}{2} = 91 = \text{تعداد}$$

۱۴۳- در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا

مطمئن باشیم، حداقل ۴ کتاب، هم موضوع است؟

- ۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

۱۴۳- گزینه ۲

طبق اصل لانه کبوتر باید تعداد $(2+3+3)+1$ کتاب برداریم چون کتاب های هنر دو تاست هر دورا

برمیداریم و از هر کدام از بقیه موضوعات هم ۳ کتاب برمیداریم. این بدترین حالت ممکن است که هیچ ۴ کتابی هم موضوع نیستند. اکنون اگر یک کتاب دیگر برداریم حتما با یکی از قبلی ها تشکیل ۴ کتاب هم موضوع میدهد.

۱۴۴- به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

$$\frac{8}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

۱۴۴ - گزینه ۳ کل اعداد دورقمی $9 \times 10 = 90$ تا است

$$\left[\frac{99}{3} \right] - \left[\frac{9}{3} \right] = 33 - 3 = 30 = \text{تعداد مضرب ۳ ها}$$

$$\left[\frac{99}{5} \right] - \left[\frac{9}{5} \right] = 19 - 1 = 18 = \text{تعداد مضرب ۵ ها}$$

$$\left[\frac{99}{15} \right] - \left[\frac{9}{15} \right] = 6 - 0 = 6 = \text{تعداد هم مضرب ۳ و هم مضرب ۵}$$

$$n(A \cup B) = \frac{30}{90} + \frac{18}{90} - \frac{6}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

۱۴۵- تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لاقل یکی

از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۱)$$

۱۴۵ - گزینه ۳

مجموع اعداد رو شده فرد $A =$ پس: $n(A) = \frac{6 \times 6 \times 6}{2} = 108$ زیرا در نصف حالات مجموع زوج و در

نصف حالات مجموع فرد است.

لاقل یکی ۲ بیاید $B =$ (۲ و ۴ و ۶ و ۸) که ۳! جایابی دارد یا (۲ و ۶ و ۴ و ۲) که ۳!

حالت جایابی دارد $n(A \cap B) = 1 \times 1 \times 3 \times 3! + 1 \times 1 \times 3 \times 3! + 1 \times 1 \times 3 \times 3 = 45$

$$P(B|A) = \frac{45}{108} = \frac{5}{12} \quad \text{پس:}$$

۱۴۶- سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{11}{18} \quad (2) \quad \frac{25}{36} \quad (3) \quad \frac{13}{18} \quad (4)$$

۱۴۶- گزینه ۲

در ظرف اول که احتمال انتخاب آن $\frac{1}{3}$ است هیچ مهره سیاهی نیست پس $\frac{1}{3} \times 0$

در ظرف دوم که احتمال انتخاب آن $\frac{1}{3}$ است تمام مهره ها سیاه است پس: $\frac{1}{3} \times 1$

در ظرف سوم که احتمال انتخاب آن هم $\frac{1}{3}$ است لااقل یک سیاه یعنی یا یکی سیاه یا یکی سفید یا هر دو سیاه

$$\text{پس: } \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18} = \text{جواب}$$

۱۴۷- A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = 0.4$ ، $P(B|A) = 0.25$ و $P(B) = 0.3$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟

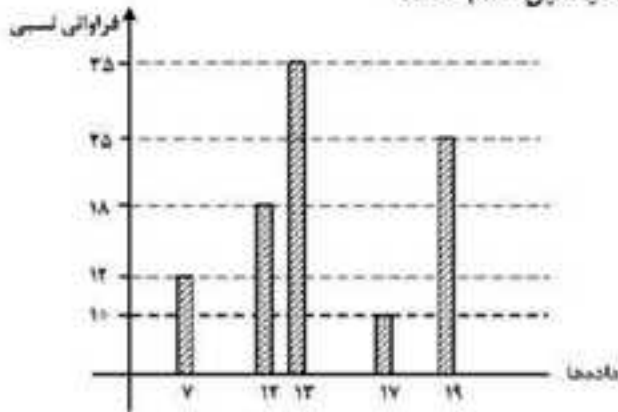
$$\frac{1}{5} \quad (4) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (1)$$

۱۴۷- گزینه ۲

$$P(B|A) = 0.25 \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.4} = 0.25 \rightarrow P(A \cap B) = 0.1$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{0.3 - 0.1}{1 - 0.4} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

۱۴۸- با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمی گسسته، میانگین کدام است؟



- ۱۳ (۱)
- ۱۳٫۸ (۲)
- ۱۴ (۳)
- ۱۴٫۲ (۴)

۱۴۸- گزینه ۳

کل داده‌ها $۱۰۰ = ۱۰ + ۱۲ + ۱۸ + ۲۵ + ۳۵$ تا است

$$\bar{x} = \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۷ + \frac{۱۸}{۱۰۰} \times ۱۲ + \frac{۳۵}{۱۰۰} \times ۱۳ + \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۱۷ + \frac{۱۹}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۱۴$$

پس: ۱۴

اشکال سوال: در سوال داده شده باید مجموع فراوانی نسبی‌ها ۱ شود. در صورتی که باید مینوشتند فراوانی نه فراوانی نسبی

۱۴۹- چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد، که باقی‌مانده تقسیم آن اعداد بر $۴۳ = ۰$ با مجذور خارج قسمت، برابر باشد؟

- ۷ (۴)
- ۶ (۳)
- ۵ (۲)
- ۴ (۱)

۱۴۹- گزینه ۲

$$a = ۴۳۰q + q^2 \quad q^2 < ۴۳۰^*$$

$$a \equiv ۰ \rightarrow ۴۳۰q + q^2 \equiv ۰ \rightarrow -۲q + q^2 \equiv ۰$$

$$q(q-۲) \equiv ۰ \rightarrow \begin{cases} q \equiv ۰ \xrightarrow{*} q = ۹, ۱۸ \\ q \equiv ۲ \xrightarrow{*} q = ۲, ۱۱, ۲۰ \end{cases}$$

از آنجاییکه a مضرب ۹ است داریم:

پس کلاً ۵ عدد پیدا کردیم.



۱۵۰- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟

- ۴) ۵۶ ۳) ۵۲ ۲) ۴۸ ۱) ۴۲

۱۵۰- گزینه ۴

$$[a, b] = 60(a, b), \quad a + b = 136 = 17 \times 8$$

ب.م.م دو عدد را d می گیریم. پس دو عدد به صورت $a = md, b = nd$ بوده است که $(m, n) = 1$

$$[a, b] = [md, nd] = mnd$$

داریم: $mnd = 60d \rightarrow mn = 60$
 به دنبال دو عدد نسبت به هم اول n, m هستیم:
 $a + b = 136 \rightarrow (m + n)d = 17 \times 8$

$$\left. \begin{array}{l} a = 12 \times 8 = 96 \\ b = 5 \times 8 = 40 \end{array} \right\} \rightarrow a - b = 56 \text{ یعنی: } d = 8 \text{ پس: } \begin{array}{l} m = 12 \\ n = 5 \end{array} \text{ داریم:}$$

۱۵۱- اگر عدد $1 - 2^B$ بر عدد ۲۱۷ بخش پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n ، کدام است؟

- ۴) ۴ ۳) ۶ ۲) ۵ ۱) ۷

گزینه ۳ از آنجاییکه $217 = 7 \times 31$

$$\text{میدانیم: } 2^3 \equiv 1 \rightarrow 2^{15} \equiv 1$$

$$\text{و همچنین میدانیم: } 2^5 \equiv 1 \rightarrow 2^{31} \equiv 1$$

از دو رابطه فوق نتیجه میگیریم: $2^{15k} \equiv 1 \rightarrow 2^{7 \times 31} \equiv 1$ با مقایسه این رابطه با سوال داده شده باید $n = 15k$ باشد

یعنی: $n = 15, 30, 45, 60, 75, 90$ یعنی ۶ عدد پیدا کردیم

۱۵۲- عدد چهار رقمی \overline{aabb} ، مجذور عدد دو رقمی \overline{cc} است. $a-b$ ، کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۵۲- گزینه ۲

$$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(\overline{a \cdot b})$$

$$\overline{cc}^2 = (10c + c)^2 = (11c)^2 = 121c^2$$

$$11(\overline{a \cdot b}) = 121c^2 \rightarrow (\overline{a \cdot b}) = 11c^2$$

چون سمت راست بر ۱۱ بخشپذیر است. پس عدد $(\overline{a \cdot b})$ هم باید بر ۱۱ بخشپذیر باشد. یعنی $a + b$ بر ۱۱ بخشپذیر است. $a + b = 11k$.

یعنی: $۲ + ۹$ یا $۴ + ۷$ بوده است. $۲ - ۹$ درگزینه ها نیست پس: $۴ - ۷$ جواب است.

۱۵۳- اگر درجه رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۲، ۲، ۲ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟

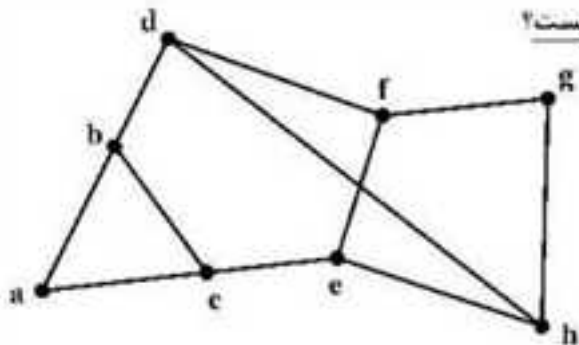
- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۵۳- گزینه ۴

همه دورهای این گراف، دور به طول ۴ هستند

کلا ۶ دور داریم.





۱۵۴- در گراف زیر، کدام مجموعه، یک مجموعه احاطه گر مینیمال، نیست؟

- (۱) {a, e, g}
- (۲) {a, f, g}
- (۳) {b, c, g}
- (۴) {c, f, h}

۱۵۴- گزینه ۱

زیرا این مجموعه اصلا احاطه گر نیست. هیچکدام به d وصل نیستند.

۱۵۵- در یک گراف ۷ رأسی غیر تهی و غیر کامل K- منتظم، K چند عدد می تواند اختیار کند؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۵۵- گزینه ۲

گراف های ۷-منتظمی که میتوان با ۷ راس کشید باید k زوج باشد زیرا $2k = 7$

پس: $k = 0$ که غیر قابل قبول است زیرا در سوال گفته شده غیر تهی

$$k = 2$$

$$k = 4$$

$k = 6$ که اینهم غیر قابل قبول است زیرا گراف کامل میشود که سوال گفته غیر کامل

پس دو مقدار ۲ و ۴ قابل قبول هستند.