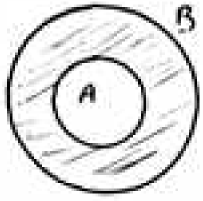
۱۰۱ - گزینهٔ «۴».



مطابق شکل، اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و $A \subset B$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $A \cap B'$ یا $A - B$ معادل ناحیهٔ هاشورخورده در شکل و درنتیجه غیرتهی است.

برای سایر گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ «۱»: $B - A' = B \cap (A')' = B \cap A \xrightarrow{A \subseteq B} A$

گزینهٔ «۲»: $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B \xrightarrow{A \subseteq B} A$

گزینهٔ «۳»: $A \cap B' = A - B \xrightarrow{A \subset B} \varnothing$

---

۱۰۲ - گزینهٔ «۴»

$$(A - B) \cup \left[(B \cap C)' \cap \left((B' \cup A) - B \right) \right]$$

$$= (A \cap B') \cup \left[\underbrace{(B \cap C)'}_{\text{قانون دمورگان}} \cap \underbrace{\left((B' \cup A) \cap B' \right)}_{\text{قانون جذب}} \right]$$

$$= (A \cap B') \cup \left[\underbrace{(B' \cup C') \cap B'}_{\text{قانون جذب}} \right] = \underbrace{(A \cap B') \cup B'}_{\text{قانون جذب}} = B'$$

---

۱۰۳ - گزینهٔ «۳»

با توجه به غیرتهی بودن مجموعه‌های A و B، از تساوی $A \times B = B \times A$ نتیجه می‌گیریم $A = B$ است و درنتیجه داریم:

$$\begin{cases} x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x + 2 = 7 \Rightarrow x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ t - 1 = 4 \Rightarrow t = 5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} z = 4 \\ t - 1 = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

بنابراین زوج مرتب (x,y) به یکی از دو صورت $(3,7)$ یا $(5,3)$ و زوج مرتب (z,t) به یکی از دو صورت $(1,5)$ یا $(4,2)$ است و درنتیجه تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ برابر $2 \times 2 = 4$ است.

۱۰۴- گزینه‌ی «۱»

روش اول: طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv [(q \vee \sim p) \wedge p] \vee [(q \vee \sim p) \wedge \sim q]$$

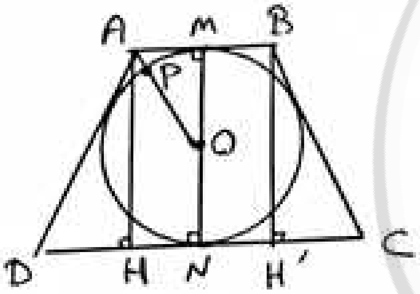
$$\equiv [(q \wedge p) \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F}] \vee [\underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F} \vee (\sim p \wedge \sim q)]$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$$

روش دوم: طبق جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	د	د	د

۱۲۲- گزینه‌ی «۱»



چهارضلعی ABCD محیطی است، بنابراین داریم:

$$AB + DC = AD + BC \xrightarrow{AD = BC} 9 + 16 = 2AD$$

$$\Longrightarrow AD = \frac{25}{2} = 12/5$$

$$DH = CH' = \frac{16 - 9}{2} = \frac{7}{2} = 3/5$$

$$\overset{\triangle}{AHD}: AH^2 = AD^2 - DH^2 = (12/5)^2 - (3/5)^2$$

$$= (12/5 - 3/5)(12/5 + 3/5) = 9 \times 16 \Rightarrow AH = 12$$

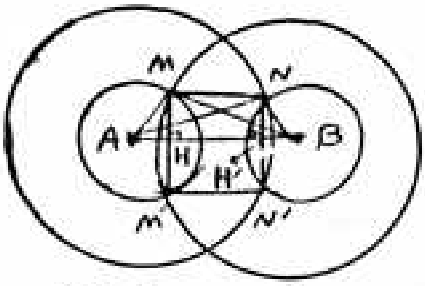
$$\Longrightarrow 2R = 12 \Longrightarrow R = 6$$

$$\overset{\triangle}{AOM}: OA^2 = OM^2 + AM^2 = 6^2 + (4/5)^2 = 56/25$$

$$\Longrightarrow OA = 7/5$$

$$AP = OA - OP = 7/5 - 6 = 1/5 = \frac{3}{2}$$

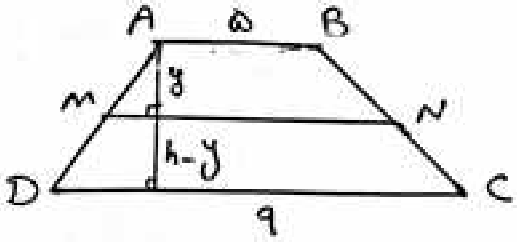
۱۲۴ - گزینهٔ ۳.



نقاط A و B هر کدام از دو نقطهٔ M و M′ به یک فاصله هستند،
پس AB عمود منصف پاره خط MM′ است.
به طور مشابه AB عمود منصف پاره خط NN′ است.
از طرفی مثلث‌های AMB و ANB هم‌نهشت هستند (به حالت تساوی سه ضلع)،
پس ارتفاع‌های MH و NH′ و در نتیجه پاره خط‌های MM′ و NN′ برابر یکدیگرند و
چهارضلعی MNN′M′ مستطیل است.

---

۱۲۵ - گزینهٔ ۲.



فرض کنید $MN = x$ باشد. داریم:

$$S_{ABNM} = S_{MNCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(5+x)y = \frac{1}{2}(x+9)(h-y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(5+9)h$$

$$\Rightarrow (5+x)y = (h-y)(x+9) \Rightarrow 2y(7+x) = h(x+9) \quad (*)$$

$$S_{ABNM} + S_{MNCD} = S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow (5+x)y + (h-y)(x+9) = 14h \Rightarrow 4y = h(x-5) \quad (**)$$

$$(*),(**) \Rightarrow \frac{h(x-5)}{2}(x+7) = h(x+9)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 2x + 18 \Rightarrow x^2 = 53 \Rightarrow x = \sqrt{53}$$

۱۲۴- گزینه ۱

$$\overset{\triangle}{BAD}: \quad OM \parallel AD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{DO}{BD} \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \quad ON \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BN}{AB} = \frac{CO}{AC} \quad (2)$$

$$\overset{\triangle}{DOC} \sim \overset{\triangle}{AOB} \Rightarrow \frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{DO}{BD} = \frac{CO}{AC} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow AM = BN \Rightarrow \frac{AM}{BN} = 1$$

۱۲۶- گزینه ۳

$$AF \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{AFG} \sim \overset{\triangle}{DGE} \Rightarrow \frac{S_{AGF}}{S_{DGE}} = \left(\frac{AG}{DG}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{AGB} \sim \overset{\triangle}{DGC} \Rightarrow \frac{S_{AGB}}{S_{DGC}} = \left(\frac{AG}{DG}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{S_{ABCD}}{S_{DGC}} = \frac{5}{9}$$

دو مثلث DGE و DGC در ارتفاع وارد از رأس G مشترک‌اند، پس نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده هاست، در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{DGE}}{S_{DGC}} = \frac{ED}{DC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{AGF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{9} S_{DGE}}{\frac{5}{9} S_{DGC}} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100}$$

۱۲۷- گزینه ۱

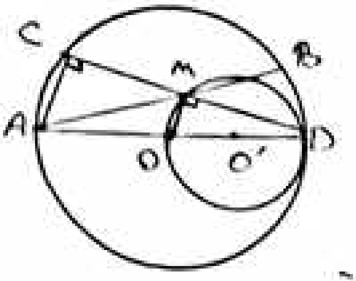
طبق قضیه استوارت در مثلث ABD داریم:

$$AB^2 \times CD + AD^2 \times BC = AC^2 \times BD + BC \times CD \times BD$$

$$\Rightarrow 81 \times 8 + AD^2 \times 4 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12$$

$$\Rightarrow 81 \times 8 + 4AD^2 = 12(49 + 32) = 12 \times 81$$

$$\Rightarrow 4AD^2 = 81(12 - 8) = 81 \times 4 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$$



۱۲۸- گزینه‌ی ۴. اگر $\widehat{AC}=\alpha$ باشد، آنگاه داریم:

$$\text{طول کمان } \widehat{AC} = \frac{\pi R \alpha}{180} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi \times 4 \times \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\longrightarrow \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

زاویه‌ی C زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر AD است، پس $\hat{C}=90^\circ$ و در نتیجه مثلث ACD قائم‌الزاویه است.

$$\hat{D}=30^\circ \Rightarrow AC = \frac{1}{2}AD = 4$$

$$\overset{\triangle}{ACD}: CD^2 = AD^2 - AC^2 = 64-16 = 48 \Rightarrow CD = 4\sqrt{3}$$

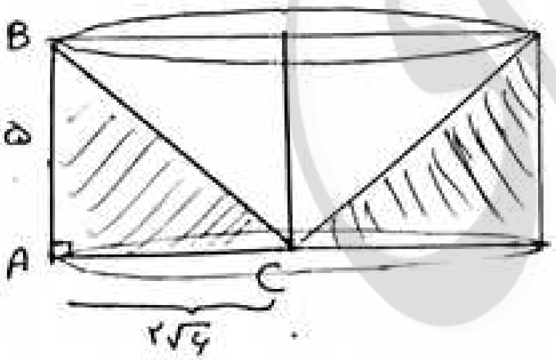
به طور مشابه زاویه‌ی OMD زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر OD در دایره‌ی کوچک‌تر است و در نتیجه $O\hat{M}D=90^\circ$ است، پس OM || AC و داریم:

$$OM \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{MD}{MC} = \frac{OD}{OA} = 1 \Rightarrow MC = MD = \frac{CD}{2} = 2\sqrt{3}$$

طبق روابط طولی در دایره‌ی بزرگ‌تر داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$$

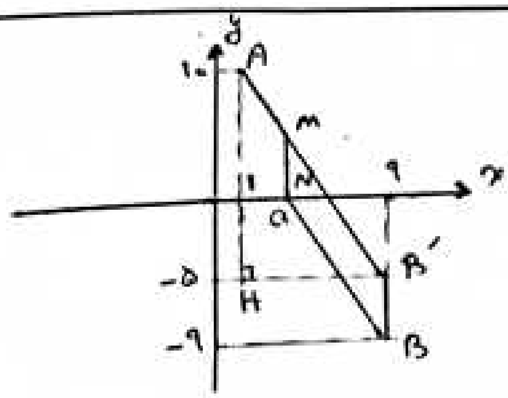
۱۳۰- گزینه‌ی ۴.



از دوران مثلث ABC حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، یک استوانه حاصل می‌شود که یک مخروط از میان آن برداشته شده است.

$$\text{حجم حاصل از دوران} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2 \times 5 - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2 \times 5 = 120\pi - 40\pi = 80\pi$$

۱۲- گزینه‌ی ۱.



برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر AMNB (طول خط شکسته‌ی AMNB) کافی است نقطه‌ی B را ۴ واحد به طرف بالا انتقال دهیم. مطابق شکل داریم:

$$\overset{\triangle}{AHB'}: AB'^2 = AH^2 + B'H^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow AB' = 17$$

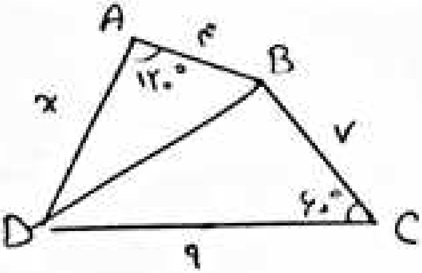
$$\text{طول خط شکسته‌ی } AMNB = AB' + BB' = 17 + 4 = 21$$

۱۳۱- گزینهٔ ۴.

$$\left.\begin{array}{l} (\text{زاویهٔ ظلی})\quad B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \\ (\text{زاویهٔ محاطی})\quad \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}C = \hat{D}$$

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} A\hat{C}B \sim D\hat{C}A \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DA} \xrightarrow{AB=AC} DA = DC$$

۱۳۲- گزینهٔ ۲.



چهارضلعی ABCD محاطی است، پس داریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BD \times DC \times \cos\hat{C}$$
$$= 49 + 81 - 2 \times 7 \times 9 \times \frac{1}{2} = 67$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos\hat{A}$$
$$\Rightarrow 67 = 16 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{220}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{55}}{2} = -2 \pm \sqrt{55}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{55} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{55} \\ x = -2 - \sqrt{55} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۱.

کوچکترین دایرهٔ گذرنده از نقاط A و B، دایره‌ای است که نقاط A و B دو سر قطری از آن هستند.
مرکز این دایره نقطهٔ M وسط پاره خط AB و شعاع آن برابر نصف طول پاره خط AB است.

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (-1, 3)$$
$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2+4)^2 + (5-1)^2}}{2} = \sqrt{13}$$

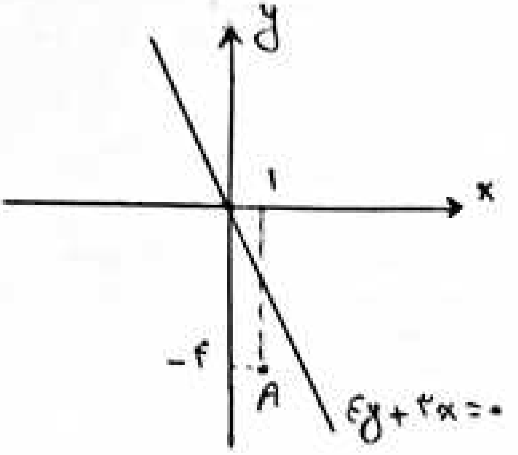
معادلهٔ دایره: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 + 9 = 13$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

۱۳۴- گزینهٔ «۲»

مرکز دایره از محور yها (خط $x=0$) و خط $4x+3y=0$ به یک فاصله است، بنابراین داریم:

$$\frac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|x| \Rightarrow |4x+3y|=5|x| \Rightarrow \begin{cases}4x+3y=5x \Rightarrow y=\frac{1}{3}x\\ 4x+3y=-5x \Rightarrow y=-3x\end{cases}$$



مطابق شکل برای اینکه دایره از نقطهٔ $A(1,-4)$ بگذرد و بر محور yها و خط $4x+3y=0$ مماس باشد لزوماً باید در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار بگیرد و در نتیجه مرکز آن روی خط $y=-3x$ واقع است.
مرکز دایره از نقطهٔ A و محور yها به یک فاصله است، بنابراین داریم:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}=|x| \xrightarrow{y=-3x}$$

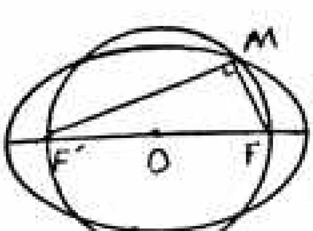
$$\sqrt{(x-1)^2+(-3x+4)^2}=|x| \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2-2x+1+9x^2-24x+16=x^2 \Rightarrow 9x^2-26x+17=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=\frac{17}{9}\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار شعاع، برابر $R=\frac{17}{9}$ است.

۱۳۵- گزینهٔ «۳»



$$2a=8 \Rightarrow a=4$$

$$2b=2\sqrt{7} \Rightarrow b=\sqrt{7}$$

$$c^2=a^2-b^2=16-7=9 \Rightarrow c=3 \Rightarrow FF'=2c=6$$

زاویهٔ M زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر FF' است، بنابراین $\hat{M}=90^\circ$ و در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است و داریم:

$$MF^2+MF'^2=FF'^2=36$$

روی بیضی است $M \Rightarrow MF+MF'=2a=8 \Rightarrow (MF+MF')^2=64 \Rightarrow \underbrace{MF^2+MF'^2}_{36}+2MF\times MF'=64$

$$\Rightarrow MF\times MF'=14$$

بنابراین MF و MF' ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+14=0$ هستند و داریم:

$$x=\frac{8\pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=4\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases}MF=4-\sqrt{2}\\ MF'=4+\sqrt{2}\end{cases}$$

۱۳۶- گزینهٔ «۲»

با تبدیل معادلهٔ سهمی به حالت متعارف داریم:

$$y^2+ay+bx+1=0 \Rightarrow y^2+ay+\frac{a^2}{4}=-bx-1+\frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(y+\frac{a}{2}\right)^2=-b\left(x+\frac{1-\frac{a^2}{4}}{b}\right)$$

بنابراین عرض رأس سهمی و در نتیجه کانون سهمی برابر $-\frac{a}{2}$ است، داریم:

$$-\frac{a}{2}=-2 \Rightarrow a=4$$

با فرض $b>0$، سهمی رو به راست باز می‌شود. همچنین طول رأس سهمی با جایگذاری مقدار $a=4$ برابر $\frac{3}{b}$ است. داریم:

$$\text{طول کانون}=\frac{3}{b}-\frac{b}{4}=-\frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4b} 12-b^2=-b \Rightarrow b^2-b-12=0$$

$$\Rightarrow (b-4)(b+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=4 & \text{ق ق} \\ b=-3 & \text{غ ق} \end{cases}$$

۱۳۷- گزینهٔ «۴»

کافی است سطر اول ماتریس A^2 را به دست آورده و در ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^2 \text{ سطر اول}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A^3 \text{ سطر اول}=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \end{bmatrix}$$

۱۳۸- گزینهٔ «۳»

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 20 & -24 \\ -16 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -36 & -28 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

۱۳۹- گزینهٔ «۳».

اگر دترمینان را بر حسب سطر اول ماتریس محاسبه کنیم، داریم:

$$-4\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(x^2-5x+6-2)-(3-x-3)+(2-6+3x)=0$$

$$\Rightarrow -4x^2+20x-16+x-4+3x=0 \Rightarrow 4x^2-24x+20=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

۱۴۰- گزینهٔ «۱».

طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(2x+3)^2=(2x+1)^2+(x+1)^2 \Rightarrow 4x^2+12x+9=4x^2+4x+1+x^2+2x+1$$

$$\rightarrow x^2-6x-7=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 & \text{غ ق ق} \\ x=7 \end{cases}$$

بنابراین طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه برابر ۸، ۱۵ و ۱۷ است و در نتیجه مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times 8\times 15=60$$

۱۴۱- گزینهٔ «۲».

رقم یکان عدد موردنظر صفر یا ۵ است.

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: $\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underline{1}=504$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد: $\underline{8}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underline{1}=448$

تعداد کل اعداد موردنظر $=504+448=952$

۱۴۲- گزینهٔ «۴».

تعداد جملات بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=12$ است که x_1، x_2 و x_3 به‌ترتیب توان‌های a، b و c هستند. داریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{12+3-1}{3-1}=\binom{14}{2}=91$$

تذکر: در هر جمله از بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$، مجموع توان‌های a، b و c، برابر ۱۲ است.

۱۴۳- گزینه‌ی ۲ :

در صورتی که ۳ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۳ کتاب ریاضی برداریم، هدف مسئله برآورده نشده است ولی با انتخاب نهمین کتاب، قطعاً ۴ کتاب از یکی از دو موضوع ادبی یا ریاضی وجود خواهد داشت.

۱۴۴- گزینه‌ی ۳ :

اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳ و ۵ را به‌ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|A| = \left[\frac{99}{3}\right] - \left[\frac{9}{3}\right] = 30$$

$$|B| = \left[\frac{99}{5}\right] - \left[\frac{9}{5}\right] = 18$$

$$|A\cap B| = \left[\frac{99}{15}\right] - \left[\frac{9}{15}\right] = 6$$

$$|A\cup B| = 30 + 18 - 6 = 42$$

$$P(A\cup B) = \frac{|A\cup B|}{|S|} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

۱۴۵- گزینه‌ی ۱ :

در پرتاب ۳ تاس، در مجموع $216 = 6^3$ حالت وجود دارد که در نیمی از حالت‌ها، مجموع ۳ تاس فرد است. حالت‌هایی که حداقل یکی از تاس‌ها ۲ بیاید و مجموع فرد باشد را به ۲ دسته تقسیم می‌کنیم:

دسته‌ی اول: دو تاس ۲ بیاید و تاس دیگر عددی فرد باشد:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underset{\{1,3,5\}}{3} \times \underset{\text{جایگشت عدد غیر ۲}}{3} = 9$$

دسته‌ی دوم: یک تاس ۲ و دو تاس دیگر یکی فرد و دیگری زوج غیر ۲ بیاید:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underset{\text{عدد فرد}}{\binom{3}{1}} \times \underset{\text{عدد زوج}}{\binom{3}{2}} \times \underset{\text{جایگشت ۳ عدد}}{3!} = 3\times 3\times 6 = 36$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{36+9}{108} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12}$$

۱۴۶- گزینهٔ «۲»

متمم پیشامد آنکه حداقل یکی از دو مهره سیاه باشد، آن است که هر دو مهره سفید باشند.

اگر پیشامد سفید بودن دو مهره را با A نمایش دهیم، طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\times\frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{7}{6} = \frac{7}{18} \Rightarrow P(A') = 1-\frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

۱۴۷- گزینهٔ «۲»

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0{,}25 = \frac{P(B\cap A)}{0{,}4} \Rightarrow P(B\cap A) = 0{,}1$$

$$P(B-A) = P(B) - P(B\cap A) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$$

$$P(B|A') = \frac{P(B\cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{1-P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$$

۱۴۸- گزینهٔ «۳»

$$\bar{x} = \frac{7\times 12 + 12\times 18 + 13\times 35 + 17\times 10 + 19\times 25}{12+18+35+10+25} = \frac{1400}{100} = 14$$

۱۴۹- گزینهٔ «۲»

$$a = 430q + q^2$$

$$r<b \Rightarrow q^2 < 430 \Rightarrow q \leqslant 20 \xrightarrow{q\ \text{عدد طبیعی}} 1 \leqslant q \leqslant 20$$

$$a = 430q + q^2 = q(430+q)$$

برای اینکه حاصل این عبارت مضرب ۹ باشد، داریم:

حالت اول: q مضرب ۹ باشد. در این صورت q یکی از دو عدد ۹ یا ۱۸ است.

حالت دوم: $q+430$ مضرب ۹ باشد. در این صورت q یکی از سه عدد ۲، ۱۱ یا ۲۰ است.

حالت سوم: q مضرب ۳ و $q+430$ مضرب ۳ باشد ولی چون ۴۳۰ مضرب ۳ نیست، این حالت امکان‌پذیر نمی‌باشد.

بنابراین در مجموع ۵ عدد با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

۱۵۰- گزینهٔ ۴

فرض کنید $(a,b)=d$ و $[a,b]=M$ باشد. اگر دو عدد a و b را به صورت $a'd$ و $b'd$ بنویسیم، آنگاه $(a',b')=1$ و داریم:

$$M=\frac{a\times b}{d}=a'b'd \Longrightarrow 60d=a'b'd \Longrightarrow a'b'=60$$

$$a+b=136 \Longrightarrow (a'+b')d=17\times 8 \Longrightarrow \begin{cases} a'+b'=17 \\ d=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'b'=60 \\ a'+b'=17 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a'=12 \\ b'=5 \end{cases}$$

$$a-b=(a'-b')d=(12-5)\times 8=56$$

۱۵۱- گزینهٔ «۳»

$$2^5 \overset{217}{\equiv} 32 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^{10} \overset{217}{\equiv} 1024 = 5\times 217-61 \overset{217}{\equiv} -61$$

$$\xrightarrow{\times 2^5} 2^{15} \overset{217}{\equiv} -61\times 32 = -1952 \overset{217}{\equiv} -1952+10\times 217 \overset{217}{\equiv} 218 \overset{217}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } n} 2^{15n} \overset{217}{\equiv} 1$$

بنابراین تمامی مضارب ۱۵ در رابطهٔ $2^n-1 \overset{217}{\equiv} 0$ صدق می‌کنند که شامل اعداد دو رقمی ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰ می‌گردد.

۱۵۲- گزینهٔ «۲»

$$\overline{aabb} = b+10b+100a+1000a = 11b+1100a = 11(b+100a)$$

$$\overline{cc} = c+10c = 11c$$

$$11(b+100a) = (11c)^2 \Longrightarrow b+100a = 11c^2$$

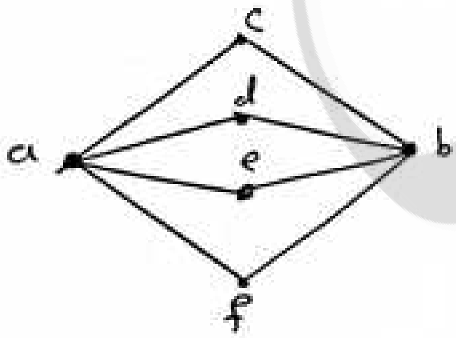
ارقامی که در رابطهٔ فوق صدق می‌کنند، عبارت‌اند از:

$$a=7,\ b=4,\ c=8 \longrightarrow 704 = 11\times 64$$

بنابراین $a-b=3$ است.

۱۵۳- گزینهٔ «۴»

مطابق شکل دورهای این گراف عبارت‌اند از:



acbda, acbea, acbfa, adbea, adbfa, aebfa

۱۵۴- گزینهٔ «۱» مجموعهٔ $\{a, e, g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف نیست چون هیچ‌کدام از رأس‌های این مجموعه قادر به احاطهٔ رأس h نیستند و درنتیجه این مجموعه نمی‌تواند احاطه‌گر مینیمال باشد.

۱۵۵- گزینهٔ «۲» گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد، پس k لزوماً زوج و کوچکتر از ۷ است.
از طرفی به ازای $k=0$، گراف تهی و به ازای $k=6$، گراف کامل حاصل می‌شود،
پس تنها مقادیر $k=2$ و $k=4$ قابل قبول است.