



هم کلاسی
Hamkelasi.ir

۱۲۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}$ کدام است؟

(۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $-1 + \sqrt{2}$ (۳) $1 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

حل اول

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt[2]{3} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{2}}{25 - 6} = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} \xrightarrow{\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}} (\sqrt{3} - 1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

پاسخ نهایی: $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$

حل دوم (شاگردای خودی)

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt{3} - 1)^{-1} = \frac{2/8 + 5/2}{5 - 2/4} - 2\left(\frac{7}{10} - 1\right)^{-1} = \frac{8}{2/6} - \frac{20}{7} = (3)^+ - (3)^- = 0/...$$

$\sqrt{27}$ با قاعده بنا محاسبه شده است. $(\sqrt{5^2 + 2} = 5 + \frac{2}{2 \times 5})$

گزینه 4 منفی

گزینه 3 منفی

گزینه 2 $0/4$ ✓

گزینه 1 $2/7$

۱۲۷- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\dots, \{2, 3, 4\}, \{1\}$. در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

(۱) ۷۱ (۲) ۷۲ (۳) ۷۳ (۴) ۷۴

عدد آخر هر دسته مربع کامل شماره همان دسته است، پس عدد آخر دسته هشتم $8^2 = 64$ است؛ عدد بعدی (۶۵) اولین عدد دسته نهم است.

عدد آخر دسته نهم $9^2 = 81$ است.

اگر x واسطه عددی بین ۶۵ و ۸۱ باشد داریم:

$$x = \frac{65+81}{2} = 73$$

۱۲۸- فرض کنید چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$ ، آنگاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

$p(x)$ بر عامل های $x^2 - 1$ یعنی $(x-1)$ و $(x+1)$ بخش پذیر است: $p(1) = 0$, $p(-1) = 0$

برای تعیین باقی مانده $Q(x)$ بر $x-2$ کافیست ریشه مقسوم علیه را در مقسوم (Q) جای گذاری کنیم:

$$Q(2) = p(1) + p(-1) = 0$$

۱۲۹- معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) $-\frac{5}{2}$

$$S = \frac{1}{P} \xrightarrow{S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}} \frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2m^2 - 5m - 7 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{بررسی} \\ \Delta < 0 \rightarrow m = -1 \\ m = \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

دو مقدار برای m بدست می‌آید، با بررسی شرط Δ برای $m = -1$ ، Δ منفی می‌شود که با شرط داشتن دو ریشه در تناقض است.

چون در گزینه‌ها (به ازای هیچ مقدار m) نداریم، نیاز به بررسی $\frac{7}{2}$ نیست و قابل قبول است.

۱۳۰- مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

(۱) $(\frac{1}{5}, \frac{5}{6})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, \frac{5}{8})$

جواب به صورت بازه ای از اعداد در گزینه ها آمده \longleftarrow حل عدد گذاری از محل اختلاف نظر گزینه ها

حذف گزینه های 1 و 2 به جرم نداشتن عدد خوب 1/5 \checkmark

$$x = 1/5 \implies 1 < \frac{1/5 + 1}{2 \cdot 1/5 - 1} < 3$$

حذف گزینه 3 به جرم نداشتن عدد خوب 1 \checkmark

$$x = 1 \implies 1 < \frac{2}{1} < 3$$

۱۳۱- فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

(۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

$$(0, 5) \implies c = 5$$

$$(1, 11) \implies a + b + 5 = 11 \implies a + b = 6$$

$$(-2, 5) \implies 4a - 2b + 5 = 5 \implies 2a - b = 0$$

$$\implies a = 2, b = 4$$

$y = 2x^2 + 4x + 5$
گزینه 1 در تابع صدق می کند

۱۳۲- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

تابع انتقال یافته: $\sqrt{x} \xrightarrow{12 \text{ واحد به راست}} \sqrt{x-12} \xrightarrow{2 \text{ واحد به بالا}} \sqrt{x-12} + 2$

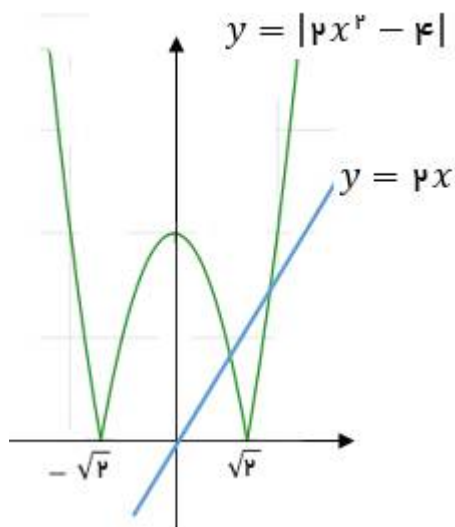
بررسی عدد خوشگل $\sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \implies x = 16$

با توجه به دامنه اولین عددی که زیر رادیکال ها رو مربع کامل می کنه 16 نه که تو معادله صدق می کنه و عرض تقاطع 4 همیشه

فاصله از $(0,0)$: $(16, 4) \implies \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16 \times 16 + 16} = \sqrt{17(16)} = 4\sqrt{17}$

۱۳۳- در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



با توجه به نمودار دو تابع واضح است که بین تقاطع دو تابع بازه ای است که $y = |2x^2 - 4|$ زیر خط $y = 2x$ قرار دارد برای بدست آوردن نقطه تقاطع داریم:

$$2x = |2x^2 - 4|$$

با توجه به شکل که نقاط تقاطع اطراف $\sqrt{2}$ هستند اعداد نزدیک 1 و 2 را بررسی می کنیم که در معادله صدق می کنند.

$$(a, b) = (1, 2) \rightarrow b - a = 1$$

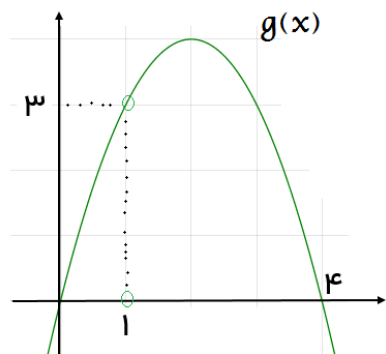
همان طور که گفته شد نیازی به حل معادله قدر مطلق نیست اما به صرف تمرین:

$$2x = |2x^2 - 4| \begin{cases} x > \sqrt{2} \rightarrow 2x = 2(x^2 - 2) \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2 \\ x \leq \sqrt{2} \rightarrow 2x = -2(x^2 - 2) \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -2 \end{cases}$$

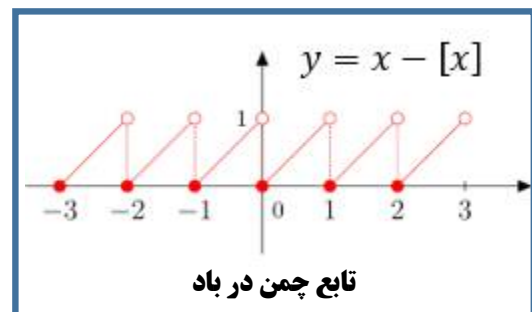
۱۳۴- اگر $f(x) = 2x - |2x|$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$

تابع $f(x)$ در واقع همان تابع معروف چمن در باد است که طول بازه های هر شاخه تغییر کرده (نصف شده)!!! داشتن ضریب برای x روی خروجی (برد) تابع تاثیری ندارد و در بازه $[0, 1)$ است.



$$g \circ f(x) \text{ with domain } [0, 1)$$



با توجه به نمودار $g(x)$ واضح است در صورتی که ورودی آن در بازه $[0, 1)$ خروجی آن در بازه $[0, 3)$ قرار دارد.

۱۳۵- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

سوال در واقع $f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$ را از ما می خواهد

$$f^{-1}(6) = ? \rightarrow f(?) = 6 \implies f(?) = ? + \sqrt{?} = 6 \xrightarrow{\text{عدد خوشگل}} ? = 4$$

$$\implies 4 + 9 = 13$$

$$f^{-1}(12) = ? \rightarrow f(?) = 12 \implies f(?) = ? + \sqrt{?} = 12 \xrightarrow{\text{عدد خوشگل}} ? = 9$$

۱۳۶- تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می کند؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

بجای حل سوال از گزینه ساده تر شروع به بررسی می کنیم

گزینه ۲ (نقطه تلاقی: $(-1, 1)$) (عرض نقطه با توجه به اینکه روی نیمساز ربع چهارم قرار دارد تعیین شد.)

$$f^{-1}(1) = -1 \rightarrow f(-1) = 1 \xrightarrow{\text{بررسی}} \checkmark$$

۱۳۷- اگر $\log_4 3 = 0.8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

$\frac{7}{9}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{8}{11}$ (۲)

$\frac{13}{18}$ (۱)

$$\log_4 3 = \log_{2^2} 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 = 0.8 \rightarrow \log_2 3 = 1.6$$

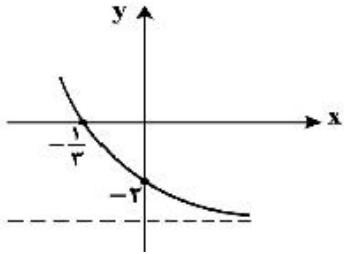
$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 4} = \frac{1.6 + 1}{1.6 + 2} = \frac{2.6}{3.6} = \frac{13}{18}$$

حل دوم (شاکردای خودی) (مثل تیپ تبدیلی مثلثات که فرض غیر منطقی می کنیم، ولی چون نسبت می خواهیم اوکیه)

$$\frac{\log 3}{\log 4} = \frac{8}{10} \implies \log 3 = 8, \quad \log 4 = 10 \xrightarrow{\log 2^2 = 2 \log 2} \log 2 = 5$$

$$\frac{\log 6}{\log 12} = \frac{\log 3 + \log 2}{\log 3 + \log 4} = \frac{8 + 5}{8 + 10} = \frac{13}{18}$$

۱۳۸- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟



(۱) ۵۴
(۲) ۶۰
(۳) ۴۸
(۴) ۲۸

با توجه به تقاطع تابع با محور طول ها و عرض ها داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(0) = -2 &\rightarrow -4 + 2^b = -2 \implies 2^b = 2 \rightarrow b = 1 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 &\rightarrow -4 + 2^{-\frac{a}{3}+1} = 0 \implies 2^{-\frac{a}{3}+1} = 2^2 \rightarrow a = -3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(x) &= -4 + 2^{-3x+1} \\ f\left(-\frac{5}{3}\right) &= -4 + 2^6 = 60 \end{aligned}$$

۱۳۹- فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

(۱) $\log_2(2 - \sqrt{3})$ (۲) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۳) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۴) $\log_2(2 + \sqrt{3})$

$$f^{-1}(2) = ? \rightarrow f(?) = 2$$

پس باید ببینیم به ازای کدام ورودی حاصل $f(x)$ برابر ۲ می شود:

$$f(x) = 2 \rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \xrightarrow{2^x=t} t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 12, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \implies t = 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{3}) \quad \checkmark$$

$$t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \implies t = 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \text{منفی} \rightarrow \text{غ ق}$$

۱۴۰- حاصل عبارت $\tan(300)\cos(210) + \tan(480)\sin(840)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

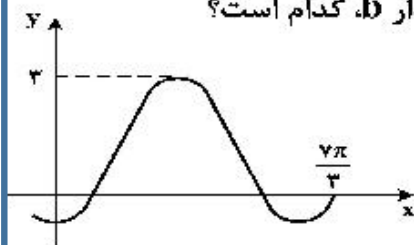
$-\frac{1}{3}$ (۱)

از زوایای داده شده 360 تا 360 تا بیرون می ریزیم:

$$\tan(-60)\cos(-150) + \tan(120)\sin(120) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

- کسینوس منفی خوار، بقیه سوراخ دار
- سینوس زوایای مکمل باهم برابر و سایر نسبت های مثلثاتی برای زوایای مکمل قرینه یک دیگرند.

۱۴۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ است. مقدار b ، کدام است؟



۲ (۱)

۱ (۲)

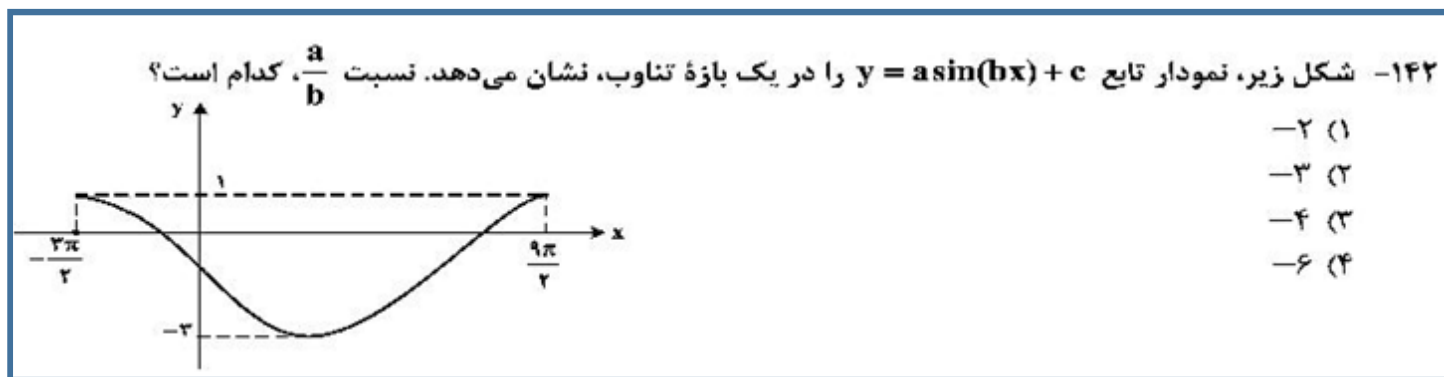
-۱ (۳)

-۲ (۴)

تابع پس از ساده سازی به صورت $y = a + b \cos(x)$ است. با توجه به نمودار مشخص است که ضریب $\cos(x)$ منفی است. (حذف گزینه های 1 و 2)

$$y_{max} = 3 \xrightarrow{\cos(x)=-1} a - b = 3$$

$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \rightarrow a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = a + \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری } a = -\frac{b}{2} \text{ در رابطه بالا}} -\frac{b}{2} - b = 3 \rightarrow b = -2$$



با توجه به نمودار واضح است که a یا b یک کدام منفی هستند. ($ab < 0$) ، با فرض b مثبت:

$$T = \frac{9\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 6\pi \quad , \quad 2\pi \xrightarrow{\times 3} 6\pi \xrightarrow{\text{طبق انتقال: تغییرات روی محور } x \text{ ها برعکس}} b = \frac{1}{3}$$

$$y_{\max} = 1 \xrightarrow{\sin(bx)=-1} -a + c = 1$$

$$y_{\min} = -3 \xrightarrow{\sin(bx)=1} a + c = -3$$

$$\Rightarrow a = -2 \quad \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

۱۴۳- جواب های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام

است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

با توجه به گزینه ها از محل اختلاف نظر گزینه ها ، زاویه چک می کنیم:

$x = 0 \rightarrow \sin(-45) = \cos(45)$ **X** حذف گزینه های 1 و 2 به جرم داشتن زاویه بد صفر

$x = -30 \rightarrow \sin(-105) = \cos(15)$ **X** حذف گزینه 3 به جرم داشتن زاویه بد -30 درجه

۱۴۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

$$x \rightarrow -2^- : \frac{[-2^-] + 3}{x + 2} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر}$$

۱۴۵- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{36}$

با توجه به اینکه حاصل حد در بی نهایت عدد شده پس پرتوان بالا با پرتوان پایین برابر است: $n = 1$

$$x \rightarrow \infty : \frac{ax}{4x} = \frac{1}{6} \rightarrow a = \frac{2}{3} \implies f(x) = \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x - 12}$$

$$x \rightarrow 3 : \frac{0}{0}$$

حل اول) استفاده هوییتال

$$HOP \xrightarrow{x=3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt{(x^2 - 1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{3\sqrt{64}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{12}}{4} = \frac{\frac{8 - 6}{12}}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24}$$

حل دوم) شاکردای خودی

$$\frac{\frac{2}{3} \times \frac{31}{10} - 2 - \frac{6}{120}}{\frac{4}{10}} = \frac{\frac{62 - 60 - 1/5}{30}}{\frac{4}{10}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{24}$$

۱۴۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

بررسی پیوستگی در نقطه $x = -2$

$$\begin{cases} \text{چ} \rightarrow 3 \\ \text{ر} \rightarrow -2 - 2b + c \end{cases} \Rightarrow -2b + c = 5$$

بررسی مشتق چپ و راست در نقطه $x = -2$

$$\begin{cases} \text{چ} \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = -\frac{1}{3} \\ \text{ر} \rightarrow -x + b = 2 + b \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

با جایگذاری $b = -\frac{7}{3}$ در رابطه $-2b + c = 5$ مقدار $c = \frac{1}{3}$ محاسبه می شود.

۱۴۷- مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2-x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{15}{4}$

نخست تابع را برای بهتر مشتق گرفتن ساده می کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\overbrace{(2x+2)}^{\text{مشتق صورت}} \cdot \overbrace{(x^2-x)^3}^{\text{مخرج}} - \overbrace{3(x^2-x)^2(2x-1)}^{\text{مشتق مخرج}} \cdot \overbrace{(x^2+2x)}^{\text{صورت}}}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{6 \times 8 - 3 \times 4 \times 3 \times 8}{64} = \frac{8(6-36)}{64} = -\frac{30}{8} = -\frac{15}{4}$$

۱۴۸- فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ از نیمساز ناحیه اول کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین می کنیم. $(f'(x) = 0)$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2(x-2)}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \longrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} = 1 \rightarrow x-2 = \sqrt{4x-x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} x^2 - 4x + 4 = 4x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 8 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \implies f(x_1) = f(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

max نسبی

$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \implies f(x_2) = f(2 - \sqrt{2}) = 2$$

min نسبی

باید فاصله نقطه $(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ از خط $y = x$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

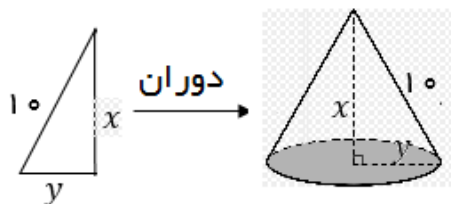
۱۴۹- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$



$$100 = x^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(100 - x^2)x$$

باید max تابع $V = \frac{1}{3}\pi(100x - x^3)$ را محاسبه کنیم. نقطه ای که در آن تابع بیشترین مقدار را دارد، متشقق تابع در آن نقطه صفر می‌شود. (نقطه بحرانی)

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3x^2) = 0 \implies x^2 = \frac{100}{3} \xrightarrow{\text{رابطه بین } x \text{ و } y} y^2 = \frac{200}{3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

۱۵۰- به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

$$۹۵ \quad (۴)$$

$$۹۱ \quad (۳)$$

$$۸۷ \quad (۲)$$

$$۸۴ \quad (۱)$$

از تمام حالات، حالتی که دو دوست با هم آمده اند را بر می‌داریم:

$$\binom{9}{5} - \binom{9-2}{5-2} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 9 \times 7 \times 2 - 7 \times 5 = 7(18 - 5) = 91$$

• بجای محاسبه $\binom{9}{5}$ ، حاصل $\binom{9}{4}$ را بدست می‌آوریم.

• وقتی می‌خواهیم دو دوست با هم به مهمانی بیایند آن دو نفر را انتخاب کرده، از ۷ نفر باقی مانده ۳ نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم.

۱۵۱- پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{56} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{28} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{۱۴} \quad (۱)$$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}$$

کتاب های فارسی را در یک بسته کنار هم و کتاب های انگلیسی را در یک بسته کنار هم در نظر می‌گیریم

$$\text{احتمال} = \frac{\text{جابجایی کتب انگلیسی} \times \text{جابجایی کتب فارسی} \times \text{جابجایی بسته ها}}{8!} = \frac{1}{28}$$



فارسی



انگلیسی

۱۵۲- ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴
	۰/۱۸ (۴) ۰/۱۷ (۳) ۰/۱۵ (۲) ۰/۱۲ (۱)

از همه داده ها 10 واحد کم می‌کنیم سپس میانگین می‌گیریم:

$$\bar{x} - 10 = \frac{5(0) + 4(1) + 7(4)}{16} = 2 \implies \bar{x} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} = 3/25 \implies \sigma = \sqrt{3/25} = 1/8$$

• از آنجا که می‌دانیم $18^2 = 324$ است، $\sqrt{3/25}$ را به طور تقریبی $1/8$ در نظر گرفتیم.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/8}{12} = 0/15$$

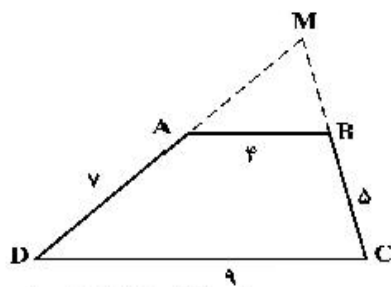
۱۵۳- مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC کدام است؟
 ۴ (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) 5 (۳) $4\sqrt{2}$ (۴)

برای محاسبه ارتفاع AH کافیهست فاصله نقطه A را از پاره خط BC بدست آوریم.

با توجه به اینکه عرض نقاط B و C چهار واحد از طول خودشان کمتر است معادله خط بدون نوشتن روابط قابل حدس زدن است: $x - y - 4 = 0 \leftarrow y = x - 4$

$$AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

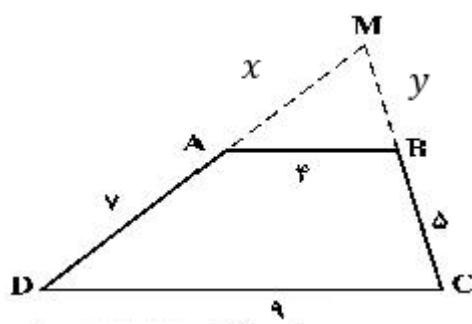
۱۵۴- اندازه اضلاع متوازی الاضلاع $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB کدام است؟



- ۱۳/۲ (۱)
- ۱۳/۶ (۲)
- ۱۴/۴ (۳)
- ۱۴/۸ (۴)

با استفاده از قضیه تالس $MA = x$ و $MB = y$ را محاسبه می‌کنیم:

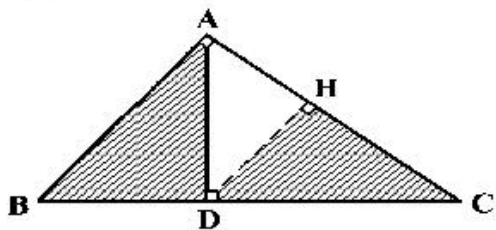
$$\frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \rightarrow 9x = 4x + 28 \rightarrow 5x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$$



$$\frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \rightarrow 4y + 20 = 9y \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4$$

$$\text{محیط مثلث } MAB = x + y + 4 = 5\frac{3}{5} + 4 + 4 = 13\frac{3}{5}$$

۱۵۵- در مثلث قائم الزاویه ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم الزاویه



HCD و ABD ، کدام است؟

- | | |
|-------------------|---------------------|
| $\frac{4}{7}$ (۲) | $\frac{3}{7}$ (۱) |
| $\frac{8}{9}$ (۴) | $\frac{16}{21}$ (۳) |

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 3 + 4 \rightarrow BC = \sqrt{7}$$

به طور واضح دو مثلث HCD و ABD متشابه اند.

می دانیم در دو مثلث متشابه اگر نسبت تشابه بین اضلاع k باشد، نسبت مساحت آن دو مثلث k^2 است:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{HCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

• از اضلاع نسبت دو وتر را نوشتیم.

برای محاسبه CD می دانیم در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع واسه هندسی بین تصویر خودش روی وتر و وتر است:

$$(AC)^2 = CD \times BC \rightarrow CD = \frac{(AC)^2}{BC} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{HCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{\sqrt{7}}}\right)^2 = \frac{3}{\frac{16}{7}} = \frac{21}{16} \rightarrow \text{گزینه 3}$$

- در سوال 128، طراح باقی مانده تقسیم را می خواست نه حاصل تقسیم!!!
- در سوال 154، چهار ضلعی $ABCD$ دوزنقه است، نه متوازی الاضلاع!!!