۲

فصل دوم

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

■ قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد.

محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

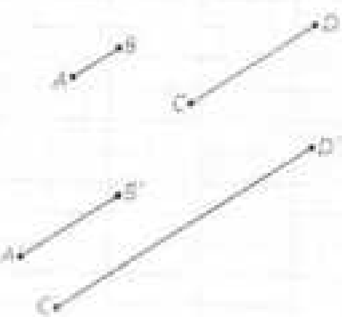
نسبت و تناسب در هندسه

تعریف نسبت و تناسب لازم است.

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل‌ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq 0)$ آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t,y\neq 0$ تناسب $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشند، $\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۵}$. حال فرض کنید $A'B'=۴cm$ و $C'D'=۱۰cm$ ، در این صورت

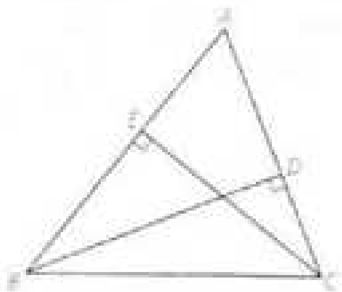
$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

و بنابراین یک تناسب به‌صورت $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{۲}{۵}$ باشد، نسبت CD به AB، $\frac{۵}{۲}$ است.



فعالیت ۱

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظرگرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.



مساحت ABC $=\frac{۱}{۲}AC\times BD$

مساحت ABC $=\frac{۱}{۲}AB\times CE$

ــ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین $AC\times BD=AB\times CE$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

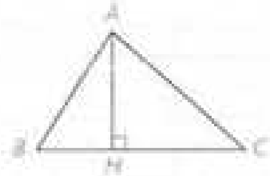
$\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ و $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ خیر

تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟ حالت‌های مختلف تناسب

با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع... وارد بر آنها برابر است.



فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A'H' در دو مثلث ABC و A'B'C' هم‌اندازه‌اند (AH = A'H')

با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

S_{ABC} = ABC مساحت $= \frac{۱}{۲} AH \times BC$

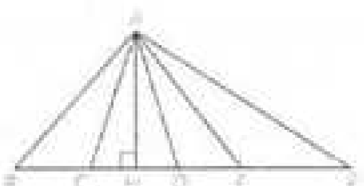
$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲} A'H' \times B'C'$

$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} AH \times BC}{\frac{۱}{۲} A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده‌است.

کار در کلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟

با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{...}{...}$ $\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{...}{...}$ $\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{...}{...}$

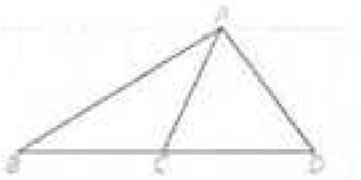
$\frac{\cancel{\frac{1}{2}} AH \times BC}{\cancel{\frac{1}{2}} AH \times CD}$ $\frac{\cancel{\frac{1}{2}} AH \times CD}{\cancel{\frac{1}{2}} AH \times EF}$ $\frac{\cancel{\frac{1}{2}} AH \times CE}{\cancel{\frac{1}{2}} AH \times BF}$

$\frac{BC}{CD}$, $\frac{CD}{EF}$, $\frac{CE}{BF}$

نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک راس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این راس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$



کار در کلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

$\frac{1}{2}h\times a$

نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و راس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

۱	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	b و d $\neq ۰$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	a و b و c و d $\neq ۰$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	a و b و c و d $\neq ۰$	(عوض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	b و d $\neq ۰$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}\Rightarrow\frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	b و d $\neq ۰$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	b و d $\neq ۰$	

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$ ۷	b_1 و b_2 و ... و $b_n \neq 0$	(خاصیت ویژگی ۶)

تعریف واسطهٔ (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ با طرفین وسطین‌کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2=ac$. در این صورت b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطهٔ هندسی بین آنهاست (چرا؟)

تمرین

۱ـ اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

$\frac{x+y+z}{2+3+6}=\frac{3}{5} \to x+y+z=\frac{33}{5}$

۲ـ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

$x^2=10\times 8 \to x^2=80$

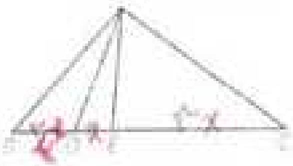
$\boxed{x=4\sqrt{5}}$

۳ـ طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌متر و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

$\frac{\frac{3\sqrt{15}}{2}\times 4}{2}=3\sqrt{15}=S$

$4\times h=6\sqrt{15} \to h=\frac{3}{2}\sqrt{15}$

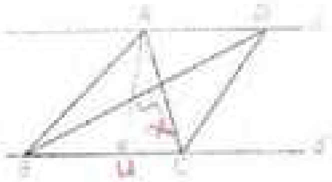
$8\times h'=6\sqrt{15} \to h'=\frac{3\sqrt{15}}{4}$



۴ـ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.

$S_{ACE}=3S_{ADE} \to \frac{1}{2}AH\times CE=3\times\frac{1}{2}AH\times DE \to CE=3DE$

$S_{ACE}=2S_{ABD} \to \frac{1}{2}AH\times CE=2\times\frac{1}{2}AH\times BD \to CE=2BD$



۵ـ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $8cm^2$ است. اگر $BD=6cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.

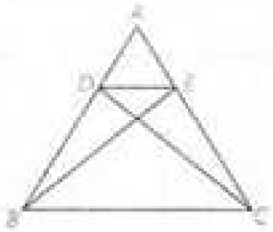
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC=8$

$S_{BDC}=\frac{1}{2}CK\times BD=8 \to x=\frac{8}{3}$

$\frac{BC}{DE}=\frac{\frac{11}{2}x}{x}=\frac{11}{2}$

$\frac{DE}{BD}=\frac{x}{\frac{3}{2}x}=\frac{2}{3}$

قضیهٔ تالس



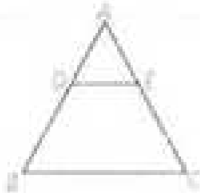
در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجهٔ ۱ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید :

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{AE}{EC}\ ,\ \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{AD}{DB}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید :

$$\boxed{\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}}$$

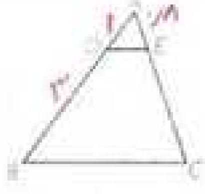
بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم :



قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم DE||BC، آنگاه:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

کار در کلاس



۱ــ در شکل مقابل DE||BC و AD=۱ و DB=۳ و AE=۰/۸. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.

$\frac{۱}{۳}=\frac{۰/۸}{EC}\rightarrow EC=۲/۴$

$AC=۳/۲$

۲ــ در شکل مقابل MN||BC؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.

$\frac{x}{۳}=\frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}\rightarrow ۴/۵x=۶x-۱/۵$

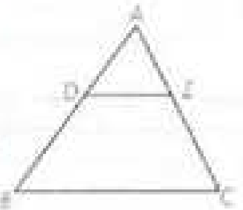
$۱/۵=۱/۵x$

$\boxed{۱=x}$

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

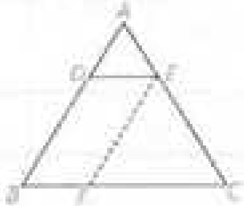
$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}$

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$



۳ـ در شکل مقابل DE||BC؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

فعالیت ۱



در شکل مقابل DE||BC، از نقطهٔ E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

با توجه به این موضوع داریم:

DE=BF ، DB=EF

در مثلث ABC و با درنظرگرفتن DE||BC، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (۱)

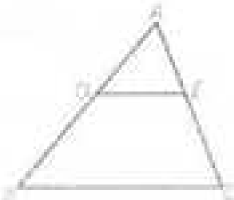
در مثلث CAB با توجه به EF||AB، قضیهٔ تالس را بنویسید.

DE

$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (۲)

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

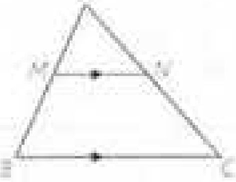
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$



تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

کار در کلاس

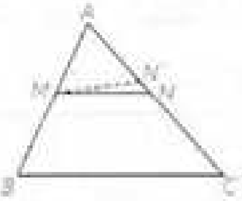


در شکل مقابل، با فرض MN||BC، طبق قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow$ ...MN||BC

عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

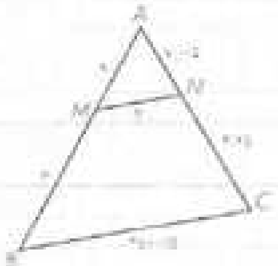
اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم :



$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \nparallel BC$ ، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{AM}{AB}$

از مقایسهٔ این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{AN'}{AC}=\frac{AN}{AC}$ و درنتیجه : $AN'=AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.



مثال : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

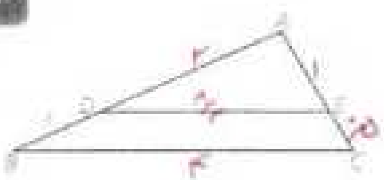
حل : با توجه به قضیهٔ تالس و تعمیم آن داریم :

$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵} \Rightarrow$

$۲/۲۵x=۳x-۱/۵ \Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵ \Rightarrow x=۲$

$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۴/۵} \Rightarrow y=۱/۸$

تمرین



۱ــ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.

$\frac{۲}{DB}=\frac{۱}{۰/۵} \rightarrow DB=۱$

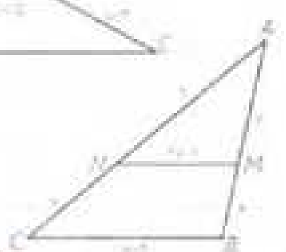
$\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{DB}{۴} \rightarrow DB=\frac{۵}{۴}$

$AB=۲+۱=۳$

۲ــ در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$؛ مقدار x را به‌دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

$\frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \rightarrow x+۲=۲x \rightarrow \boxed{x=۲}$

$\frac{۱}{۳}=\frac{۲/۵}{BC} \rightarrow \boxed{BC=۷/۵}$



۳ــ در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

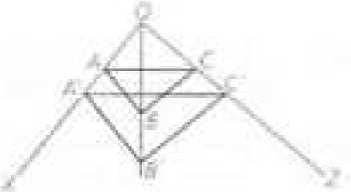
$\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \rightarrow \boxed{x=۶}$

$\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$

$۷۲=۳۰y-۱۵$

$۸۷=۳۰y$

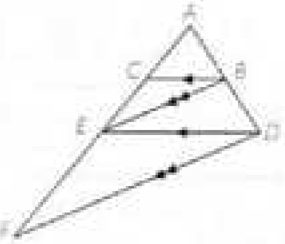
$=\frac{۸۷}{۳۰}=y$



۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم AB ∥ A'B' و BC ∥ B'C' با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : AC ∥ A'C'

$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$ → $\frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'}$ → عکس تالس AC ∥ A'C'

$\frac{OC}{OC'}=\frac{OB}{OB'}$



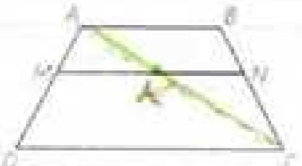
۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم BC ∥ DE و BE ∥ DF، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید : $AE^2=AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطهٔ هندسی بین AC و AF است)

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ → $AE^2=AC \cdot AF$

$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AF}$

$\frac{۳}{۶۰}=\frac{۱}{x}$ → $\boxed{x=۲۰}$

۶ــ یکی از کاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشند، بلندی درخت چند متر است؟



۷ــ در ذوزنقه مقابل MN ∥ AB ∥ CD ، ثابت کنید :

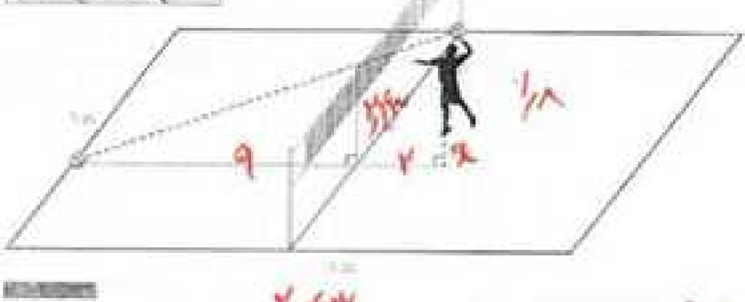
$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)

$\frac{AM}{MD}=\frac{AK}{KC}$ → $\boxed{\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}}$

$\frac{BN}{NC}=\frac{AK}{KC}$

۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به‌هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



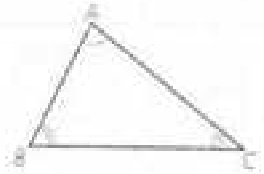
$\frac{۹}{۱۱}=\frac{۲٫۴۳}{۱٫۸+x}$ → ۱۶٫۲ + ۹x = ۲۶٫۷۳

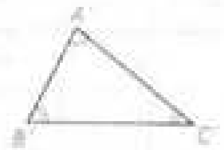
۹x = ۱۰٫۵۳ → x = ۱٫۱۷

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم دربارهٔ تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:



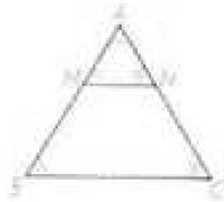


$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C',\qquad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB}=\frac{۱}{۲}$ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث A'B'C' نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث A'B'C' با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$، متشابه است.

سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث A'B'C' متشابه است؟ $\frac{۲}{۱}$

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها



اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$MN \| BC \Longrightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

۱ــ زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟ قضیه خطوط موازی

۲ــ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس تناسب زیر را کامل کنید:

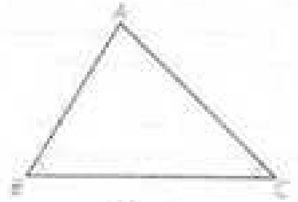
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

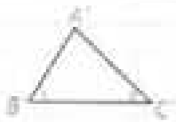
۳ــ از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

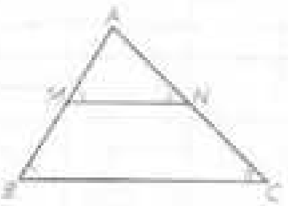
حال با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیهٔ اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها) اثبات کنیم.

راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر A'B' و A'C' جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.





قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.
$(\hat{B}=\hat{B'}, \hat{C}=\hat{C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$



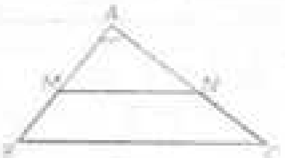
اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

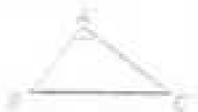
۱ـ $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180°$ و $\angle B = \angle B'$
و $\angle C = \angle C'$ بنابراین $\angle A = \angle A'$

۲ـ $AM = A'B'$ و $AN = A'C'$ و $\angle A = \angle A' \overset{\text{ض ز ض}}{\Longrightarrow} \Delta AMN \cong \Delta A'B'C'$
$\Rightarrow MN = B'C'$ و $\angle M = \angle B'$ و $\angle N = \angle C'$

۳ـ $\angle M = \angle B'$ و $\angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$

۴ـ طبق قضیهٔ اساسی تشابه، $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ و در نتیجه: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$





قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازهٔ A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

$\begin{cases} AM = A'B' \\ AN = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A'} \end{cases}$ فرض

۱ـ مثلث‌های AMN و A'B'C' به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$

۲ـ در فرض مسئله به‌جای A'B' و A'C'، پاره‌خط‌های هم اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا MN∥BC؟

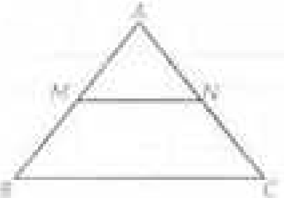
۳ـ با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجهٔ قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

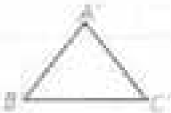
چون $BC \parallel MN$ پس $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ و چون $\overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$
پس $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.





اثبات: روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازهٔ A'B' و A'C' جدا کنید.

۱ـ در فرض به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا MN∥BC!

$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$

۲ـ از قضیهٔ اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

۳ـ تعمیم قضیهٔ تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسهٔ این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:

$A'B' = AM \quad \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

MN = B'C'

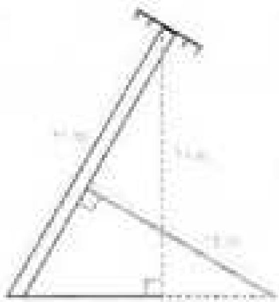
$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{MN}{BC} \rightarrow \boxed{MN=B'C'}$

از فرض $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

۴ـ مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

$\triangle AMN \cong \triangle A'B'C'$ (ضضض) $\longrightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟



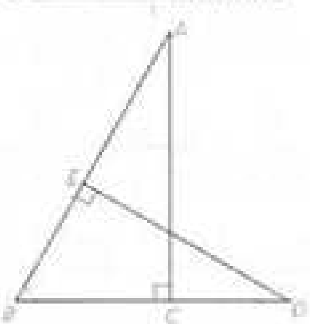
حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.

حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$\angle B=\angle B\ ,\ \angle C=\angle E=۹۰^\circ \Rightarrow$

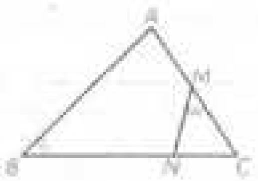
$\triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow$

(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)



$$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow \frac{۱۵}{۱۸}=\frac{BD}{۲۱}\Rightarrow BD=\frac{۲۱\times۱۵}{۱۸}=۱۷/۵m$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصلهٔ ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.



مثال : در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط AC، زاویهٔ NMC را مساوی زاویهٔ B جدا کرده‌ایم. اگر NC=۲ و NB=۴، طول AC را به دست آورید.

حل : با کمی دقت مشاهده می‌کنید که مثلث‌های MNC و ABC دو زاویهٔ هم‌اندازه دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

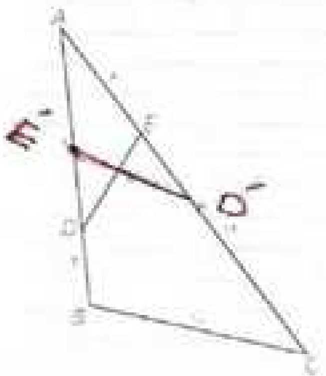
$$\angle M=\angle B \;,\; \angle C=\angle C \Rightarrow \Delta MNC \sim \Delta ABC$$

از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم :

$$\frac{MC}{BC}=\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AC}$$

و به جای MC ، $\frac{AC}{۲}$ را قرار می‌دهیم :

$$\frac{AC}{۲BC}=\frac{NC}{AC}\Rightarrow AC^{۲}=۲NC.BC=۲NC(NC+NB)\Rightarrow AC^{۲}=$$
$$۲\times۲(۲+۴)=۲۴\Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$



مثال : در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.

حل : به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که :

$\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AD}{AC}$ $\frac{۹}{۱۸}$ بنابراین : $\frac{AD}{AC}$ $\frac{AE}{AB}$ و با توجه به زاویهٔ مشترک A مثلث‌های ADE و ABC متشابه‌اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به‌دست آورید.

$\frac{۹}{۱۸}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{x}{۱۰}$ —— $x=۵$

سؤال : در شکل، روی AC ، AD' را هم اندازهٔ AD و روی AB ، AE' را هم اندازهٔ AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$؟

$\frac{AD'}{AC}$ $\frac{AE'}{AB}$ عکس تالس $D'E' \parallel BC$

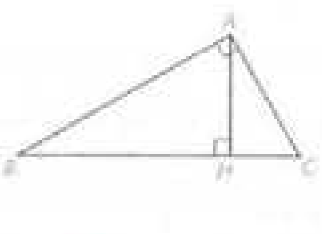
اثبات قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم‌الزاویه

فعالیت ۱

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویهٔ هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟ $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{A}=۹۰^\circ$

به همین ترتیب دو زاویهٔ هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین می‌توانیم بگوییم :

$\hat{C}=\hat{C}$ و $\hat{A}=\hat{H}$



$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \;\;,\;\; \Delta ACH \sim \Delta ABC$$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟ دو مثلث متشابه با یک مثلث خود با هم متشابه‌اند

نتیجه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲ـ نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید:

$$\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^2=BH\times BC$$

۳ـ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطهٔ هندسی BC و CH است.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AH}{AB}\rightarrow \boxed{AC^2=BC\times CH}$$

۴ـ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطهٔ هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{AC}\rightarrow \boxed{AH^2=BH\times CH}$$

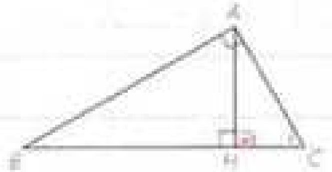
۵ـ از روابط ۲ و ۳ داریم:

(قضیهٔ فیثاغورس)

$$AB^2+AC^2=BC\times BH+BC\times CH=BC(CH+BH)=BC.BC=BC^2$$

نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:



۱) $AB^2=BC.BH$ ۲) $AC^2=BC.CH$

۳) $AB^2+AC^2=BC^2$ ۴) $AH^2=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$

تمرین

۱ـ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید:

برابری دو زاویه

$\frac{2}{5}=\frac{3}{x}$

$x=7.5$

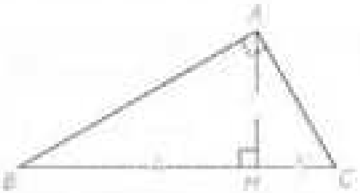
برابری یک زاویه و تناسب اضلاع حول زاویه

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{x}{7.6}$

$3x=7.6$

تناسب سه ضلع

۲ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



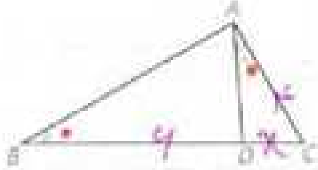
$AB=\sqrt{117}$, $AB^2=9^2+6^2$

۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=? $\quad$ $AC^2=4^2+6^2$, $AC=\sqrt{52}$

۲) AB=۱۰ , BC=۱۲ , AC=? , AH=? $\quad$ $AC=\sqrt{44}$, $AH \cdot BC=AB \cdot AC \to AH=\frac{5\sqrt{11}}{3}$

$BC=10 \leftarrow$ ۳) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=? $\quad$ $BH=6.4$, $CH=3.6$

۴) AB=۸ , AH=۴ , BC=? , AC=? $\quad$ $BC=\frac{16}{3}\sqrt{3}$

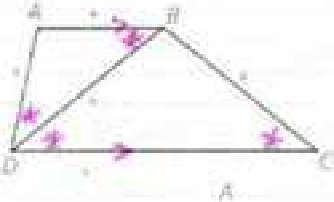


$64-16=48$, $BH=4\sqrt{3}$, $16=4\sqrt{3}\times CH$, $CH=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۳ـ در شکل روبه‌رو $\angle B=\angle A_1$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به‌دست آورید.

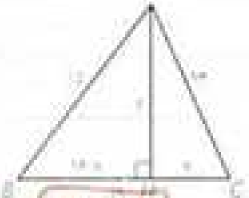
$\triangle ADC \sim \triangle ABC$ $\begin{cases} \hat{A_1}=\hat{B} \\ \hat{C}=\hat{C} \end{cases} \Rightarrow \frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow AC^2=DC \cdot BC$

$16=x(6+x)$, $16=6x+x^2 \to (x+8)(x-2)=0$, $x=2$, $BC=8$



۴ـ در شکل روبه‌رو ABCD ذوزنقه است. طول قاعدهٔ CD را به‌دست آورید.

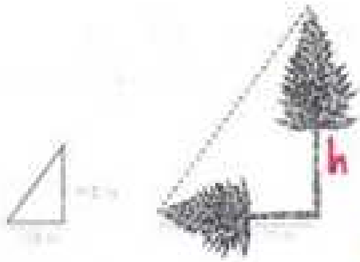
$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC} \to \frac{4}{6}=\frac{6}{x} \Rightarrow x=9$



۵ـ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

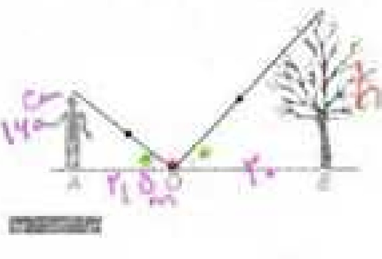
$225=(14-x)^2+y^2$
$169=x^2+y^2 \to 225-(14-x)^2=169-x^2$
$225-196+28x-x^2=169-x^2$
$28x=140 \to x=5$

۶ـ در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایهٔ چوب در آن زمان ۱/۵ متر بود. هم‌زمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟

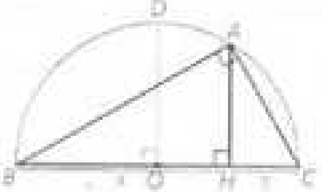
$\frac{h}{2.5}=\frac{12}{1.5} \to h=20$



ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطهٔ O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آن‌قدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص

$\frac{h}{1.6}=\frac{20}{2.5} \to h=12.8$

آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به‌دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصلهٔ آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۷ــ در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.

زاویه محاطی مقابل قطر برابر 90° است

الف) چرا زاویهٔ A قائمه است؟

ب) برای نقطهٔ A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است، اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$OD \boxed{>} AH$

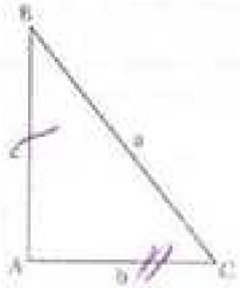
پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$AH^2 = x \cdot y \rightarrow AH = \sqrt{xy}$

$OD = \frac{x+y}{2}$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

بله مطابق اثبات بالا



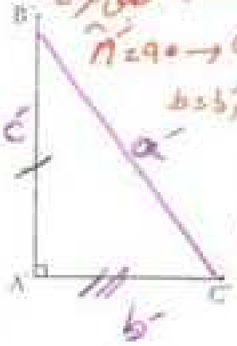
۸ــ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه $A = 90^\circ$

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های A'B' و A'C' را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A'} = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$



طبق فرض $\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\hat{A'} = 90 \rightarrow a'^2 = b'^2 + c'^2$

چون $b = b'$, $c = c'$

پس $a' = a$

$\hat{ABC} \cong \hat{A'B'C'}$

پس $A = A' = 90^\circ$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث A'B'C'، اندازهٔ پاره‌خط B'C' را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$

طبق فرض

۴) توضیح دهید چرا $ABC \cong A'B'C'$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

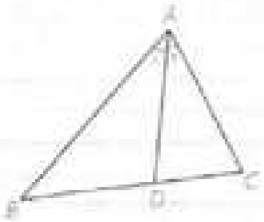
ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

اگر زاویه A از مثلث ABC برابر ۹۰ باشد آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$

و برعکس.

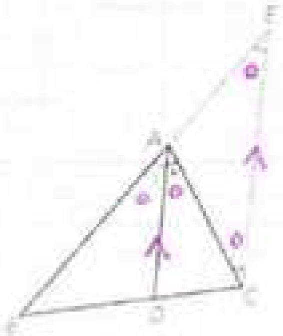
کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$ حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات: مطابق شکل، از نقطهٔ C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

الف) چرا $\angle A_1 = \angle E$ و چرا $\angle A_2 = \angle C$؟ $AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AC}$

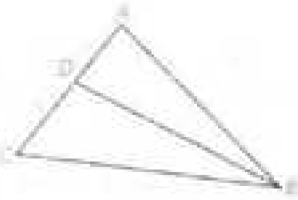
ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟ $\hat{E} = \hat{C}$

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

ج) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC $(AD \parallel EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث، به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد.



مثال: در مثلث ABC ، AB=۷ ، AC=۵ و BC=۸ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD + CD}{CD} = \frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

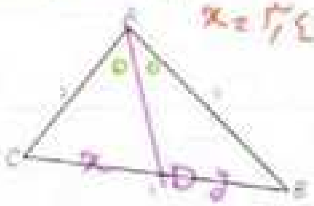
$$CD = \frac{۸ \times ۵}{۱۵} = \frac{۸}{۳} \text{ , } AD = AC - CD = ۵ - \frac{۸}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\longrightarrow\frac{x+y}{y}=\frac{12}{7}\longrightarrow\frac{8}{y}=\frac{12}{7}\rightarrow y=\frac{56}{12}=4{,}6$$

$x=3{,}4$

کار در کلاس

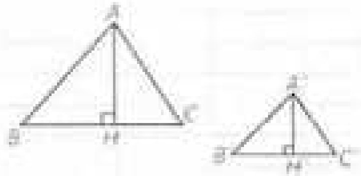


در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به‌دست آورید.

۲ـ نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

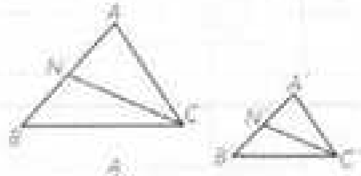
> **قضیه:** هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد ($\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$) آنگاه :



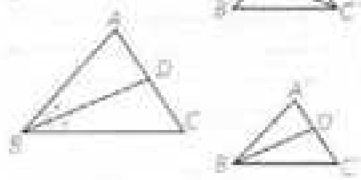
الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است :

$$\frac{A'H'}{AH}=k$$



ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است :

$$\frac{C'N'}{CN}=k$$



ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است :

$$\frac{B'D'}{BD}=k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم :

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k$$

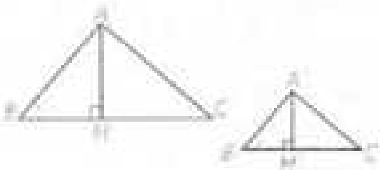
و در مورد مساحت‌ها داریم :

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2$$

اثبات : اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

الف) ارتفاع‌ها

فرض	$\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH}=k$



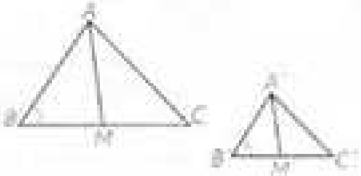
$\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{H}=\hat{H'}$

زیرا $\widehat{A'B'C'} \sim \widehat{ABC}$

چرا $\angle B=\angle B'$؛ بنابراین $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه‌گیری کنید.

$\frac{A'B'}{AB}=K \longrightarrow \frac{A'H'}{AH}=K$

ب) میانه‌ها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM}=k$

زیرا $\widehat{A'B'C'} \sim \widehat{ABC}$

چرا $\angle B=\angle B'$؟

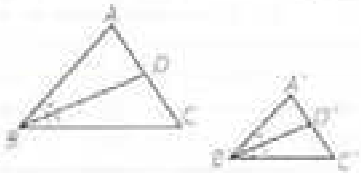
$$\frac{B'M'}{BM}=\frac{\frac{1}{2}\cdot B'C'}{\frac{1}{2}\cdot BC}=\frac{\dots}{\dots}=k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}$$

برابری یک زاویه و تناسب اضلاع حول زاویه

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

$\frac{A'B'}{AB}=K \longrightarrow \frac{A'M'}{AM}=K$

ج) نیمسازها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD}=k$

زیرا $\widehat{A'B'C'} \sim \widehat{ABC}$

$\hat{B}=\hat{B'} \longrightarrow \frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{B'}}{2}$

چرا $\angle A=\angle A'$، چرا $\angle B_2=\angle B'_2$؛

بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

برابری دو زاویه

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'D'}{BD}=K$

د) محیط‌ها

به سادگی و به کمک ویژگی تناسب‌ها می‌توان نوشت:

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=k$$

هـ) مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{A'H'}{AH}=\frac{B'C'}{BC}=k \qquad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{A'H'}{AH}\times\frac{B'C'}{BC}=k.k=k^2$$

کار در کلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱ـ اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشند، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \longrightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = K$

۲ـ قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'}$ و $\hat{D} = \hat{D'}$ $\quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ و $\hat{B} = \hat{B'}$ $\quad K$

۳ـ جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = K^2 , \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = K^2$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

> هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

> هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کار در کلاس

۱ـ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

$\frac{S}{S'} = K^2 \longrightarrow \frac{S}{S'} = \frac{10}{18} \longrightarrow \frac{S}{\cancel{15}_{5}} = \frac{10}{\cancel{18}_{6}}$

$\frac{P}{P'} = K$

$S = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

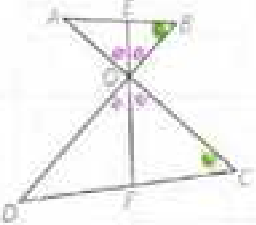
$\frac{4}{9} = \frac{12}{x} \rightarrow x = ۲۷$

$\frac{4}{9} = \frac{x}{12} \rightarrow x = ۵۳$

۲ـ نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳ـ اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت‌ضلعی چند برابر می‌شود؟ ۹ برابر

فعالیت



در شکل روبه‌رو $EF=10cm$ نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

$\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به رأس

$\hat{B}=\hat{C}$

ب) اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{2}{3}$، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟ $\frac{2}{3}$

ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

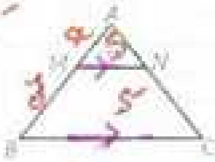
$\frac{OE}{OF}=\frac{2}{3} \rightarrow \frac{OE+OF}{OF}=\frac{5}{3} \rightarrow \frac{10}{OF}=\frac{5}{3} \rightarrow OF=6, OE=4$

تمرین

۱ـ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

$\frac{15}{10}=\frac{P}{P'}$

$\frac{15}{10}=\frac{37}{P'} \rightarrow P'=\frac{2\times 37}{3}=\frac{74}{3}$



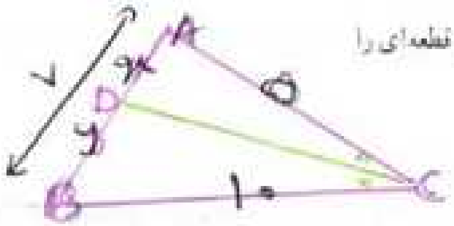
۲ـ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.

$S'=8S \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=9$

$\frac{AB}{AM}=3$

$\frac{x+y}{x}=3 \rightarrow \frac{x+y-x}{x}=\frac{3-1}{1}$

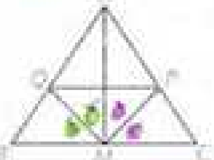
$\frac{y}{x}=\frac{2}{1}$



۳ـ در مثلث ABC، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

$\frac{x}{y}=\frac{5}{10} \rightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{15}{10} \rightarrow \frac{7}{y}=\frac{15}{10}$

$y=۴٫۶۶$ و $x=۲٫۳۴$



۴ـ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:

$PQ \parallel BC$

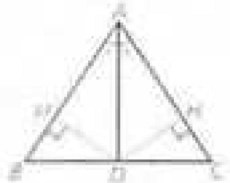
$\triangle AMC \xrightarrow{\text{نیمساز } PM} \frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC}$ چون $MC=MB$

$\triangle AMB \xrightarrow{\text{نیمساز } MQ} \frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MB}$

پس

$\boxed{PQ \parallel BC}$ در نتیجه $\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌ها روی یک خط راست باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است



۵ــ در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویهٔ A است و عمودهای DH و 'DH نیز رسم شده‌اند.

الف) با توجه به نتیجهٔ (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$$

زیرا هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است

ب) چرا 'DH=DH؟ با توجه به این موضوع و نتیجهٔ (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC}$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیهٔ نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

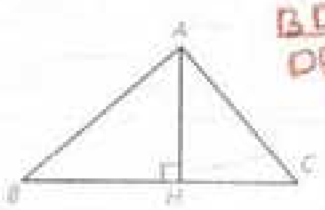
$$\frac{AB}{CD}\quad\frac{AE}{BC}=\frac{BE}{BD}$$

۶ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.

$$3x-1=y+15 \qquad 2x-7=x+y$$

$$\begin{cases}2x-y=12\\ x-y=7\end{cases} \quad x=5,\ y=-2$$

$$\frac{BD}{DE}=\frac{3}{1}$$



۷ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع:

الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2,\quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

$$\frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1 \longrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$$

۸ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصلهٔ ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصلهٔ ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

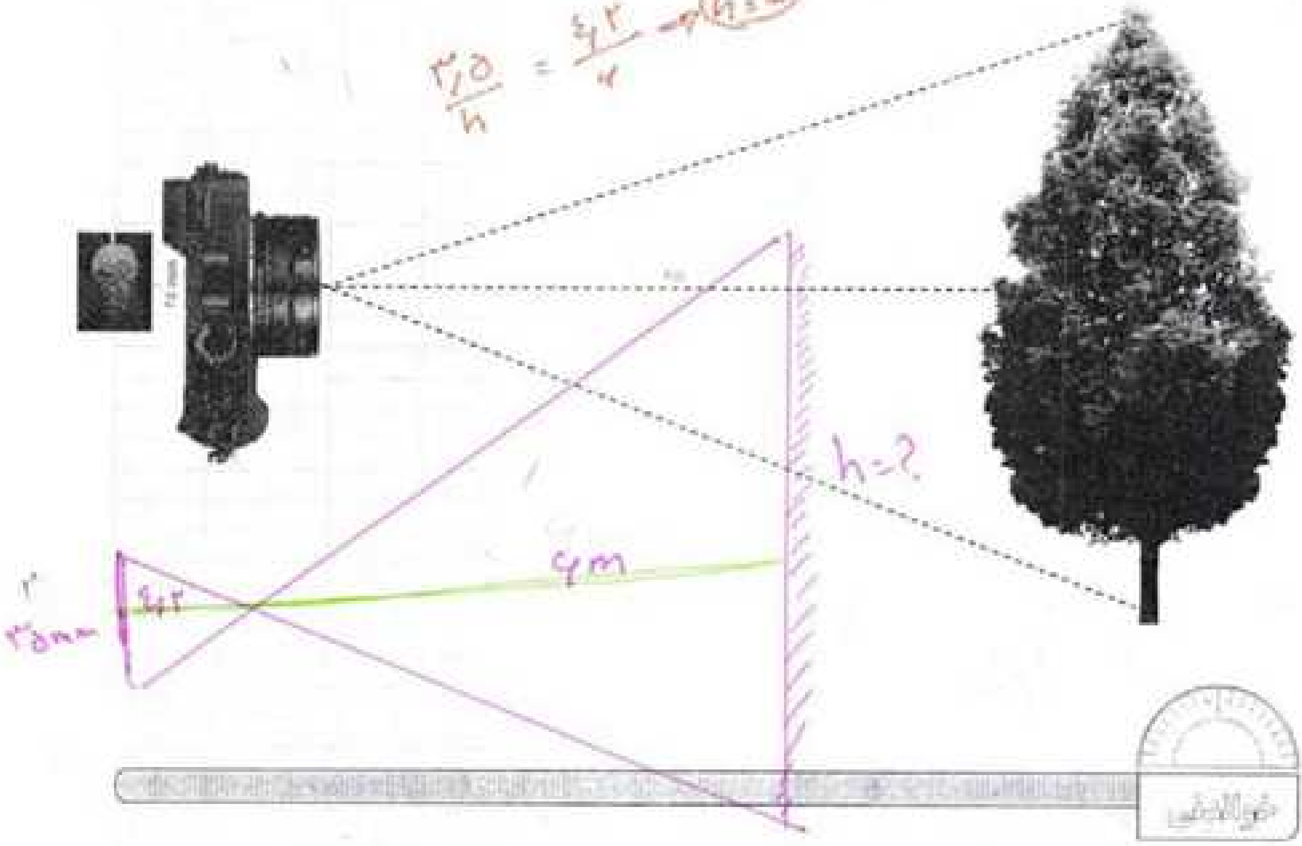
(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)

$$\frac{20}{80}=\frac{4.4}{x} \longrightarrow x=17.6 \longrightarrow$$

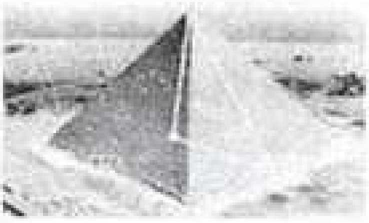
$$h=(17.6-3.2)+1.6$$

$$h=14m$$

۹ـ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقهٔ فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی[۱] ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصلهٔ آن درون دوربین تا عدسی[۲]، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازهٔ واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



خواندنی



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سومی باشد؛ به عبارتی اعداد b ، a و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.

۱ـ واژهٔ «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «نگاتیو» به‌کار رفته است.

۲ـ واژهٔ «عدسی» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «لنز» به‌کار رفته است.

اثبات ویژگی‌های تناسب

۱ طرفین ـ وسطین کردن؛ طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \Rightarrow ad=bc$$

۲ ویژگی‌های (۲) و (۳) با طرفین ـ وسطین کردن، به سادگی نتیجه می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow da=cb\Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow bc=ad\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۳ ویژگی‌های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1\Rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

ویژگی‌های تفضیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk\ ,\ c=dk\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.