فصل اوّل

ترسیم‌های هندسی و استدلال

هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.

از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

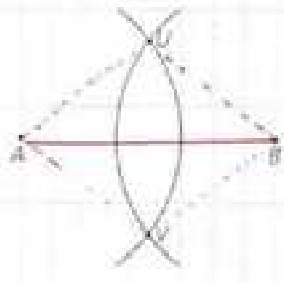
فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱ـ نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

کافی است به مرکز O و شعاع دلخواه شعاع ۲ دایره رسم کنیم.
تمام نقاط روی دایره جواب مسئله هستند.

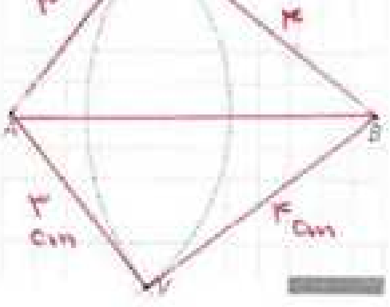
نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲ سانتی‌متر است.)



۲ـ نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند.

۳ـ نقطهٔ A، مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند. کافی است به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی کمانی رسم کنیم که خط d را در نقاط M و N قطع کند.



۴ـ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

همگی از نقطه ی A به فاصله ی ۳ سانتی متری قرار دارند.

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟ همگی تا نقطهٔ B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متری قرار دارند.

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازهٔ شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

$AU = ۳cm \quad BU = ۴cm$

$AV = ۳cm \quad BV = ۳cm$

$AU + BU > AB$

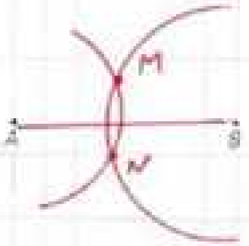
ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

$AU = ۳$

$BV = ۴$

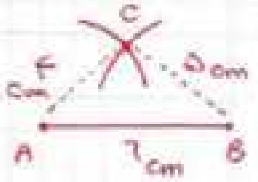
$AB^۲ = AU^۲ + BV^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$

$\Longrightarrow AB = ۵\ cm$



کار در کلاس

۱ــ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشند. کافی است به مرکز A کمانی به شعاع ۲ و از نقطهٔ B کمانی به شعاع ۲/۵ سانتی‌متر رسم کنیم. نقاط تقاطع دو کمان جواب مسئله هستند.



۲ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد. ابتدا با خط‌کش یک پاره‌خط به اندازهٔ ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس از دو سر این پاره‌خط یک کمان به شعاع ۴ و از یک کمان به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

۳ــ جاهای خالی را به‌گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصلهٔ .... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشند.

الف) ۵ و ۶ و ۴

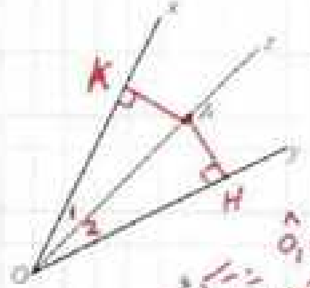
ب) ۶ و ۳ و ۳

پ) ۵ و ۱ و ۲

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy و نیم‌خط Oz را نیمساز آن درنظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ A از دو ضلع زاویهٔ xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

مشترک $OA = OA$

$\Longrightarrow O\overset{\triangle}{A}H \cong O\overset{\triangle}{A}K \Longrightarrow AH = AK$

(وتر و یک زاویهٔ حاده)

توجه: حالت همنهشتی (وتر ض ز) را نمی‌توان بکار برد

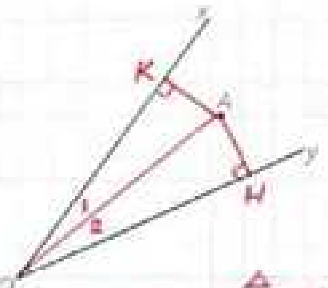
نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد آنگاه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند.

۲ــ زاویهٔ xOy و نقطهٔ A را چنان درنظر می‌گیریم که فاصلهٔ نقطهٔ A از نیم‌خط‌های Oy و Ox باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره‌خط OA، و دو عمود از نقطهٔ A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)



$AH = AK$
$OA = OA$ مشترک } → $O\hat{A}H \cong O\hat{A}K$ چون (وتر و یک ضلع)
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
یعنی OA نیمساز زاویه xOy است.
توجه: حالت (ض ز ض) را نمی‌توان بکار برد.

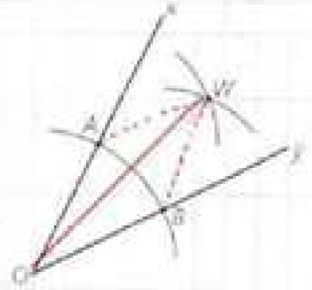
نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه‌که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

فعالیت



۱ــ زاویهٔ xOy را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
OA = OB چون توسط پرگار به مرکز O و شعاع یکسان رسم شده‌اند.

۲ــ دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

ــ طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
AW = BW چون شعاع پرگار ثابت مانده است.

ــ پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ همنهشت به حالت تساوی سه ضلع

$OA = OB$
$AW = BW$
$OW = OW$ مشترک } → $O\hat{A}W \cong O\hat{B}W$ (ض ض ض)
→ $A\hat{O}W = B\hat{O}W$

ــ اندازهٔ زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی
چون که دو مثلث متناظر همنهشت می‌باشند

ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ xOy چه نوع پاره‌خطی است؟ نیمساز زاویه xOy است.

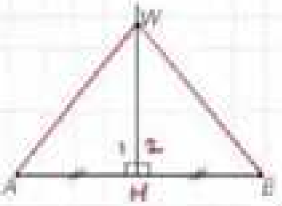
کار در کلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید. ابتدا رأس زاویه را که می‌خواهیم رسم کنیم از رأس زاویه یک کمان سپس از نقاط بدست آمده دو کمان با شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم طوری که این دو کمان متقاطع باشند. اگر محل تقاطع این دو کمان را به رأس زاویه وصل کنیم، نیمساز زاویه بدست می‌آید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

۱ــ پاره‌خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطهٔ W از دوسر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



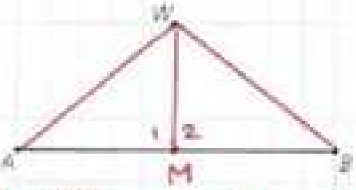
$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ WH = WH \text{ مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{AWH \cong BWH} \Rightarrow AW = BW$$

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک‌پاره‌خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W را به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که نقطهٔ W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی WA = WB) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطهٔ W به A و B و به وسط پاره‌خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.)



$$\left.\begin{array}{l} WA = WB \\ MW = MW \\ AM = BM \end{array}\right\} \Rightarrow AMW \cong BMW$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

وچون $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180$ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ یعنی MW بر AB عمود است وچون نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB می‌باشد پس MW عمودمنصف پاره‌خط AB است.

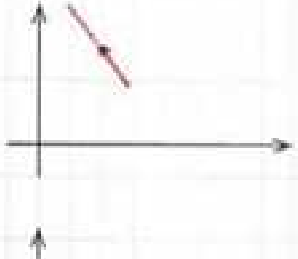
نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خطی به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت



۱ــ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟ بی‌شمار

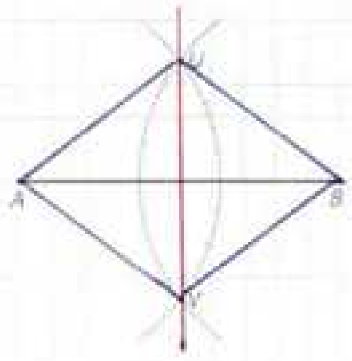
۲ــ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ موردنظر بگذرد؟ فقط یک خط

۳ــ به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟ دو نقطه

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت



پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲ــ طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی‌اند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۳ــ طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی‌اند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۴ــ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟
بله، چون از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند.

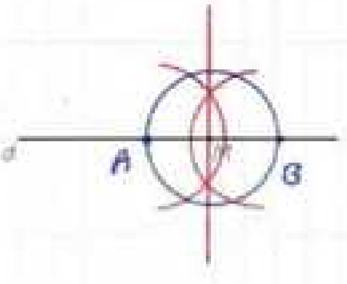
۵ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

کاردرکلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید. پرگار را به اندازه بیشتر از نصف پاره خط AB باز کرده و از هر طرف یک کمان رسم می‌کنیم (از نقاط A و B) خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمود منصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت



رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

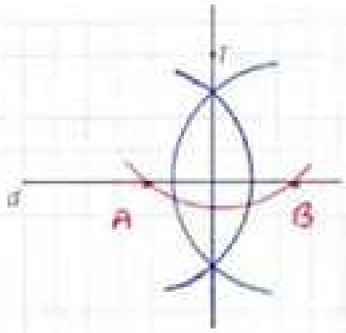
۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به‌گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد. به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و A قطع کند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d، عمود... و از نقطهٔ M می‌گذرد.

کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید. ابتدا نقطه‌ی دلخواه روی خط d در نظر می‌گیریم. به شعاع دلخواه یک دایره به مرکز این نقطه رسم می‌کنیم. حال عمود منصف پاره خط بدست آمده از محل تقاطع خط مفروض و دایره را رسم می‌کنیم.



فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.
می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ـ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ T به یک فاصله باشند. به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه متمایز قطع کند.

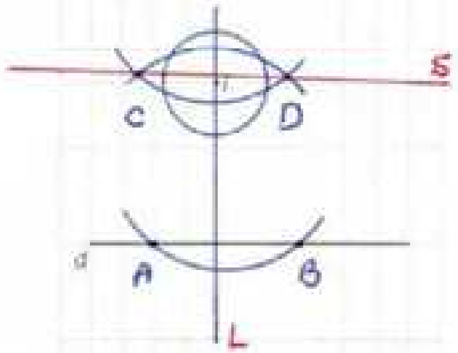
۲ـ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ـ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ T می‌گذرد؟ چرا؟ بله، زیرا نقطهٔ T از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ...عمود...... و از نقطهٔ T ...بگذرد.........

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطهٔ دلخواه T کمانی رسم می‌کنیم که خط مورد نظر را در نقاط A و B قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود است.



$L \perp d$
$L \perp S \rightarrow d \parallel S$

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن

خط d و نقطهٔ T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.
می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ T بگذرد و با خط d موازی باشد.

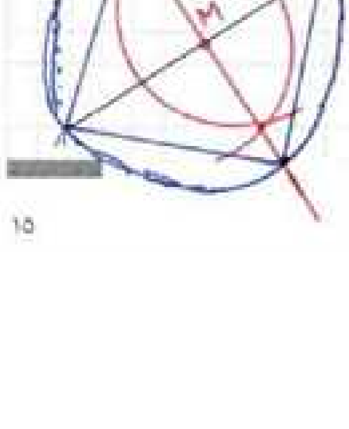
۱ـ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ـ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳ـ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب درنظر بگیرید.)

کاردرکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطهٔ T خطی عمود بر d و سپس از همین نقطه خط دیگری عمود بر خط عمود بر d رسم می‌کنیم.



فعالیت

پاره‌خط داده شدهٔ AB در شکل مقابل را با اندازهٔ ۴ واحد درنظر بگیرید.

الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) جهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ مربع است

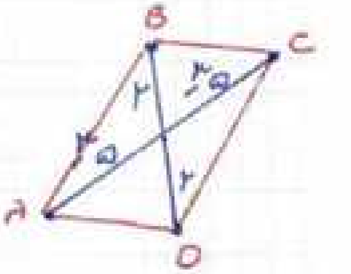
زیرا قطرهای این چهارضلعی هم برابر و هم عمودند و هم همدیگر را نصف می‌کنند.

کار در کلاس

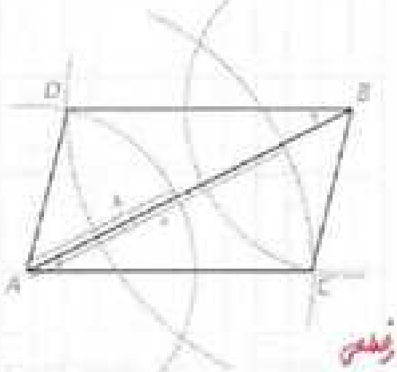
طریقهٔ رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید. ابتدا عمود منصف قطر مربع را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ تقاطع عمودمنصف و قطر (نقطهٔ وسط قطر) دایره‌ای به مرکز این نقطه و به شعاع نصف قطر رسم می‌کنیم. نقاط تقاطع دایره با عمود منصف را به نقاط دو سر پاره خط داده شده وصل می‌کنیم.

تمرین

۱ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشند. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟ دو پاره خط طوری رسم می‌کنیم که همدیگر را نصف کنند. با اتصال متوالی دو سر این پاره خط‌ها چهارضلعی مورد نظر (متوازی‌الاضلاع) حاصل می‌شود. بی‌شمار



۲ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.



۳ــ پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک بار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. (به‌طوری که مجموع a و b از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشند) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟

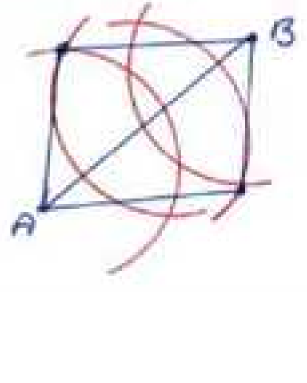
(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند.)

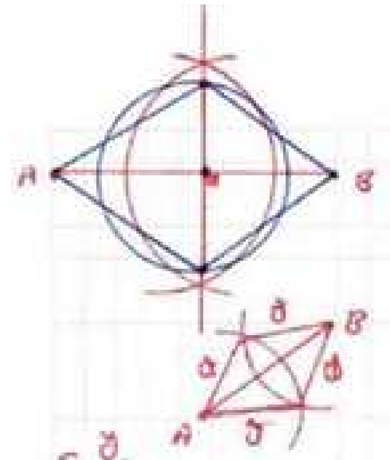
$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ BC = AD \\ AB = AB \text{ مشترک} \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow AC \parallel BD$$

(ض ض ض)

$AC \parallel BD$ و چون $AC = BD$ → چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع است.

۴ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشند. مشابه تمرین ۳ ابتدا قطر را رسم می‌کنیم.





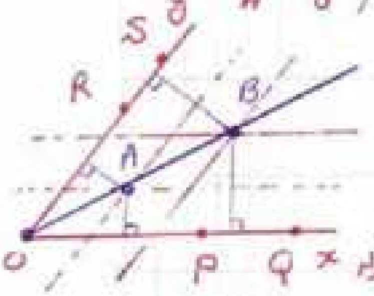
۵ــ می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشند. دو پاره خط عمود هم یکی به طول ۳ و دیگری به طول ۵ رسم می‌کنیم. چهارضلعی بدست می‌آید.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

مانند رسم متوازی الاضلاع ابتدا قطر را رسم می‌کنیم.

۶ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.



الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویهٔ موردنظر را رسم کنید.

ابتدا از یک نقطه‌ی دلخواه روی ضلع ox خطی موازی آن و به فاصله ۲ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. سپس از یک نقطه‌ی دلخواه دیگر روی ضلع ox خطی موازی آن و به فاصله ۴ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم.

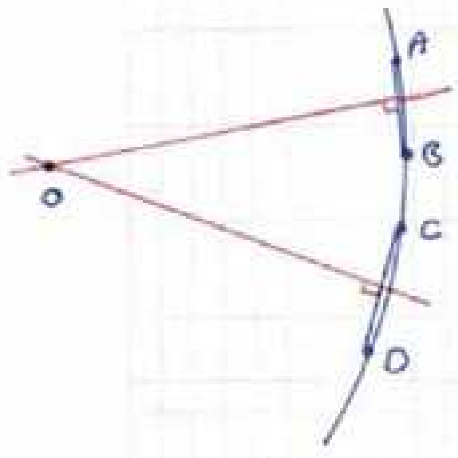
با پاره خط

۷ــ وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ عمود منصف AB از نقطه‌ی O مرکز دایره می‌گذرد. چون O از دو سر پاره خط AB می‌گذرد.

آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.

نقطه‌ی پنالتی محل تقاطع دو وتر از قوس جلوی محوطه‌ی هجده قدم است.



اگر به همین ترتیب موارد قبل را برای ضلع oy انجام دهیم و محل تقاطع خطوط را A و B بنامیم. در این صورت نقطه‌ی A (به فاصله ۲ سانتی‌متری از هر ضلع زاویه) و نقطه‌ی B (به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متری از هر ضلع زاویه) بدست می‌آید. طبق ویژگی نیمساز زاویه نقاط A و B از هر ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. پس امتداد پاره خط AB

درس دوم

استدلال

شیوهٔ درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعهٔ انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

– من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

– تیم مورد علاقهٔ من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

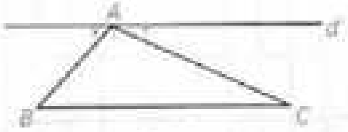
استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجهٔ گرفته‌شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهدهٔ اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همهٔ افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از **استدلال استقرایی** استفاده کرده است.

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

به‌طور مثال با دانستن رابطهٔ بین خطوط موازی و مورّب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.



$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}=\hat{A}_{2} \\ \hat{C}=\hat{A}_{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_{1}+\hat{A}_{2}+\hat{A}_{3}=180^\circ$$

فعالیت

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب °۳۶۰ است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به‌سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها °۳۶۰ است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب °۳۶۰ است.

در استدلال پژمان فقط چهارضلعی‌های خاص در نظر گرفته شده است. بنابراین ایراد دارد.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث °۱۸۰ است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با °۳۶۰.

استدلال پیمان از کل به جزء است و کاملاً درست می‌باشد.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر °۳۶۰ است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به‌کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئلهٔ قبل برابر °۳۶۰ است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

ـ نوع استدلال ارائه‌شده، توسط هرکدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

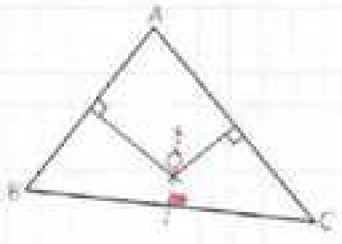
پژمان: استدلال استقرایی (از جزء به کل)

پیمان: استدلال استنتاجی (از کل به جزء)

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده، نتیجه بگیرید که **سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).**

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

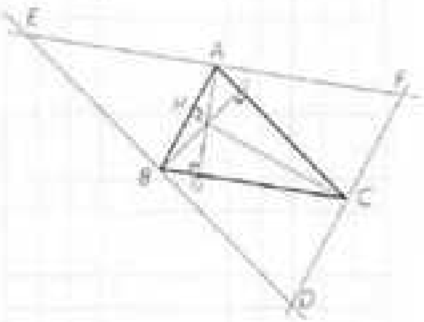


۱ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین OA = OC

۲ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین OA = OB

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : OB = OC. بنابراین نقطهٔ O روی عمودمنصف BC قرار دارد. درنتیجه نقطهٔ O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC است.

مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.

چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی ای است؟ چرا؟ متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل موازیند.

بنابراین BC = AF ①

ــ چهارضلعی ACBE چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل موازیند

بنابراین BC = AE ②

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : AE = AF؛ بنابراین نقطهٔ A وسط پاره‌خط EF است.

$$\left.\begin{matrix} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \boxed{\perp} EF$$

لذا خط AG عمودمنصف پاره‌خط EF است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد :

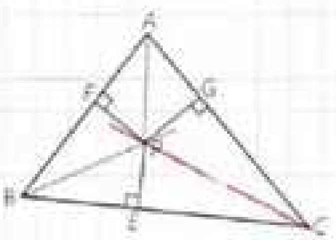
پاره‌خط BI، عمودمنصف پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH، عمودمنصف پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF هستند و درنتیجه همرسند.

مثال : می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطهٔ P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.



۱ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A است؛ بنابراین ...PF... = ...PG...

۲ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ B است؛ بنابراین ...PF... = ...PE...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : ...PG = PE... بنابراین نقطهٔ P روی ...نیمساز زاویهٔ C است.

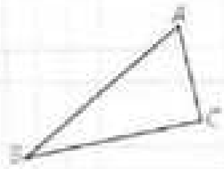
درنتیجه نقطهٔ P محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث ABC است.

فعالیت

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.

اضلاع	GH	HI	GI
زاویه‌ها	I	G	H

اضلاع	EF	DE	DF
زاویه‌ها	D	F	E



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه‌ها	C	A	B

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویهٔ زیر آن وجود دارد؟ زاویه‌ی بزرگتر روبرو به ضلع بزرگتر است.

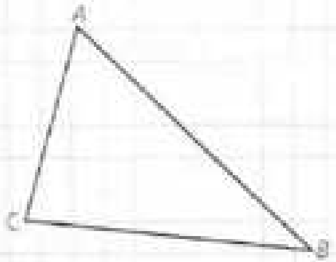
با توجه به این رابطه دربارهٔ یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ در هر مثلث زاویه بزرگتر، روبرو به ضلع بزرگتر است.

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استقرایی

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس موردنظر درست است؟ خیر، نمی‌توان از نتیجه به دست آمده مطمئن بود

مسئله : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال : برای واضح‌شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشند و ویژگی خاص دیگری نداشته باشند.



فرض: AB>AC

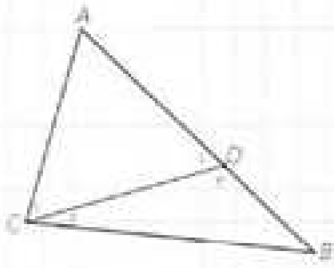
حکم: ...$\hat{C}$ > $\hat{B}$...

یاد آوری

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲ـ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض AB>AC است؛ لذا می‌توانیم نقطهٔ D را روی AB جایی انتخاب کنیم که AC=AD



★ اندازهٔ زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}\ \boxed{>}\ \hat{C}_1$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

★★ اندازهٔ زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1\ \boxed{=}\ \hat{D}_1$

زاویهٔ D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟ خارجی

★★★ اندازهٔ زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1\ \boxed{>}\ \hat{B}$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای دربارهٔ اندازهٔ زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$\hat{C}\ \boxed{>}\ \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده گردید در مثلثی مانند $\overset{\triangle}{ABC}$ فرض کردیم که ضلع AB>AC است و نشان دادیم : زاویهٔ روبه‌رو به AC < زاویهٔ روبه‌رو به AB است.

چرا می‌توان این موضوع را دربارهٔ تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

زیرا این اثبات مبتنی بر واقعیت هایی است که درستی آنها را قبول داریم، می باشد (استدلال استنتاجی)

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئلهٔ قبل با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، **قضیه** نامیده می‌شود.

قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ رو به‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: AB<AC

حکم: $\hat{C}<\hat{B}$

ـ بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحلی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به‌دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

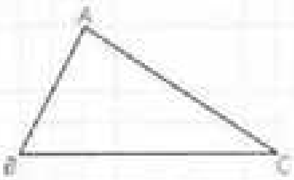
به‌طور مثال عکس قضیهٔ ۱ به‌صورت زیر است:

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$

حکم: $AB < AC$

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده‌است.



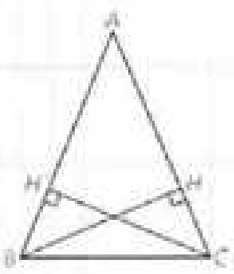
مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است :

ـ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

ـ $3<2$

جمله‌های زیر گزاره نیست :

ـ آیا فردا هوا بارانی است؟

ـ چه هوای خوبی!

ـ کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

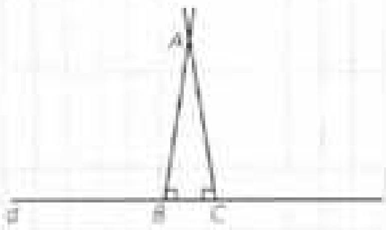
نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش 360° است.»

در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، **گزاره‌های شرطی** می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال : از یک نقطهٔ غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

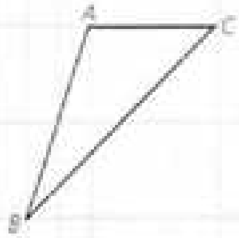
فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از ۱۸۰° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم عکس قضیهٔ ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$

اثبات : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم...نادرست... باشد. بنابراین باید $BC < AC$ یا.. $BC = AC$

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اوّل : اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیهٔ ۱ باید .$\hat{A} < \hat{B}$.، که با فرض در تناقض است.

حالت دوّم : اگر $BC = AC$ باشد، $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث...متساوی الساقین... خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

قضیه‌های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

> اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث باشد

$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} < \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین‌صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

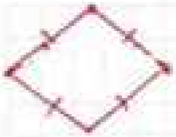
پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟ نادرست. چهارضلعی ممکن است لوزی باشد.



اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (ب) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟ ممکن است درست باشد. خیر

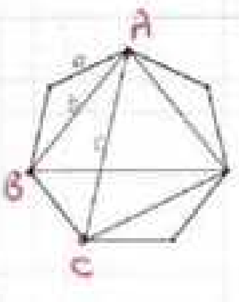
آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (ب) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟ مثال نقض دارد. اگر $n = 41$ آنگاه

$$41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43$$

عدد اول نیست

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کار در کلاس



۱ـ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید.»

خیر: مثلث ABC متساوی الساقین نیست.

۲ـ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$ خیر

$A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$A \nsubseteq B$ و $B \nsubseteq A$

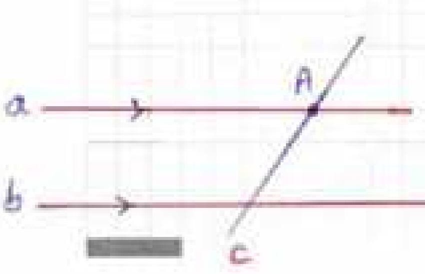
ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند. خیر

مثلث اول $a = 8 \, , \, h = 3 \Rightarrow S_1 = \frac{3 \times 8}{2} = 12$

مثلث دوم $a = 12 \, , \, h = 2 \Rightarrow S_2 = \frac{2 \times 12}{2} = 12$

ولی دو مثلث هم همنهشت نیستند.

تمرین



۱ـ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

فرض کنیم که خط c خط b را قطع نکند پس $c \parallel b$ داریم به این معنی است که از نقطهٔ A دو خط موازی b رسم شده است و این ممکن نیست. لذا خط c باید خط b را قطع کند.

۲ـ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

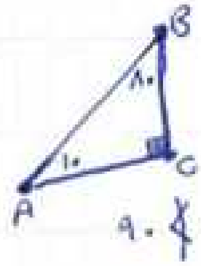
فرض کنیم که $\hat{B} = \hat{C}$ لذا باید $AB = AC$ باشد و این خلاف فرض است.

۳ـ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

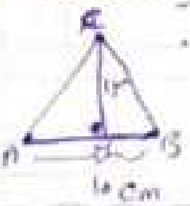
ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۳) الف)



$۹۰ \not< ۴(۱۰)$

۳) ب) مثلث زیر ارتفاع از ضلع AB کوچک‌تر نیست. مثال نقض.



۴ـ با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $۱۸۰ \times (n-۲)$.

۴) در یک n ضلعی محدب اگر رأس معینی را A بنامیم از این رأس $n-۳$ قطر می‌گذرد (چرا؟) و لذا $(n-۳)+۱=n-۲$ مثلث متمایز ایجاد می‌شود. مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها یعنی $(n-۲)\times۱۸۰$ برابر مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی محدب است.

۵ـ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است. هر لوزی یک مربع نیست.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. مستطیلی وجود دارد که مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد. همهٔ مثلث‌ها بیش از یک زاویه قائمه دارند.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° نیست.

۶ـ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

عکس قضیه:
الف) در هر مثلث اگر دو زاویه روبه‌رو به دو ضلع برابر باشند آنگاه آن دو ضلع برابرند.

قضیهٔ دوشرطی: در هر مثلث اگر دو ضلع برابر باشند، زاویه‌های روبه‌رو به آن دو ضلع نیز برابرند و بالعکس.

ب) اگر قطرهای یک چهارضلعی عمود منصف همدیگر باشند آنگاه چهارضلعی لوزی است.

قضیهٔ دوشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهای آن عمود منصف همدیگر باشند.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه مساوی باشند آنگاه سه ضلع مساوی‌اند.

قضیهٔ دوشرطی: اگر سه ضلع مثلث برابر باشند آنگاه سه زاویه برابرند و برعکس.

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند آنگاه شعاع‌های آنها برابرند.

قضیهٔ دوشرطی: اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند آنگاه مساحت‌ها ...

فصل دوم

۲

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

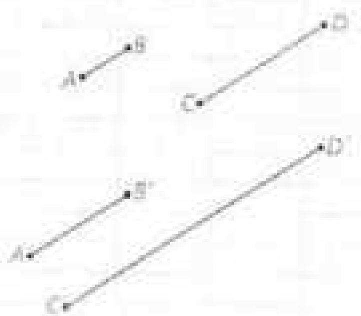
■ قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد.
محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

نسبت و تناسب در هندسه

تعریف نسبت و تناسب لازم است.

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل‌ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq ۰)$ آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t,y\neq ۰$ تناسب $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشند، $\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۵}$. حال فرض کنید $A'B'=۴cm$ و $C'D'=۱۰cm$، در این صورت

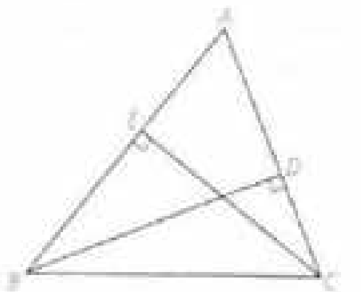
$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$



و بنابراین یک تناسب به‌صورت $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{۲}{۵}$ باشند، نسبت CD به AB، $\frac{۵}{۲}$ است.

فعالیت ۱

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.



مساحت $ABC = \frac{۱}{۲}AC \times BD$

مساحت $ABC = \frac{۱}{۲}AB \times CE$

ـ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین $AC \times BD = AB \times CE$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

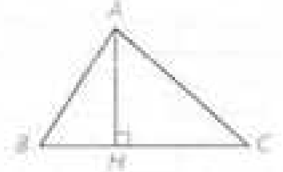
$\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ و $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$

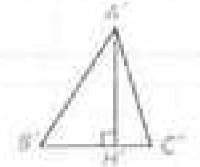
پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ خیر

تفاوت پاسخ‌ها به چیزی را نشان می‌دهد؟

با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ...ارتفاع... وارد بر آنها برابر است.





فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A'H' در دو مثلث ABC و A'B'C' هم‌اندازه‌اند (AH = A'H')

با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

S_{ABC} = ABC مساحت $= \frac{1}{2}$ AH . BC

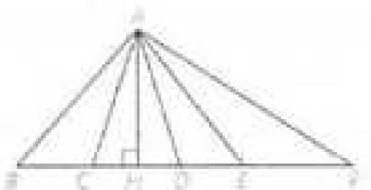
$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}$ A'H' × B'C'

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH . BC}{\frac{1}{2} A'H' . B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

کار در کلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ADE، ACD، ABC و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟

با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

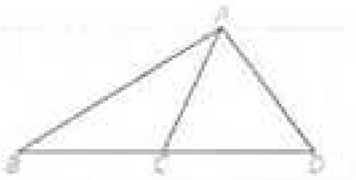
$$\frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} AH \times CD} \qquad \frac{\frac{1}{2} AH \times CD}{\frac{1}{2} AH \times EF} \qquad \frac{\frac{1}{2} AH \times CE}{\frac{1}{2} AH \times BF}$$

$$\frac{BC}{CD} , \frac{CD}{EF} , \frac{CE}{BF}$$

نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



کار در کلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

$\frac{1}{2} h \times a$

نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

(طرفین وسطین کردن)	b و $d \neq 0$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$	۱
(معکوس کردن طرفین تناسب)	a و b و c و $d \neq 0$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	۲
(عوض کردن جای طرفین یا وسطین)	a و b و c و $d \neq 0$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	۳
(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d \neq 0$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۴
(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d \neq 0$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Rightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۵
	b و $d \neq 0$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	۶

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ ۷ $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$	b_1 و b_2 و ... و $b_n \neq 0$	[illegible]

تعریف واسطهٔ (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ با طرفین وسطین‌کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2=ac$. در این صورت b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.
مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطهٔ هندسی بین آنهاست (چرا؟)

تمرین

۱ـ اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

$\frac{x+y+z}{2+3+6}=\frac{3}{5} \to x+y+z=\frac{33}{5}$

۲ـ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

$x^2=10\times 8 \to x^2=80$

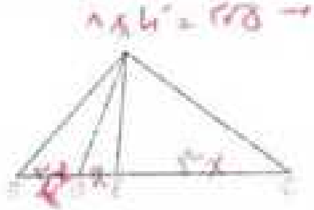
$\boxed{x=4\sqrt{5}}$

۳ـ طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌متر، و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

$\frac{\frac{3\sqrt{15}}{4}\times 8}{2}=3\sqrt{15}=S$

$4\times h=3\sqrt{15} \to h=\frac{3}{4}\sqrt{15}$

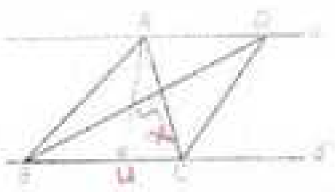
$8\times h'=3\sqrt{15} \to h'=\frac{3\sqrt{15}}{8}$



۴ـ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به‌دست آورید.

$S_{ACE}=3S_{ADE} \to \frac{1}{2}AH\times CE=3\times\frac{1}{2}AH\times DE \to CE=3DE$

$S_{ACE}=2S_{ABD} \to \frac{1}{2}AH\times CE=2\times\frac{1}{2}AH\times BD \to CE=2BD$



۵ـ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^2$ است. اگر BD=۶cm باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC=8$

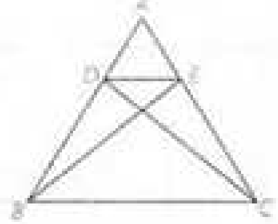
$S_{BDC}=\frac{1}{2}x\times BD=8 \to x=\frac{8}{3}$

$\frac{BC}{DE}=\frac{\frac{11}{2}x}{x}=\frac{11}{2}$

$\frac{DE}{BD}=\frac{x}{\frac{3}{2}x}=\frac{2}{3}$

درس دوم

قضیهٔ تالس



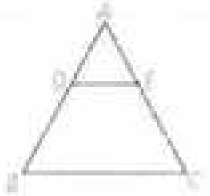
در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجهٔ ۱ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید:

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{AE}{EC},\quad \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{AD}{DB}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید:

$$\boxed{\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم:



قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE \| BC$، آنگاه:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

کار در کلاس

۱ـ در شکل مقابل $DE \| BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=0/8$. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{3}=\frac{0/8}{EC} \rightarrow EC=2/4$$

$$AC=3/2$$

۲ـ در شکل مقابل $MN \| BC$؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.

$$\frac{x}{3}=\frac{2x-0/5}{4/5} \rightarrow 4/5x=6x-1/5$$

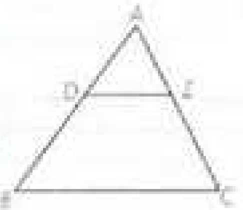
$$1/5=1/5x$$

$$\boxed{1=x}$$

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

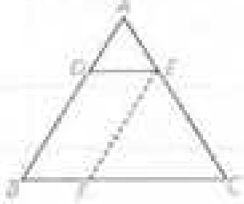
$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}$

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$



۳ـ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

فعالیت ۱



در شکل مقابل $DE \parallel BC$، از نقطهٔ E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم.
چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
با توجه به این موضوع داریم:

$DE=BF \quad , \quad DB=EF$

در مثلث ABC و با درنظرگرفتن $DE \parallel BC$، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (۱)

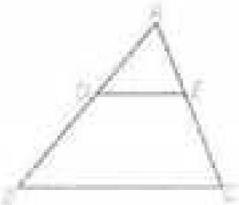
در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (۲)

DE

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

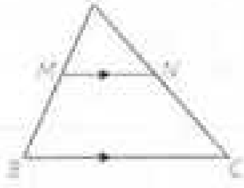
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$



تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

کار در کلاس

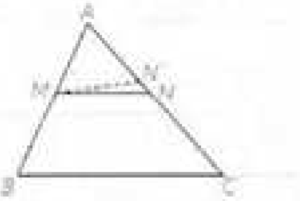


در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$، طبق قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$

عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

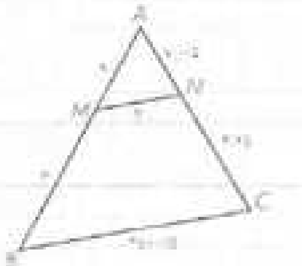
اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم :



$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \nparallel BC$، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{AM}{AB}$$

از مقایسهٔ این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{AN'}{AC}=\frac{AN}{AC}$ و درنتیجه : $AN' = AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.



مثال : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

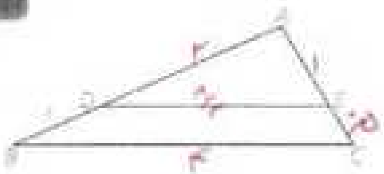
حل : با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵} \Rightarrow$$

$$۲/۲۵x=۳x-۱/۵ \Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵ \Rightarrow x=۲$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۴/۵} \Rightarrow y=۱/۸$$

تمرین



۱ـ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.

$\frac{۲}{DB}=\frac{۱}{۰/۵} \rightarrow DB=۱$

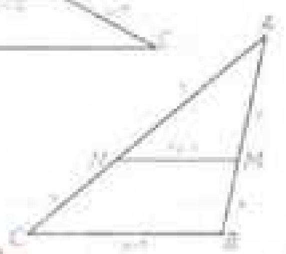
$\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{DB}{۴} \rightarrow DB=\frac{۸}{۳}$

$AB=۲+۱=۳$

۲ـ در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$؛ مقدار x را به‌دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

$\frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \rightarrow x+۲=۲x \rightarrow \boxed{x=۲}$

$\frac{۱}{۳}=\frac{۲/۵}{BC} \rightarrow \boxed{BC=۷/۵}$



۳ـ در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

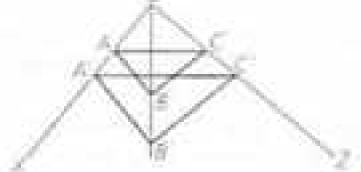
$\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \rightarrow \boxed{x=۶}$

$\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$

$۷۲=۳۰y-۱۵$

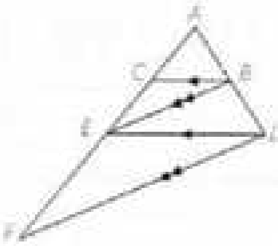
$۸۷=۳۰y$

$=\frac{۸۷}{۳۰}=y$



۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$, $\frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'}$ $\rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \rightarrow$ عکس تالس $AC \parallel A'C'$

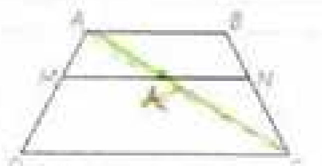


۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$
$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$ $\rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$

$\frac{3}{60} = \frac{1}{x} \rightarrow \boxed{x=20}$

۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



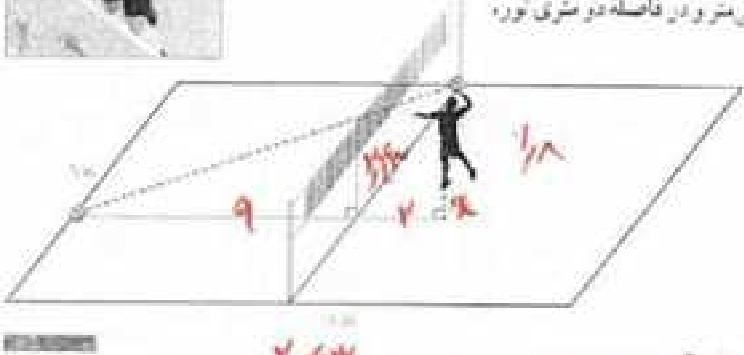
۷ــ در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)

$\frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$
$\frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC}$ $\rightarrow \boxed{\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}}$

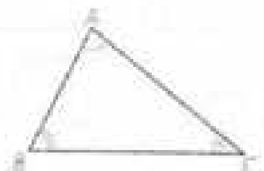
۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



$\frac{9}{11} = \frac{2/43}{1/8+x} \rightarrow 16/2 + 9x = 26/73$

$9x = 10/53 \rightarrow x = 1/17$

تشابه مثلث‌ها



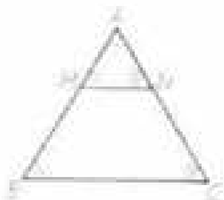
در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم دربارهٔ تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C' \qquad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}$ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث A'B'C' نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث A'B'C' با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$، متشابه است.

سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث A'B'C' متشابه است؟ $\frac{2}{1}$

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها



اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

۱ــ زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟
خطوط موازی

۲ــ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس تناسب زیر را کامل کنید:

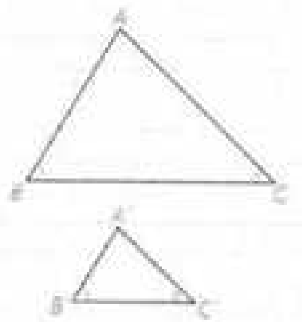
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

۳ــ از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$\hat{AMN} \sim \hat{ABC}$

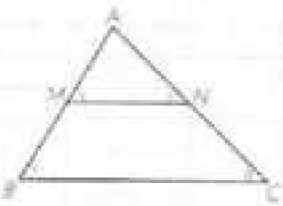
حال با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیهٔ اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها) اثبات کنیم.

راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر A'B' و A'C' جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$(\hat{B}=\hat{B'}, \hat{C}=\hat{C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$



اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

۱ـ $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$ و $\angle B = \angle B'$

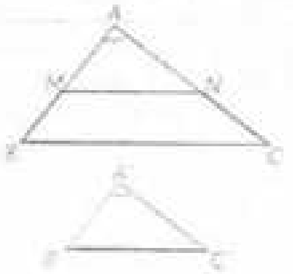
و $\angle C = \angle C'$ بنابراین $\angle A = \angle A'$

۲ـ $\Delta AMN \cong \Delta A'B'C'$ $\overset{\text{ض ز ض}}{\Longleftarrow}$ $\angle A = \angle A'$ و $AN = A'C'$ و $AM = A'B'$

$\Rightarrow MN = B'C'$ و $\angle M = \angle B'$ و $\angle N = \angle C'$

۳ـ $\angle M = \angle B'$ و $\angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$

۴ـ طبق قضیهٔ اساسی تشابه، $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ و در نتیجه: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازهٔ A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

فرض

$\begin{cases} AM = A'B' \\ AN = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A'} \end{cases}$

۱ـ مثلث‌های AMN و A'B'C' به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ عکس تالس $\longrightarrow MN \parallel BC$

۲ـ در فرض مسئله به‌جای A'B' و A'C'، پاره‌خط‌های هم اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا MN∥BC؟

۳ـ با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجهٔ قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

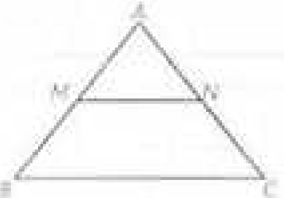
چون $BC \parallel MN$ پس $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ و چون $\overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$

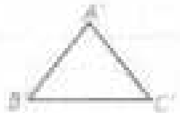
پس $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.

قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$





اثبات: روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازهٔ A'B' و A'C' جدا کنید.

۱ــ در فرض به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا MN ∥ BC؟

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ عکس تالس $MN\parallel BC$

۲ــ از قضیهٔ اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

$\Delta AMN\sim\Delta ABC$

۳ــ تعمیم قضیهٔ تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسهٔ این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

MN = B'C'

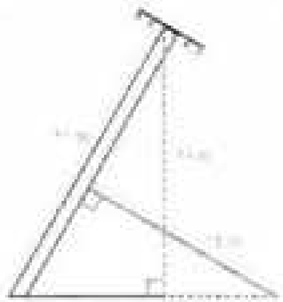
$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{MN}{BC}\rightarrow \boxed{MN=B'C'}$

فرض $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

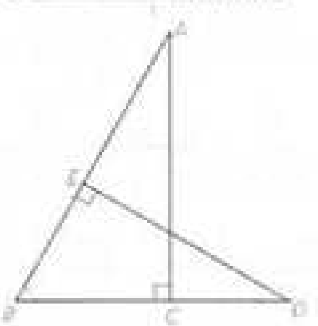
۴ــ مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

$\Delta AMN\cong\Delta A'B'C'$ ضضض $\longrightarrow \Delta A'B'C'\sim\Delta ABC$

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟



حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.



حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$\angle B=\angle B\ ,\ \angle C=\angle E=90^\circ\Rightarrow$

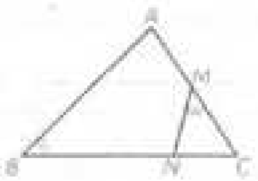
$\Delta ABC\sim\Delta BDE\Rightarrow$

(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow\frac{15}{18}=\frac{BD}{21}\Rightarrow BD=\frac{21\times15}{18}=17/5m$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصلهٔ ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

مثال : در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط AC، زاویهٔ NMC را مساوی زاویهٔ B جدا کرده‌ایم. اگر NC=۲ و NB=۴، طول AC را به دست آورید.



حل : با کمی دقت مشاهده می‌کنید که مثلث‌های MNC و ABC دو زاویهٔ هم‌اندازه دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

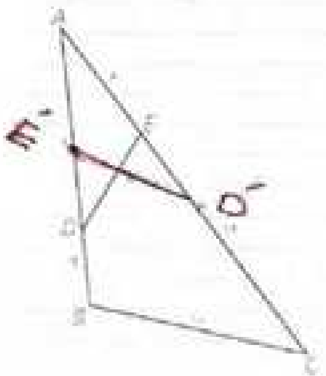
$\angle M=\angle B \ , \ \angle C=\angle C \Rightarrow \Delta MNC \sim \Delta ABC$

از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم :

$$\frac{MC}{BC}=\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AC}$$

و به جای MC ، $\frac{AC}{۲}$ را قرار می‌دهیم :

$$\frac{AC}{۲BC}=\frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^{۲}=۲NC.BC=۲NC(NC+NB) \Rightarrow AC^{۲}=$$
$$۲\times ۲(۲+۴)=۲۴ \Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$



مثال : در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.

حل : به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که : $\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AD}{AC}$ $\frac{9}{18}$ بنابراین : $\frac{AD}{AC}$ $\frac{AE}{AB}$ و با توجه به زاویهٔ مشترک A مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ متشابه‌اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به‌دست آورید.

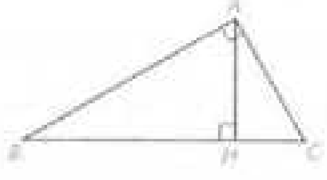
$\frac{9}{18}=\frac{6}{12}=\frac{x}{10}$ — $\boxed{x=5}$

سؤال : در شکل، روی AC ، AD′ را هم اندازهٔ AD و روی AB ، AE′ را هم اندازهٔ AE جدا کنید. چرا DE′ || BC؟

$\frac{AD'}{AC}$ $\frac{AE'}{AB}$ عکس تالس $D'E' \parallel BC$

اثبات قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم‌الزاویه

فعالیت ۱



۱ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویهٔ هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟ $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{A}=۹۰^\circ$

به همین ترتیب دو زاویهٔ هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین $\hat{C}=\hat{C}$ و $\hat{A}=\hat{H}$

می‌توانیم بگوییم :

$\Delta ABH \sim \Delta ABC \ , \ \Delta ACH \sim \Delta ABC$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟ دو مثلث متشابه با یک مثلث خود با هم متشابه‌اند

نتیجه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲ــ نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید :

$$\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^2=BH\times BC$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AH}{AB}\rightarrow \boxed{AC^2=BC\times CH}$$

۳ــ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطهٔ هندسی BC و CH است.

۴ــ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطهٔ هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{AC}\rightarrow \boxed{AH^2=BH\times CH}$$

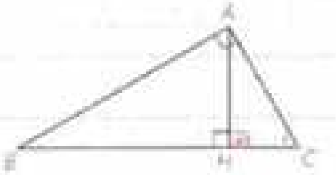
۵ــ از روابط ۲ و ۳ داریم :

(قضیهٔ فیثاغورس)

$$AB^2+AC^2=BC\times BH+BC\times CH=BC(\overset{CH,BH}{\ldots+\ldots})=BC.BC=BC^2$$

نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند.



۱) $AB^2=BC.BH$ ۲) $AC^2=BC.CH$

۳) $AB^2+AC^2=BC^2$ ۴) $AH^2=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$

تمرین

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر y ،x را مشخص کنید :

برابری دو زاویه

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{x}$$

$$x=۷٫۵$$

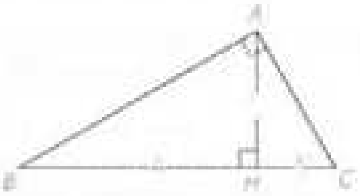
برابری یک زاویه و تناسب اضلاع همان زاویه

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}=\frac{x}{۶٫۶}$$

$$۳x=۶٫۶$$

تناسب ۳ ضلع

۲ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



$AB^2 = 9^2 + 6^2$

$AC^2 = 6^2 + 4^2$

۱) BH=۹ ، CH=۴ ، AH=? ، AB=? ، AC=?

۲) AB=۱۰ ، BC=۱۲ ، AC=? ، AH=? $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

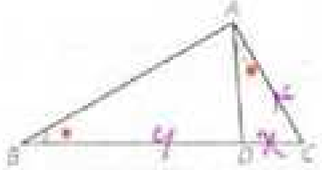
۳) AB=۸ ، AC=۶ ، BH=? ، CH=? $BC=10$

۴) AB=۸ ، AH=۴ ، BC=? ، AC=?

$64-16=48$

$BH=4\sqrt{3}$

$16=4\sqrt{3}\times CH$



۳ــ در شکل روبه‌رو $\angle A_1 = \angle B$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به‌دست آورید.

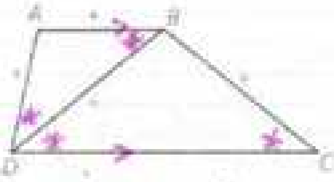
$\triangle ADC \sim \triangle ABC \quad \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot BC$

$16 = x(6+x)$

$16 = 6x + x^2 \rightarrow (x+8)(x-2)=0$

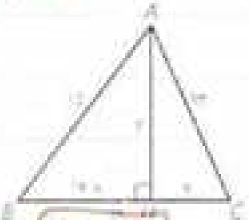
$x=2$

$BC=8$



۴ــ در شکل روبه‌رو ABCD ذوزنقه است. طول قاعدهٔ CD را به‌دست آورید.

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{DC} \rightarrow \dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{x} \Rightarrow x=9$



۵ــ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

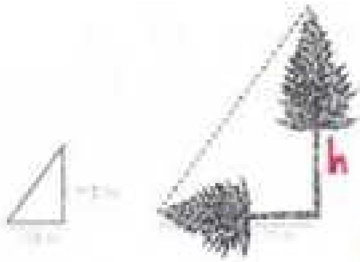
$225 = (14-x)^2 + y^2$

$169 = x^2 + y^2 \rightarrow 225-(14-x)^2 = 169 - x^2$

$225 - 196 - x^2 + 28x = 169 - x^2$

$28x = 140 \rightarrow x = 5$

۶ــ در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



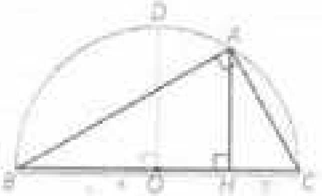
الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایهٔ چوب در آن زمان ۱/۵ متر بود. هم‌زمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟

$\dfrac{h}{2/5} = \dfrac{12}{1/5} \longrightarrow h=20$

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطهٔ O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص

$\dfrac{h}{1/6} = \dfrac{20}{2/5} \longrightarrow h=12/8$

آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با دانستن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به‌دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصلهٔ آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۷ـ در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.

زاویه محاطی مقابل قطر برابر 90° است

الف) چرا زاویهٔ A قائمه است؟

ب) برای نقطهٔ A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است، اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$OD \boxed{>} AH$

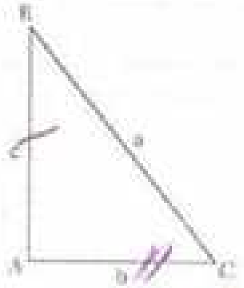
پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را برحسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$AH^2 = x \cdot y \to AH = \sqrt{xy}$

$OD = \frac{x+y}{2}$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

بله مطابق اثبات بالا



۸ـ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه $\hat{A} = 90^\circ$

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

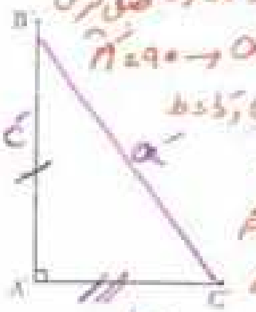
۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A'} = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$

ض ض ض

۴) توضیح دهید چرا $ABC \cong A'B'C'$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.



قائم‌الزاویه → $a^2 = b^2 + c^2$

$\hat{A} = 90 \to a^2 = b^2 + c^2$

چون $b = b'$ و $c = c'$

پس $a' = a$

$ABC \cong A'B'C'$

پس $\hat{A} = \hat{A'} = 90$

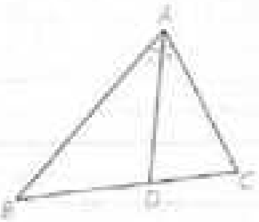
ج) قضیهٔ فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

اگر زاویه A از مثلث ABC برابر ۹۰ باشد آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$

و برعکس.

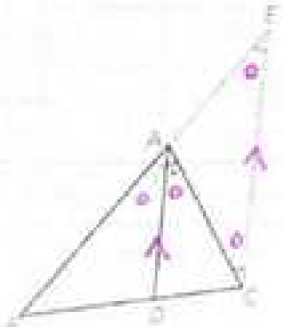
کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$ حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات: مطابق شکل، از نقطهٔ C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

$AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AC}$

الف) چرا $\angle A_1 = \angle E$ و چرا $\angle A_2 = \angle C$ ؟

$\hat{E} = \hat{C}$

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

ج) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث، به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد.

مثال: در مثلث ABC ، AB=۷ ، AC=۵ و BC=۸ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{۸ \times ۵}{۱۵} = \frac{۸}{۳} \text{ ، } AD = AC - CD = ۵ - \frac{۸}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

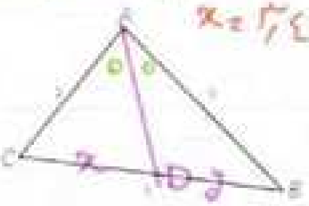
$$\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{7} \longrightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{12}{7} \longrightarrow \frac{8}{y}=\frac{12}{7} \longrightarrow y=\frac{56}{12}=4/6$$

$x=3/4$

کار در کلاس

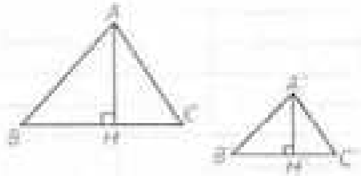
در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به‌دست آورید.



۲ـ نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

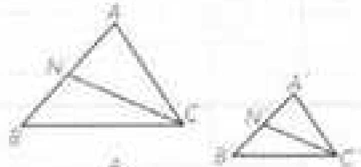
> **قضیه:** هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد ($\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$) آنگاه:



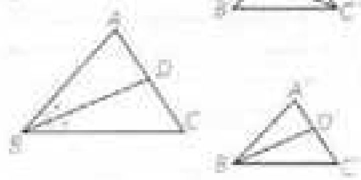
الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{A'H'}{AH}=k$$



ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{C'N'}{CN}=k$$



ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است:

$$\frac{B'D'}{BD}=k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم:

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k$$

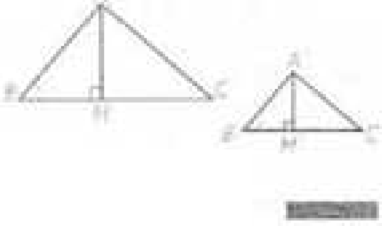
و در مورد مساحت‌ها داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2$$

اثبات: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

الف) ارتفاع‌ها

فرض	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH}=k$



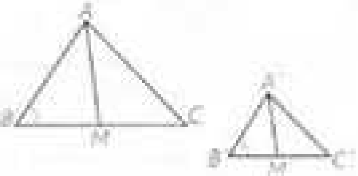
$\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{H}=\hat{H'}$

زیرا $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

چرا $\angle B=\angle B'$ بنابراین: $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه‌گیری کنید.

$\frac{A'B'}{AB}=K \longrightarrow \frac{A'H'}{AH}=K$

ب) میانه‌ها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM}=k$

زیرا $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

چرا $\angle B=\angle B'$ ؟

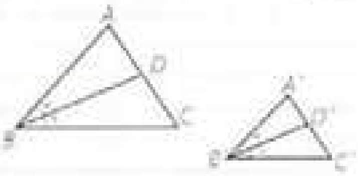
$$\frac{B'M'}{BM}=\frac{\frac{1}{2}B'C'}{\frac{1}{2}BC}=\frac{\dots}{\dots}=k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}$$

برابری یک زاویه و تناسب اضلاع دو زاویه

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

$\frac{A'B'}{AB}=K \longrightarrow \frac{A'M'}{AM}=K$

ج) نیمسازها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD}=k$

زیرا $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$\hat{B}=\hat{B'} \longrightarrow \frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{B'}}{2}$

چرا $\angle A=\angle A'$، چرا $\angle B_2=\angle B'_2$؟

بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

برابری دو زاویه

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'D'}{BD}=K$

د) محیط‌ها

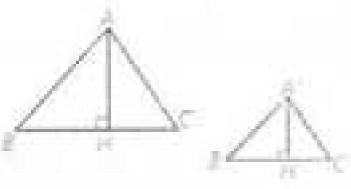
به سادگی و به کمک ویژگی تناسب‌ها می‌توان نوشت:

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=k$$

هـ) مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:



$$\frac{A'H'}{AH}=\frac{B'C'}{BC}=k \qquad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{A'H'}{AH}\times\frac{B'C'}{BC}=k.k=k^2$$

کار در کلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱ـ اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = K$

۲ـ قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'}$ و $\hat{D} = \hat{D'}$ $\quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ و $\hat{B} = \hat{B'}$ $\quad K$

۳ـ جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = K^2 , \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = K^2$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

> **هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.**

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

> **هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.**

کار در کلاس

۱ـ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

$\frac{S}{S'} = K^۲ \longrightarrow \frac{S}{S'} = \frac{۱۰}{۱۸} \longrightarrow \frac{S}{۱۵} = \frac{۱۰}{۱۸}$

$\frac{P}{P'} = K$

$S = \frac{۵۰}{۶} = \frac{۲۵}{۳}$

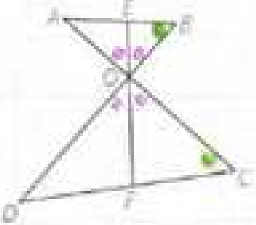
$\frac{٤}{٩} = \frac{١٢}{x} \rightarrow x = ٢٧$

$\frac{٤}{٩} = \frac{x}{١٢} \rightarrow x = ٥٣$

۲ـ نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳ـ اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت‌ضلعی چند برابر می‌شود؟ ۴۹ برابر

فعالیت



در شکل روبه‌رو $EF=10cm$ نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل به رأس

$\hat{B} = \hat{C}$

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{۲}{۳}$، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟ $\frac{۲}{۳}$

ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

$\frac{OE}{OF} = \frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{OE+OF}{OF} = \frac{۵}{۳} \rightarrow \frac{۱۰}{OF} = \frac{۵}{۳} \rightarrow OF = ۶ , OE = ۴$

تمرین

$\frac{۱۵}{۱۰} = \frac{P}{P'}$

$\frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳۷}{P'} \rightarrow P' = \frac{۱۰ \times ۳۷}{۱۵} = \frac{۷۴}{۳}$

۱ـ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

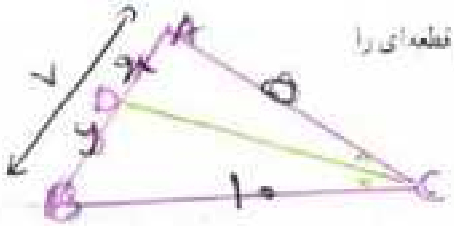
۲ـ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.

$S' = 8S \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = ۹$

$\frac{AB}{AM} = ۳$

$\frac{x+y}{x} = ۳ \rightarrow \frac{x+y-x}{x} = \frac{۳-۱}{۱}$

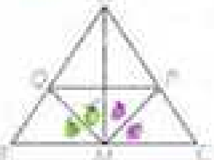
$\frac{y}{x} = \frac{۲}{۱}$



۳ـ در مثلث ABC ،$AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

$\frac{x}{y} = \frac{۵}{۱۰} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{۱۵}{۱۰} \rightarrow \frac{۷}{y} = \frac{۱۵}{۱۰}$

$y = ۴/۶۶ , x = ۲/۳۴$



۴ـ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:

$PQ \parallel BC$

$\triangle AMC \xrightarrow{\text{نیمساز } PM} \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC}$

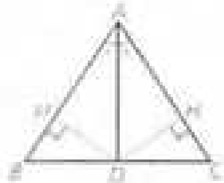
$\triangle AMB \xrightarrow{\text{نیمساز } MQ} \frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB}$

چون $MC = MB$

پس

در نتیجه $\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$ $PQ \parallel BC$

۵ــ در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویهٔ A است و عمودهای DH و 'DH نیز رسم شده‌اند.



الف) با توجه به نتیجهٔ (۴) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$$

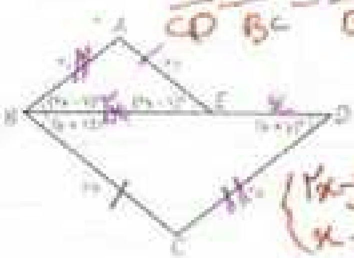
ب) چرا 'DH=DH؟ با توجه به این موضوع و نتیجهٔ (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیهٔ نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۶ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.

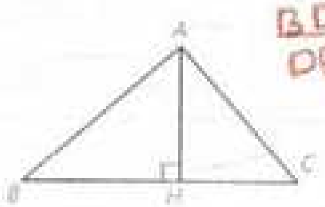


$3x-1 = y+10 \qquad 2x-7 = x+y$

$$\begin{cases} 2x-y=12 \\ x-y=7 \end{cases}$$

$x=5 \quad y=-2$

۷ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع:



الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 , \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

$$\frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2} = 1 \rightarrow BC^2 = AB^2+AC^2$$

۸ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)

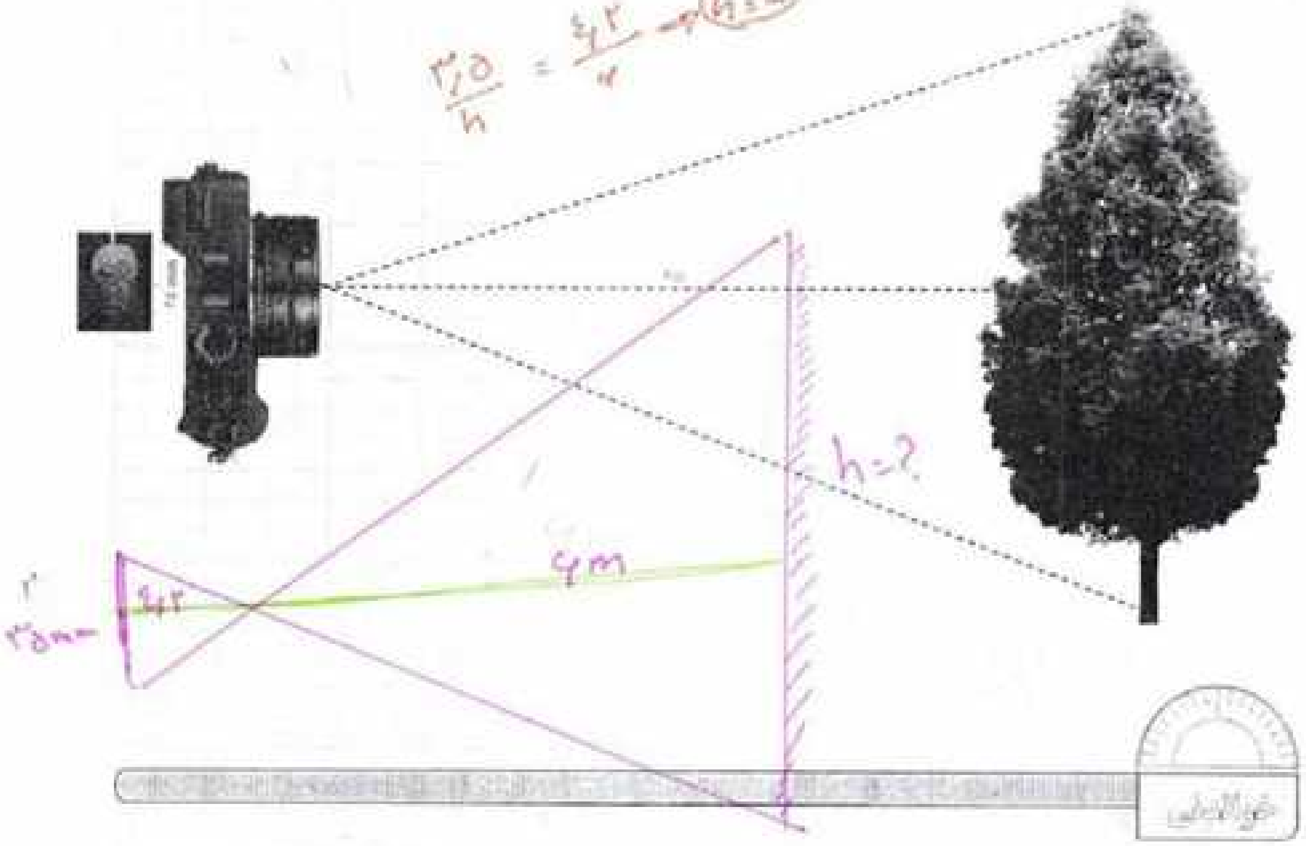
$$\frac{20}{80} = \frac{4.4}{x} \rightarrow x = 17.6$$

$$h = (17.6-3.2) + 1.6$$

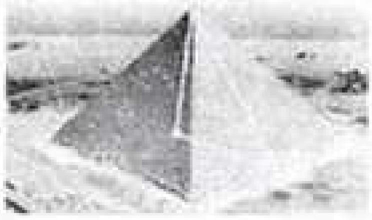
$h = 16m$

۹ــ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقهٔ فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی[۱] ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصلهٔ آن درون دوربین تا عدسی[۲]، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازهٔ واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

$\frac{3/5}{h} = \frac{4/2}{6} \rightarrow h = 5$



خواندنی



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سومی باشد؛ به عبارتی اعداد b ، a و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.

۱ــ واژهٔ «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژهٔ «نگاتیو» به کار رفته است.

۲ــ واژهٔ «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژهٔ «لنز» به کار رفته است.

اثبات ویژگی‌های تناسب

۱ طرفین ـ وسطین کردن: طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید:

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \Rightarrow ad=bc$$

۲ ویژگی‌های (۲) و (۳) با طرفین ـ وسطین کردن، به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc \Rightarrow da=cb \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc \Rightarrow bc=ad \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۳ ویژگی‌های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می‌شوند:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow \frac{b}{a}+۱=\frac{d}{c}+۱\Rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

ویژگی‌های تفضیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk\ ,\ c=dk\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

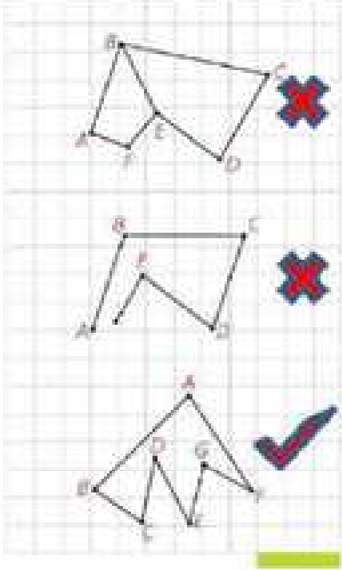
به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.

فصل ۳ : چند ضلعی ها

درس اول : چهار ضلعی ها

صفحه ۵۴

تعریف: چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره‌خط متوالی که:
۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.
۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.



هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلع چندضلعی است.

هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطهٔ مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویهٔ چندضلعی را که هر دو در یک ضلع چندضلعی مشترک‌اند، دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)

هر گاه تعداد ضلع‌های چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌نامند.

کدام یک از شکل‌های مقابل چندضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تاست؟ ۷ ضلع و ۷ رأس

برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.

مجاور : $AB,BC - BC,CD - CD,DE - ...$ غیر مجاور : $AB,CD - AB,DE - BC,EF - ...$

صفحه ۵۵

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟ دو قطر

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را درنظر می‌گیریم. از رأس A_1، ...$n-3$... قطر می‌توان رسم کرد.

با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-3)$ است؟ خیر

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟ $4(4-3) = 4$

کافی است آن را بر ۲ تقسیم کنیم

آیا جواب به‌دست آمده درست است؟ خیر

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

زیرا هر راس دو بار شمرده شده است.

در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{...}$ است. $\frac{n(n-3)}{2}$

کاردرکلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای nضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر ....$n-1$.... پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با ....$\frac{n(n-1)}{2}$.... پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

با هم برابرند ، به عبارت دیگر $\frac{n(n-1)}{2}=n+\frac{n(n-3)}{2}$

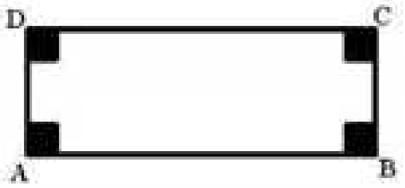
کار در کلاس صفحه ۵۶

کاردرکلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

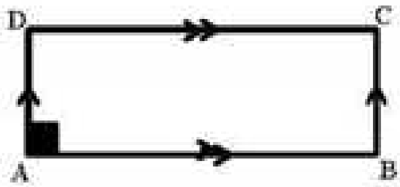
ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟



الف: فرض : $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$

حکم: $AB \parallel CD \quad , \quad AD \parallel BC$

برهان: $\left.\begin{matrix} AB\perp AD \\ CD\perp AD\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel CD \quad , \quad \left.\begin{matrix} AD\perp AB \\ BC\perp AB\end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \parallel BC$



ب : فرض: $\angle A=90^\circ \ , AD \parallel BC \ , AB \parallel CD$

حکم: $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$

برهان :

$\boxed{1}$ مورب $AB\ , AD \parallel BC \Rightarrow \angle A=\angle B=90^\circ$

$\boxed{2}$ مورب $AD\ , AB \parallel CD \Rightarrow \angle A=\angle D=90^\circ$

$\boxed{1},\boxed{2} \Rightarrow \angle A=\angle B=\angle D=90^\circ \Rightarrow \angle C=90^\circ$

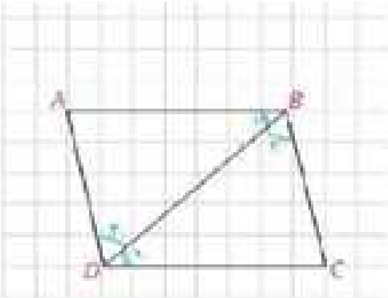
ب) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.
در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت ...ض ز ض... هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ ...$\angle A_1$...... و ...$\angle C_1$... هم‌اندازه‌اند.
در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.
بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.
ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

پاسخ (ت) : بنا به تعریف مربع ، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی الاضلاع است.

فعالیت ۱ صفحه ۵۶

فعالیت ۱

متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
دو مثلث ABD و CDB به حالت .... هم‌نهشت‌اند.
در نتیجه، .... = AD و .... = AB.

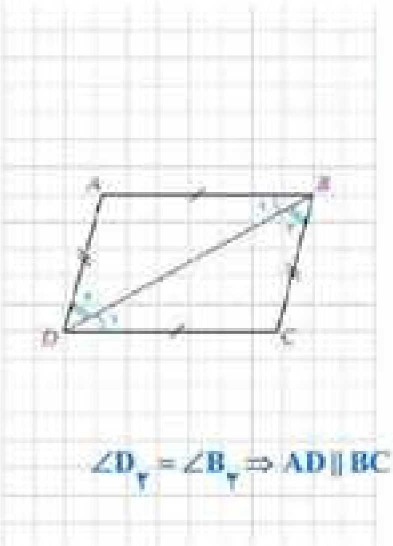


پاسخ :

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } BD, AD \parallel BC \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2 \\ \text{مورب } BD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \\ BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \left| \begin{array}{l} AD = BC \\ AB = CD \end{array}\right.$$

عکس قضیهٔ ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت ...ز ض ز... $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ ......$\angle D_1$...... است.
بنابراین ضلع AB موازی ضلع ...CD... است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟ قضیه ی خطوط موازی و مورب

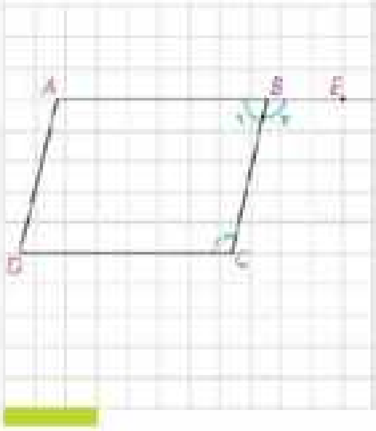


موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟ $\angle D_2 = \angle B_2 \Rightarrow AD \parallel BC$
بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مکمل اند

زیرا $AB \parallel CD$ و BC مورب است.

فعالیت ۲



چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

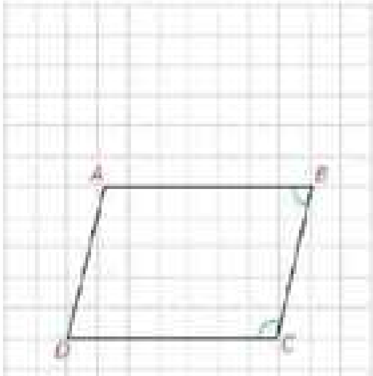
با توجه به شکل، $\angle B_2 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_1$ و $\angle C$ ......مکمل...... می‌باشند.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیهٔ ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

صفحه ۵۸

عکس قضیهٔ ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.



در چهارضلعی $ABCD$، دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل‌اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع ......CD...... است.

به همین ترتیب دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle A$ نیز مکمل‌اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع ......BC...... است؛ بنابراین چهارضلعی $ABCD$ ......متوازی الاضلاع...... است.

قضیهٔ ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه‌اند.

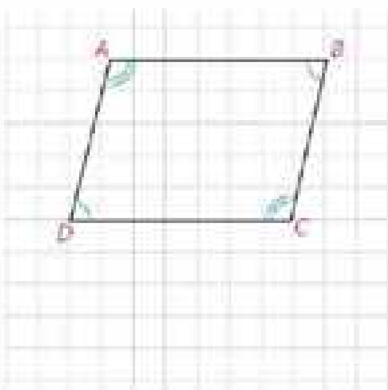
با توجه به قضیهٔ قبل آن را ثابت کنید.

می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle B + \angle C = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle B + \angle C \Rightarrow \angle A = \angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle A + \angle D = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle A + \angle D \Rightarrow \angle B = \angle D$$

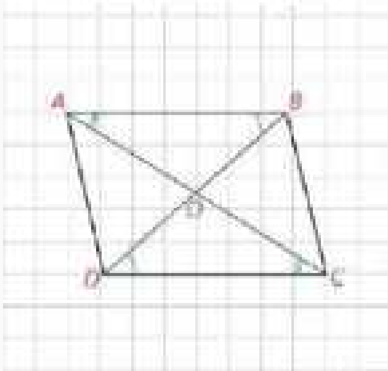
عکس قضیهٔ ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض کنیم در چهارضلعی $ABCD$ هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب 360° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویهٔ مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=۳۶۰^\circ \xrightarrow[\angle B=\angle D]{\angle A=\angle C} ۲\angle A+۲\angle B=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \angle A+\angle B=۱۸۰^\circ \quad \boxed{۱}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle C\\ \angle B+\angle D\end{array}\right\} \xrightarrow{\boxed{۱}} \angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle A+\angle D=۱۸۰^\circ \Rightarrow AB \parallel CD\,,AD \parallel BC$$



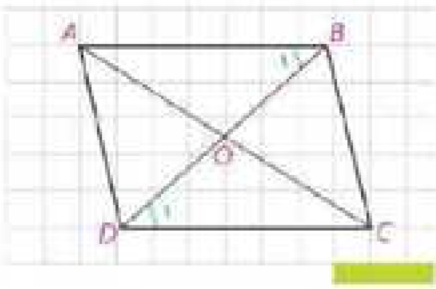
فعالیت ۳

در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$. چرا؟

بنابراین، $OA = OC$ و $OB = OD$. در نتیجه؛

قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

$$\left.\begin{array}{ll}\text{موورب} & AC\ ,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_1=\angle C_1\\ (\text{بنا به قضیه ۱}) & AB=CD\\ \text{موورب} & BD\ ,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_1=\angle D_1\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta OAB = \Delta OCD$$



فعالیت ۴

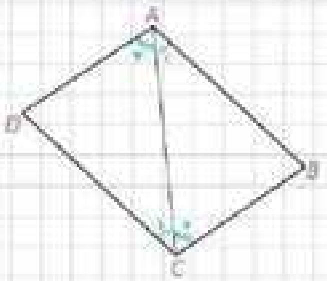
فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

$$\left.\begin{array}{ll} & OA=OC\\ \text{متقابل به رأس} & \hat{O}_1=\hat{O}_2\\ & OB=OC\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta OAB \cong \Delta OCD \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$$

به روش مشابه ثابت می شود: $\Delta OAD \cong \Delta OBC \Rightarrow \hat{B}_2=\hat{D}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

فعالیت ۵

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.



اندازهٔ $\angle A_1$ با اندازهٔ ...$\angle C_2$... برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهشتی ..ض ز ض..، $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

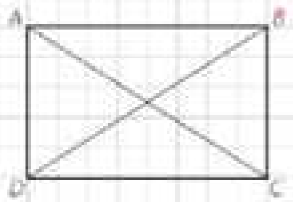
در نتیجه اندازهٔ $\angle A_2$ برابر اندازهٔ زاویهٔ ...$\angle C_1$... است که از آن نتیجه می‌گیرد ضلع AD موازی ضلع ...BC... است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. یعنی؛

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟ خیر

زاویه قائمه



در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت AC=BD؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها ...مساوی‌اند.

$$\left.\begin{array}{c} AD = BC \\ \angle C = \angle D = 90^\circ \\ CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow AC = BD$$

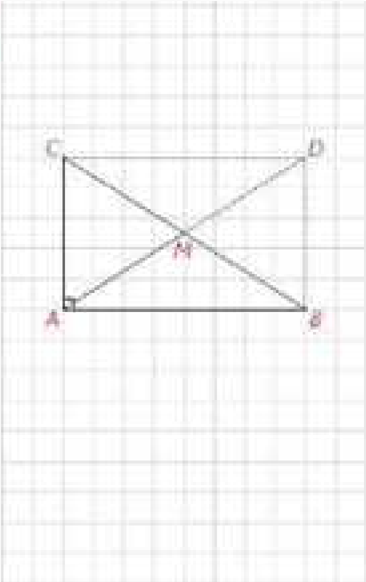
اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ خیر (توضیح : در ذوزنقه متساوی الساقین نیز قطرها مساوی اند)

اگر این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AC = BD \\ CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow \angle C = \angle D$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند . پس : $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$

فعالیت ۶



ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانهٔ وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.

روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که AM = MD .

چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟ زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی الاضلاعی که زاویه قائمه دارد ، مستطیل است

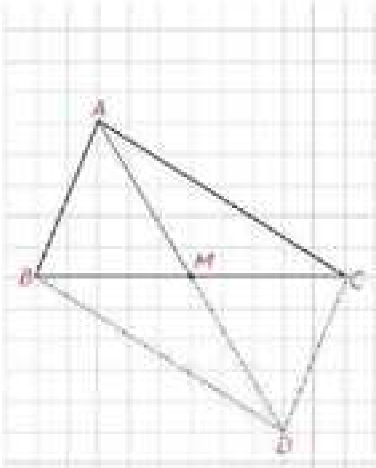
در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

قطرهای هر مستطیل باهم مساوی اند.

اندازهٔ AM چه رابطه‌ای با اندازهٔ BC دارد؟ آن را بیان کنید.

$$AM = \frac{BC}{۲}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر ......نصف...... اندازهٔ وتر است.

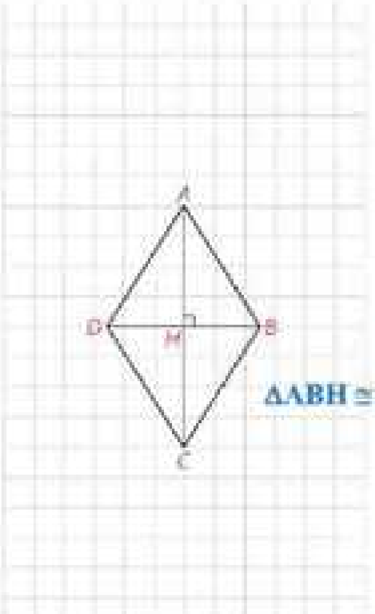


اگر در مثلثی اندازهٔ میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف اندازهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$. روی نیم‌خط AM نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که MD = AM.

آیا می‌توانید نتیجه بگیرید AD = BC و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ بله
چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟
بنا به قضایای قبل هر چهار ضلعی که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند مستطیل است لذا تمام زاویه های داخلی آن قائمه اند.

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

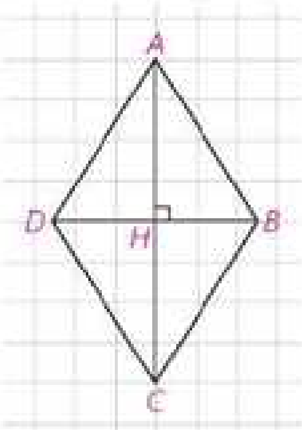


آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟ بله ، هر چهار ضلع لوزی با هم برابرند.

قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین
نقطهٔ تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH چه پاره‌خطی است؟ میانه
چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟ زیرا $\triangle ABH \cong \triangle ADH$
بنابراین؛

در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند و قطرها روی نیمساز های زاویه‌ها می‌باشند.

کار در کلاس صفحه ۶۱



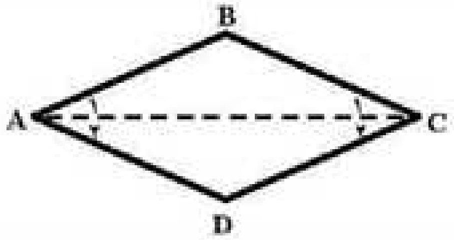
۱ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

فرض : $AB \parallel CD, AD \parallel BC, AC \perp BD$

حکم : $AB = BC = CD = DA$

برهان : قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند و از طرف دیگر $AC \perp BD$ پس در ΔABD ، AH عمود منصف ضلع BD است . لذا مثلث متساوی الساقین می باشد . به طریق مشابه در ΔABC نیز BH عمود منصف ضلع AC می باشد بنا براین می توان نتیجه گرفت که $AB = BC = CD = DA$ پس چهار ضلعی $ABCD$ لوزی است.

۲ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد، لوزی است.



فرض : $AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle A_۱ = \angle A_۲$

حکم : $AB = BC = CD = DA$

برهان : در دو مثلث ABC, ACD داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_۱ = \angle A_۲\\ \angle B = \angle D\end{array}\right\} \longrightarrow \angle C_۱ = \angle C_۲ \quad \boxed{۱}$$

$$\left.\begin{array}{r}\angle A_۱ = \angle A_۲\\ \boxed{۱} \Rightarrow \angle C_۱ = \angle C_۲\\ AC = AC\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \left|\begin{array}{l}AB = AD\\ BC = CD\end{array}\right.$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع ، اضلاع موازی مساوی اند پس : $AB = BC = CD = DA$

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

۱-مستطیلی که دو ضلع مجاورش مساوی باشند مربع است. ۲- مستطیلی قطرهایش بر هم عمودند مربع است . ۳- مستطیلی قطرهایش نیمساز زاویه های داخلی باشند مربع است.

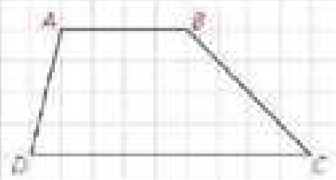
۱- هر لوزی که یکی از زاویه های آن قائمه باشد مربع است. ۲- هر لوزی که قطرهای مساوی دارد مربع است.

در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟

اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز باهم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

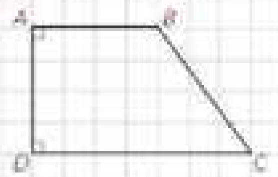
جک به طور کامل بسته نمی شود . زیرا مجموع طول های دو ضلع بالایی با مجموع طول های دو ضلع پایینی مساوی نیست.

صفحه ۶۲



هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ دو زاویه مجاور به یک ساق ، مکمل اند.

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ ......مکمل...... هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ ......مکمل...... هستند.

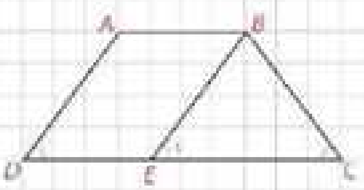


اگر در یک ذوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعدهٔ دیگر نیز عمود است؛ چرا؟ زیرا دو زاویه مجاور به یک ساق ، مکمل اند.

در این صورت ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

فعالیت ۷



ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را که در آن $AD = BC$ است، درنظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED ......متوازی الاضلاع...... است.

چرا دو زاویهٔ $\angle D$ و $\angle E_1$ هم اندازه‌اند؟

$DC , AD \parallel BE \Rightarrow \angle D = \angle E_1$ مورب

$BC = BE$ چرا؟

زیرا اگر دو زاویه از مثلثی با هم برابر باشند ، اضلاع روبرو به آنها نیز با هم برابرند

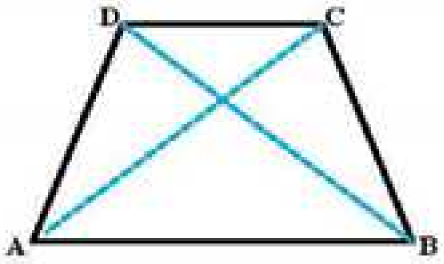
بنابراین اندازهٔ $\angle E_1$ برابر اندازهٔ ......$\angle C$...... است.

اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین:

در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

به کمک ویژگی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.   صفحه ۶۲

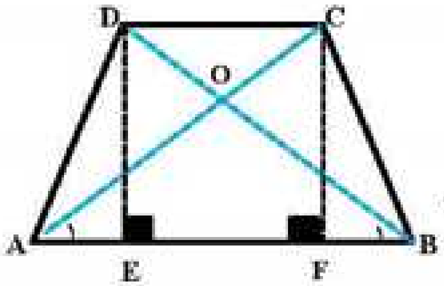
در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و بر عکس.



فرض: $AB \parallel CD \ , \ AD = BC$ حکم: $AC = BD$

برهان: در دو مثلث ABD , ABC داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AD=BC \\ \angle A=\angle B \\ AB=AB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ABC \cong \Delta ABD \Rightarrow AC=BD$$



برعکس

فرض: $AB \parallel CD \ , \ AC = BD$ حکم: $AD = BC$

برهان: عمودهای DE, CF را بر AB وارد می کنیم چهار ضلعی $CDEF$ مستطیل است. پس $DE = CF$

$$\left.\begin{array}{l} \angle E=\angle F=90^\circ \\ AC=BD \\ CF=DE \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta ACF \cong \Delta BDE \Rightarrow \angle A_1=\angle B_1 \Rightarrow OA=OB$$

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ AC=BD \end{array}\right\} \Rightarrow OC=OD$$

پس دو مثلث OAD, OBC بنا به حالت (ض ز ض) همنهشت اند. در نتیجه $AD = BC$

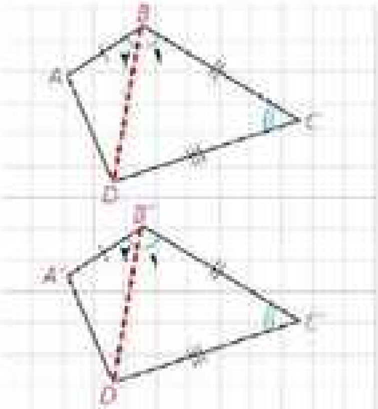
تمرین صفحه ۶۳

تمرین

۱ـ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

پاسخ :

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n \Rightarrow \cancel{n}(n-۳)=۲\cancel{n} \Rightarrow n-۳=۲ \Rightarrow n=۵$$



الف) ۲ــ در دو چهارضلعی مقابل $AB=A'B'$ و $\angle B=\angle B'$ و $BC=B'C'$ و $\angle C=\angle C'$ و $CD=C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ب) اگر $\angle B=\angle B'$ و $BC=B'C'$ و $\angle C=\angle C'$ و $CD=C'D'$ و $\angle D=\angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

پاسخ قسمت الف :

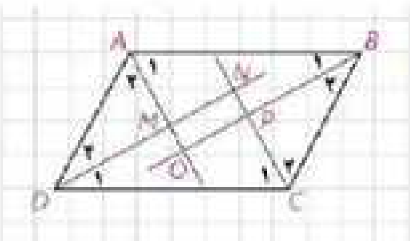
قطرهای BD , $B'D'$ را در دو چهارضلعی رسم می کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD , $B'C'D'$ همنهشت اند

پس : $\angle B_۱=\angle B'_۱ \xrightarrow{\angle B=\angle B'} \angle B_۲=\angle B'_۲$

در دو مثلث ABD , $A'B'D'$:

$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ \angle B_۲=\angle B'_۲ \\ BD=B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \xrightarrow{\Delta BCD\cong\Delta B'C'D'} \square ABCD \cong \square A'B'C'D'$$

پاسخ قسمت ب : دراین حالت کافی است قطرهای AC , $A'C'$ را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.



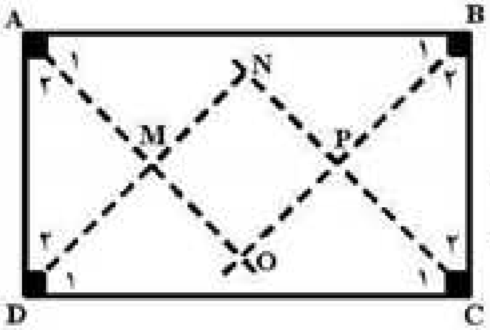
۳ــ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی $MNPQ$ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر $ABCD$ مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی $MNPQ$ مربع است.

$$\square ABCD\,;\angle A+\angle B=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\angle A}{۲}+\frac{\angle B}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow \Delta OAB;\angle A_۱+\angle B_۱=۹۰^\circ \Rightarrow \angle O=۹۰^\circ \quad \boxed{۱}$$

به روش مشابه ثابت می شود :

$\Delta OAB; \angle C_{۱} + \angle D_{۱} = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle N = ۹۰^\circ$ $\boxed{۲}$, $\Delta PBC; \angle B_{۲} + \angle C_{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle P = ۹۰^\circ$ $\boxed{۳}$

$\boxed{۱}, \boxed{۲}, \boxed{۳} \Rightarrow \angle M = \angle N = \angle P = \angle O = ۹۰^\circ \Rightarrow$ چهارضلعی MNPO مستطیل است



اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد:

$\Delta CDN ; \angle C_{۱} = \angle D_{۱} = ۴۵^\circ \Rightarrow CN = DN$ $\boxed{۱}$

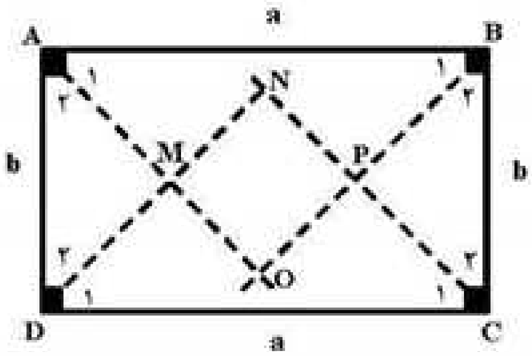
$$\left.\begin{array}{r} \angle A_{۲} = \angle B_{۲} = ۴۵^\circ \\ AD = BC \\ \angle D_{۲} = \angle C_{۲} = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow \Delta BCP \cong \Delta ADM \Rightarrow PC = DM \quad \boxed{۲}$$

$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow CN - PC = DN - DM \Rightarrow PN = MN$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند. به عبارت دیگر MNPO□ مربع است.

صفحه ۶۴

۴ـ در مسئلهٔ قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازهٔ ضلع مربع را برحسب a و b محاسبه کنید.



$\Delta DCN; \angle N = ۹۰^\circ \Rightarrow CN^{۲} + BN^{۲} = CD^{۲}$

$\xrightarrow{CN = DN} ۲CN^{۲} = a^{۲} \Rightarrow CN = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ $\boxed{۱}$

$\Delta BCP; \angle P = ۹۰^\circ \Rightarrow PC^{۲} + PB^{۲} = BC^{۲}$

$\xrightarrow{CN = DN} ۲CP^{۲} = b^{۲} \Rightarrow CP = \frac{b}{\sqrt{۲}} = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$ $\boxed{۲}$

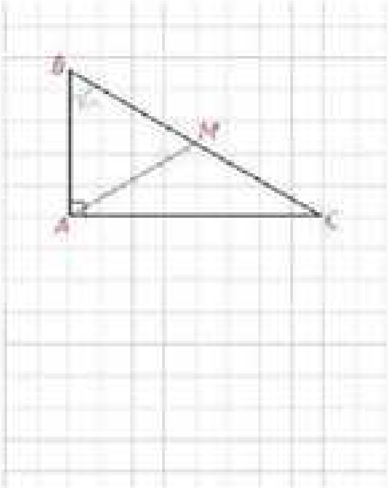
$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow CN - CP = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} - \frac{b\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow PN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - b)$

۵ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB=\frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{}}{}$ اندازهٔ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.



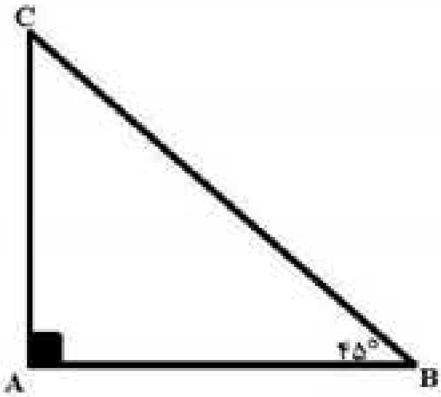
پاسخ : در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس :

$$\triangle ABC; \angle A=۹۰^\circ, \angle C=۳۰^\circ \Rightarrow \angle B=۶۰^\circ$$

$$\triangle ABM; AM=BM \Rightarrow \angle A_۱=\angle B=۶۰^\circ \Rightarrow AM=BM=AB \Rightarrow AB=\frac{BC}{۲}$$

$$\triangle ABC; \angle A=۹۰^\circ \Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲ \xrightarrow{AB=\frac{BC}{۲}} AC^۲=BC^۲-\left(\frac{BC}{۲}\right)^۲$$

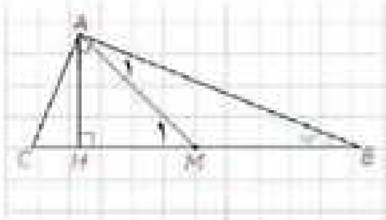
$$\Rightarrow AC^۲=\frac{۳BC^۲}{۴} \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$$



$$\triangle ABC; \angle A=۹۰^\circ, \angle B=۴۵^\circ \Rightarrow \angle B=\angle C \Rightarrow \begin{cases} AB=AC \\ AB^۲+AC^۲=BC^۲ \end{cases}$$

$$۲AB^۲=BC^۲ \Rightarrow AB^۲=\frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow AB=\frac{BC}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC$$

۶ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است.



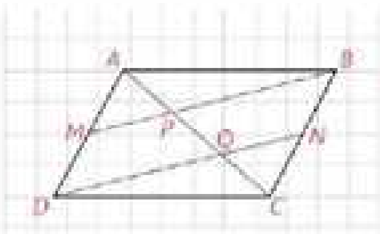
در مثلث قائم الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:

$$\Delta ABC ; AM = MB = \frac{BC}{۲} \Rightarrow \angle A_{۱} = \angle B = ۱۵^\circ \Rightarrow \angle M_{۱} = \angle A_{۱} + \angle B = ۳۰^\circ$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه ی ۳۰ درجه نصف وتر است

$$\Delta AMH ; \angle H = ۹۰^\circ , \angle M_{۱} = ۳۰^\circ \Rightarrow AH = \frac{AM}{۲} \Rightarrow AH = \frac{\frac{AM}{۲}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{AM}{۴}$$

۷ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



پاسخ : اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.در چهار ضلعی BMDN داریم :

$$\left.\begin{array}{r} AD = BC \xrightarrow{\div ۲} BN = MD \\ BN \parallel MD \end{array}\right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$\Delta ADQ ; MP \parallel DQ \Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ$$

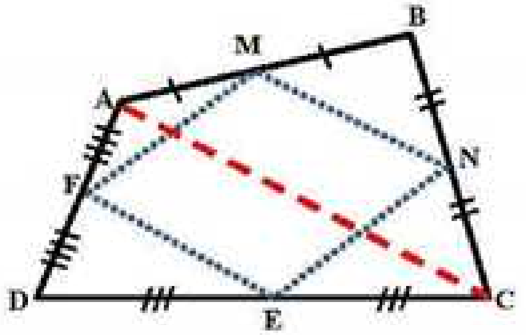
$$\Delta BCP ; BP \parallel QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP} = \frac{CN}{NB} = ۱ \Rightarrow CQ = PQ$$

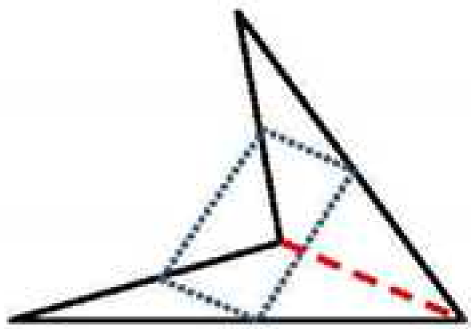
$$\Rightarrow AP = PQ = QC$$

۸ــ ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟





برهان : فرض کنیم نقاط F,E,N,M به ترتیب وسطهای اضلاع AD,CD,BC,AB از چهار ضلعی ABCD باشند باید ثابت کنیم چهار ضلعی MNEF متوازی الاضلاع است . قطر AC را رسم می کنیم :

$$\Delta ABC;\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel AC,MN=\frac{AC}{۲}\quad\boxed{۱}$$

$$\Delta ACD;\frac{DE}{DC}=\frac{DF}{DA}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}EF\parallel AC,EF=\frac{AC}{۲}\quad\boxed{۲}$$

$$\boxed{۱},\boxed{۲}\Rightarrow MN\parallel EF\ ,\ MN=EF$$

به عبارت دیگر در چهار ضلعی MNEF دو ضلع موازی و مساوی اند لذا چهار ضلعی MNEF متوازی الاضلاع است.

اگر قطرهای چهار ضلعی ABCD بر هم عمود باشند .چهار ضلعی MNEF مستطیل است .زیرا قطرهای چهار ضلعی ABCD چهار ضلعی MNEF موازی اند.

اگر قطرهای چهار ضلعی ABCD با هم مساوی باشند .چهار ضلعی MNEF لوزی است . و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهار ضلعی ABCD است.

$$MN=EF=\frac{AC}{۲}\ ,\ FM=EN=\frac{BD}{۲}\Rightarrow MN+NE+EF+FM=۲\left(\frac{AC}{۲}+\frac{BD}{۲}\right)=AC+BD$$

سوال های تکمیلی :

۱- یک n ضلعی ۹۰ قطر دارد . مجموع زاویه های داخلی آن را حساب کنید.

۲- اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی ۳ ضلع اضافه شود ۳۶ قطر به قطرهای آن اضافه می شود . مجموع زاویه های داخلی n ضلعی را حساب کنید.

۳- مجموع زاویه های خارجی n ضلعی محدب را حساب کنید.

۴- ثابت کنید یک چند ضلعی محدب نمی تواند بیش از سه زاویه حاده داشته باشد.

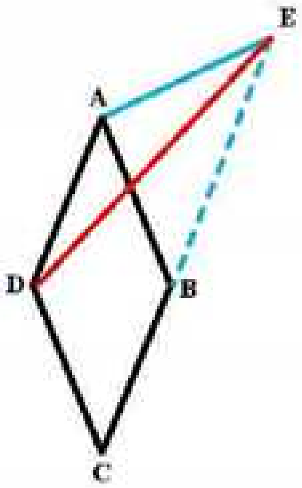
۵- در شش ضلعی محدب ABCDEF زاویه های روبرو دو به دو متساوی اند ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) . ثابت کنید اضلاع روبرو دو به دو با هم موازی اند.

۶- نشان دهید در هر چهار ضلعی محدب ، زاویه ی حاده بین نیمسازهای دو زاویه مقابل ، مساوی نصف تفاضل دو زاویه ی دیگر است.

۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع هر خطی (به جز قطر های متوازی الاضلاع) که از مرکز می گذرد . آن را به دو ذو زنقه همنهشت تقسیم می کند.

۸- ثابت کنید در هرذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مقابل مکمل اند و برعکس.

۹- روی امتداد ضلع BC از لوزی ABCD نقطه E را چنان اختیار می کنیم که $AE = CD$ نشان دهید DE نیمساز زاویه $\angle AEB$ است.



۱۰- در مربع ABCD از رأس A خط دلخواهی رسم می کنیم تا ضلع CD را در نقطه E قطع کند. اگر F نقطه ی برخورد نیمساز زاویه ی $\angle BAE$ با ضلع BC باشد . ثابت کنید: $BF + DE = AE$

۱۱- نشان دهید برای آنکه چهار نیمساز زاویه های داخلی یک ذوزنقه از یک نقطه بگذرند کافی است که مجموع طول های قاعده ها ، مساوی مجموع طول ساق ها باشند.

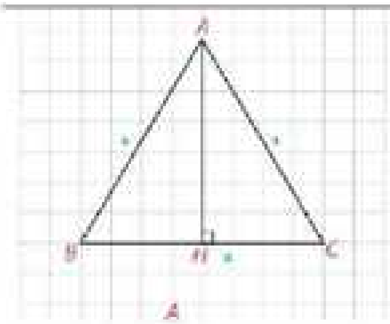
۱۲- از متوازی الاضلاعی طول دو قطر و یک ضلع معلوم است . این متوازی الاضلاع را رسم کنید

نقد و بررسی :

- در تعریف چند ضلعی صفحه ۵۴ از شرط هم صفحه بودن رئوس حرفی به میان نیامده است . چندضلعی که رئوس آن در یک صفحه نباشند چند ضلعی فضایی نام دارد این چند از نظر مجموع زاویه های داخلی ، محدب و مقعر بودن و ... با چندضلعی در صفحه متفاوت است .
- تعریف چند ضلعی محدب صفحه ۵۵ بدون ارائه هیچ گونه کاربردی در حل مسائل و قضیه های کتاب مطرح شده است.
- تعریف چهارضلعی ها بسیار منطقی و خوب ارائه شده و نتایج و قضیه های حاصل از این تعریف ها کاملا با هم سازگارند.
- اگر چه اغلب قضیه ها به صورت فعالیت یا کار در کلاس مطرح شده است . ولی مشارکت دانش آموز در روند استدلال بسیار اندک است . و اغلب سوالهای مطرح شده در متن قضیه ها به طور شهودی نیز قابل پاسخ هستند.
- در کل فصل نامگذاری چهارضلعی ها فقط با چهار حرف ثابت D, C, B, A است که این باعث می شود دانش آموز در مواجه با مسائل خارج از چارچوب کتاب درسی دچار سردگمی شود.
- مسائل کاربردی و مدل سازی در این فصل مطرح نشده است (به جز کار درکلاس صفحه ۶۱).
- در تمرین های صفحه ۶۴ متن سوال های ۵ و ۸ بسیار طولانی است و دانش آموز را دچار سردرگمی و اضطراب می کند.
- بهتر بود از مسائل ترسیم با خطکش و پرگار نیز در تمرینات استفاده می شد.

فصل ۳

درس دوم : مساحت و کاربردهای آن



کار در کلاس

فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

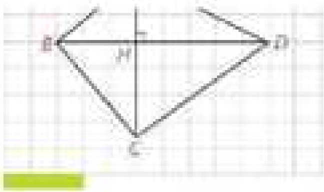
$$\Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{۲}$$

به کمک قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$.

$$\Delta ABH ; \angle H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow AH^{۲} + BH^{۲} = AB^{۲}$$

$$\Rightarrow AH^{۲} = a^{۲} - \left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} = \frac{۳a^{۲}}{۴} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \times a = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲}$$



در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB بر هم عمودند.

$S_{ADB} = \dots\dots\dots$ $\quad S_{\Delta ADB} = \frac{۱}{۲} BD \times AH$

$S_{DBC} = \dots\dots\dots$ $\quad S_{\Delta DBC} = \frac{۱}{۲} BD \times CH$

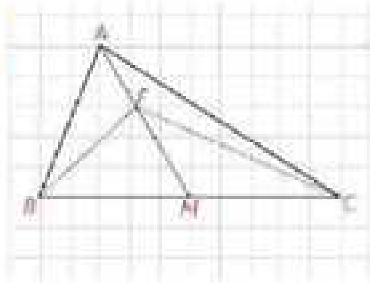
با جمع این دو مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} BD(\dots + \dots) = \frac{۱}{۲} BD \dots$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} BD \times (AH + HC) = \frac{۱}{۲} BD \times AC$$

بنابراین:

مساحت هر چهار ضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند برابر است با نصف حاصلضرب اندازه های دو قطر آن چهار ضلعی



کار در کلاس

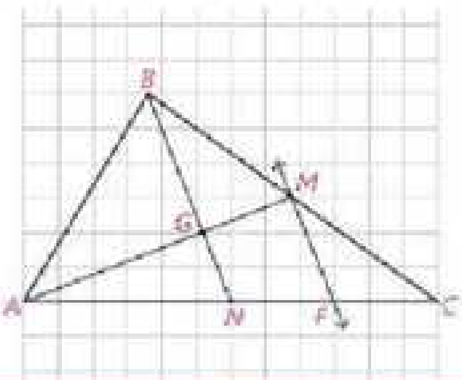
نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟

الف : در مثلث **ABC** ارتفاع **AH** را رسم می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AH \times BM \\ S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} AH \times CM \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$$

ب : بله زیرا **FM** نیز میانه **BFC** است.



فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانهٔ مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانهٔ AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطهٔ G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانهٔ BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، AF = ۳NF. چرا؟ در نتیجه، AM = ۳GM. چرا؟

$$\Delta BCN ; MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = 1$$
$$\Rightarrow CF = FN$$

$$AN = NC = 2NF$$
$$\Rightarrow AF = AN + FN = 2FN + FN = 3FN$$

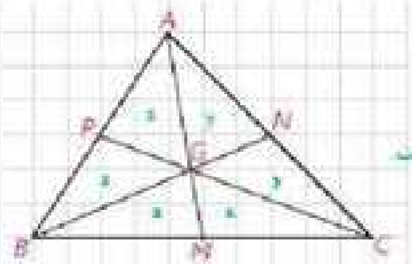
$$\Delta AMF ; MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = 2$$
$$AG = 2GM \Rightarrow AM = 3GM$$

بنابراین، $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$ و G بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون AB=۲MN پس AG=۲GM و BG=۲GN. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند؛ به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر آن رأس است.

و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.

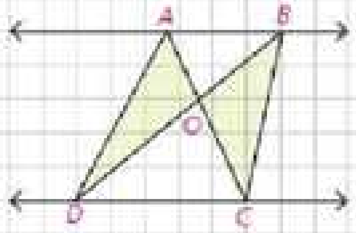


با رسم سه میانهٔ مثلث نشان دهید، سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$، چرا؟ زیرا GM میانه مثلث BGC است.

به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانهٔ AM را در نظر بگیرید، $2z + x = 2y + x$ در نتیجه $y = y$.

میانهٔ BN را در نظر بگیرید $2z + y = 2x + y$ در نتیجه، $z = x$. پس، $x = y = z$



ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$.

چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$؟

این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

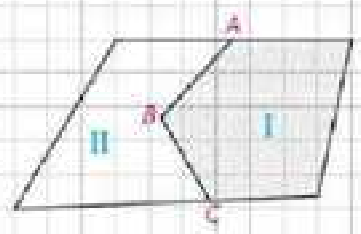
$$S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow S_{\Delta ACD} - S_{\Delta OCD} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta OCD} \Rightarrow S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC}$$

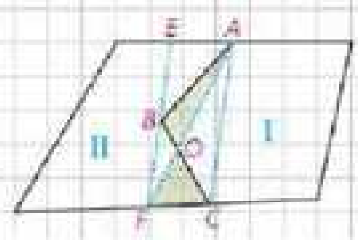
یک مسئله.

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

فکر اصلی این عمل براساس مسئلهٔ قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



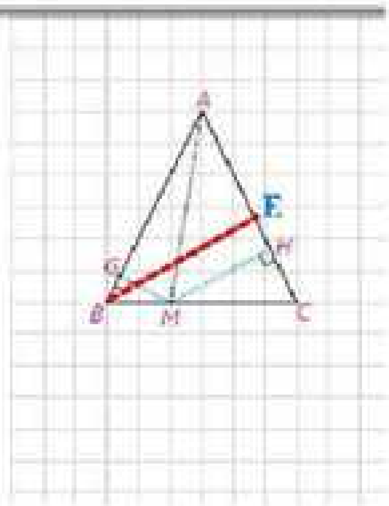


زیرا دو پاره خط AC، BF موازی و AF، BC یکدیگر را در نقطه O قطع کرده اند پس بنا به قضیه قبل $S_{AOAB} = S_{AOCF}$

با توجه به اینکه چهار ضلعی AEBC نیز ذوزنقه می باشد و به روش مشابه می توان به جای AF، BC از EC، AB استفاده کرد.

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. $S_{\Delta ABC}$ و $S_{\Delta ABM}$ را بنویسید.

مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

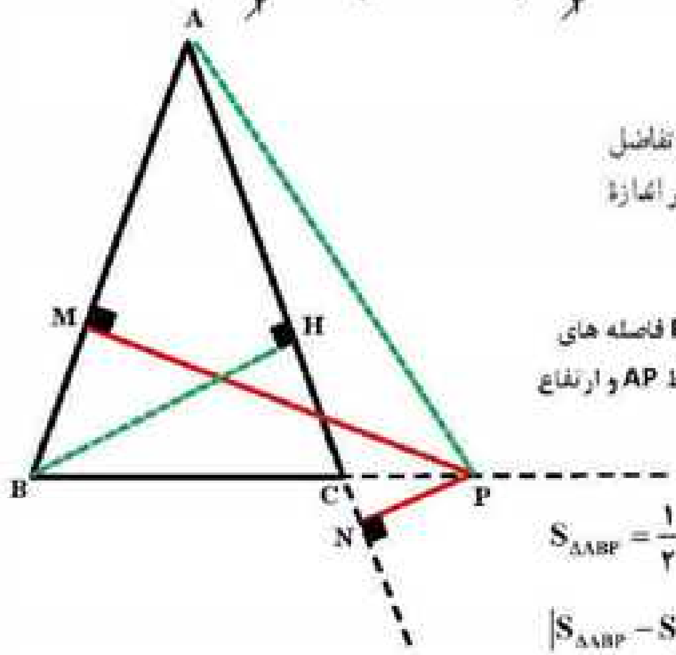


در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از AC، AB برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AB \times MG \quad , S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} AC \times MH \quad , S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB=AC} \frac{1}{2} AC \times MG + \frac{1}{2} AC \times MH = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} AC} \times (MG + MH) = \cancel{\frac{1}{2} AC} \times BE \Rightarrow MG + MH = BE$$



به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعدهٔ BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق است.

فرض کنیم P نقطه ای روی امتداد ضلع BC باشد . اگر PM و PN فاصله های نقطه P از دو ساق مثلث ABC $(AB = AC = a)$ باشند . پاره خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می کنیم.

$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} AB \times PM \quad , S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} AC \times PN \quad , S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

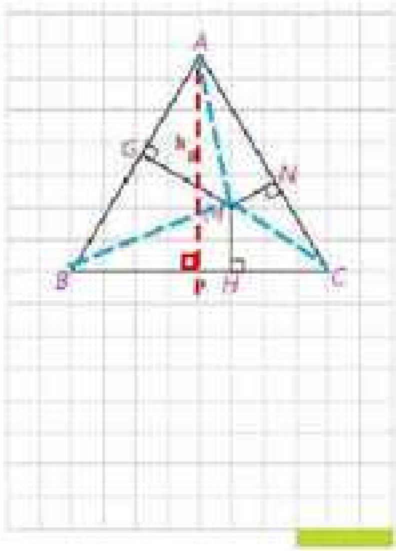
$$\left|S_{\Delta ABP} - S_{\Delta ACP}\right| = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB=AC=a} \left|\frac{1}{2} a \times PM - \frac{1}{2} a \times PN\right| = \frac{1}{2} a \times BH$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} a} \times |PM - PN| = \cancel{\frac{1}{2} a} \times BH \Rightarrow |PM - PN| = BH$$

فعالیت

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a درنظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC ، MBC و MAB را محاسبه کنید، این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

MH + MN + MG = AP...



مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث

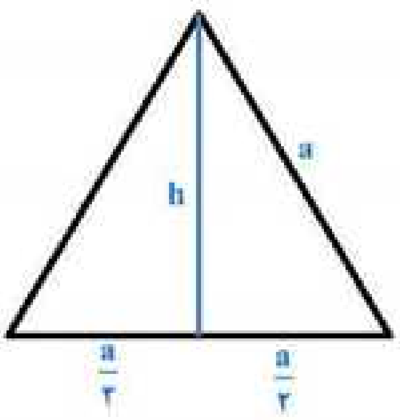
۶۸

$$S_{\Delta AMB}=\frac{۱}{۲}AB\times MG=\frac{۱}{۲}a\times MG\ ,\ S_{\Delta AMC}=\frac{۱}{۲}AC\times MN=\frac{۱}{۲}a\times MN\ ,\ S_{\Delta BMC}=\frac{۱}{۲}BC\times MH=\frac{۱}{۲}a\times MH$$

$$S_{\Delta AMB}+S_{\Delta AMC}+S_{\Delta BMC}=S_{\Delta ABC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}a\times MG+\frac{۱}{۲}a\times MN+\frac{۱}{۲}a\times MH=\frac{۱}{۲}a\times AP\Rightarrow MG+MN+MH=h_a$$

سوال بالای صفحه ۶۹

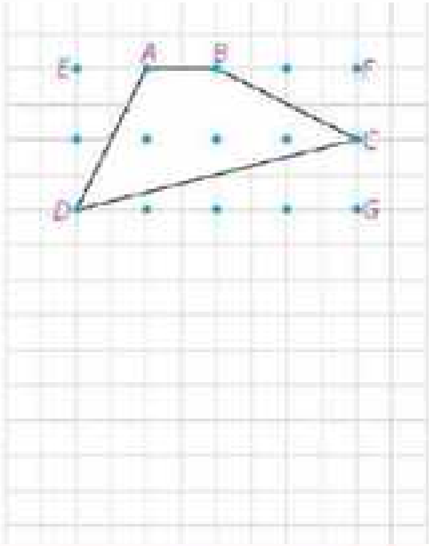
اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲، ۴ و ۶ باشند، اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.



$$h=۲+۴+۶=۱۲$$

$$h^۲+\left(\frac{a}{۲}\right)^۲=a^۲\Rightarrow ۱۲^۲=a^۲-\frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۴۴=\frac{۳}{۴}a^۲\Rightarrow a^۲=۱۹۲\Rightarrow a=\sqrt{۱۹۲}=۸\sqrt{۳}$$



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصلهٔ هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است

$S_{\square DEFG} = ۴\times۲ = ۸$

$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BCF} = \frac{۱\times۲}{۲} = ۱ , S_{\triangle CDG} = \frac{۴\times۱}{۲} = ۲$

$S_{\square ABCD} = ۸-(۱+۱+۲) = ۴$

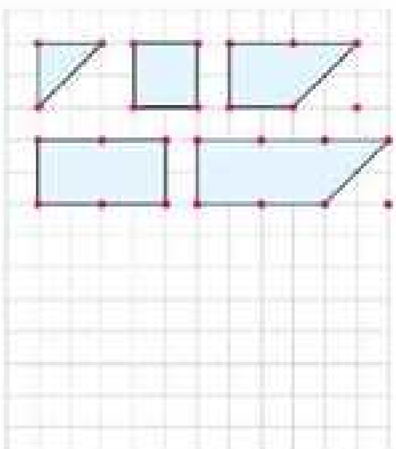
فعالیت صفحه ۶۹

فعالیت

۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

حداقل ۳ نقطه مرزی - زیرا برای رسم مثلث شبکه ای حداقل به سه نقطه نیاز داریم

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟ صفر



جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

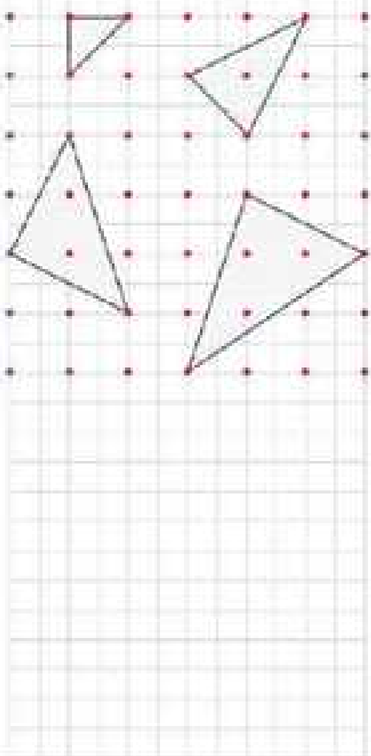
i = ۰ ، b = ۳،۴،۵ ،.......

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$

۴ـ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای ۳ = b باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید.
(نتیجه‌گیری $S=\frac{b}{۲}-۱+۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)

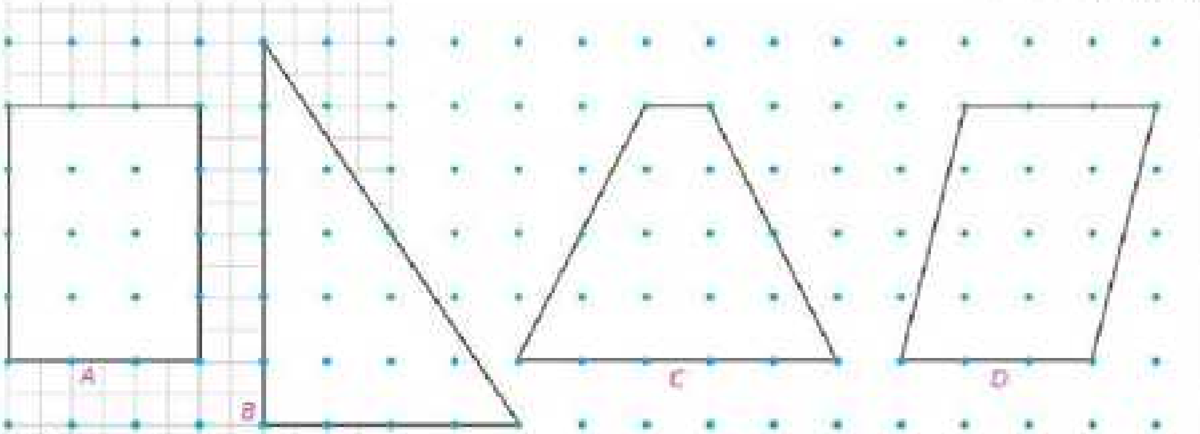


تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲}-۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۹}{۲}$

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$S=\frac{b}{۲}...۱...+...i...$

کاردرکلاس صفحه ۷۱



$S_A = ۳\times۴ = ۱۲$

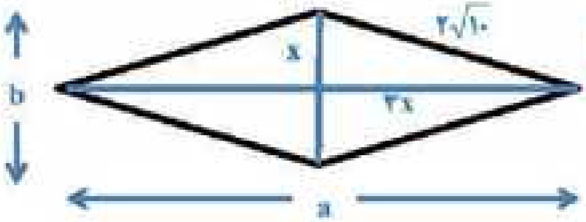
$S_B = \frac{۴\times۶}{۲} = ۱۲$

$S_C = \frac{۴\times(۱+۵)}{۲} = ۱۲$

$S_D = ۴\times۳ = ۱۲$

چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

تمرین صفحه ۷۲

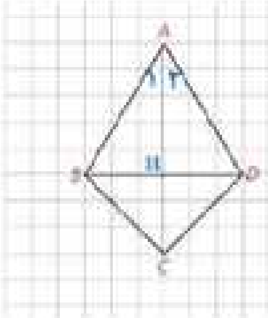


تمرین

۱ــ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

$$x^2+(3x)^2=\left(2\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow x^2+9x^2=40 \Rightarrow 10x^2=40 \Rightarrow x^2=4$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow a=12 \ ,b=4 \Rightarrow S=\frac{1}{2}\times 12\times 4=24$$

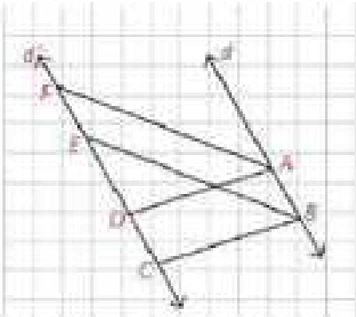


۲ــ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

$$\left.\begin{matrix} AB=AD \\ CB=CD \\ AC=AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \angle A_1=\angle A_2$$

$$\left.\begin{matrix} AB=AD \\ \angle A_1=\angle A_2 \\ AH=AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ADH \Rightarrow \angle H_1=\angle H_2=90^\circ$$

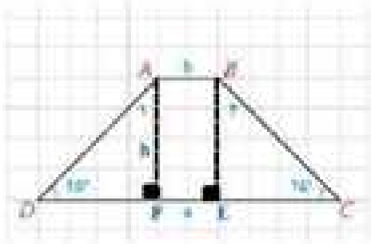
$$AC\perp BD \Rightarrow S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$$



۳ــ در شکل دو خط d و d' موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟

فرض کنیم فاصله دو خط موازی d, d' برابر h باشند در این صورت :

$$S_{\square ABCD}=S_{\square ABEF}=AB\times h$$



۴ـ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده °۴۵ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

عمودهای BF و AF را بر CD وارد می کنیم چهارضلعی ABCD مستطیل است پس :

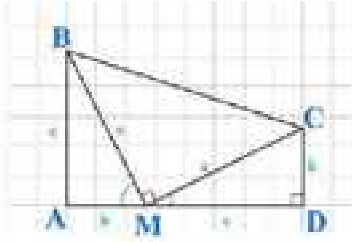
$AB = EF = b$

$\Delta ADF ; \angle A_{۱} = \angle D = ۴۵^\circ \Rightarrow AF = DF = h$

$\Delta BCE ; \angle B_{۱} = \angle C = ۴۵^\circ \Rightarrow BE = CE = h$

$\Rightarrow CD = ۲h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{۲}$

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{۲} \times \frac{a-b}{۲} = \frac{a^{۲}-b^{۲}}{۲}$



۵ـ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

$S_{\triangle ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times AD = \frac{۱}{۲}(b+c)(b+c) = \frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}$

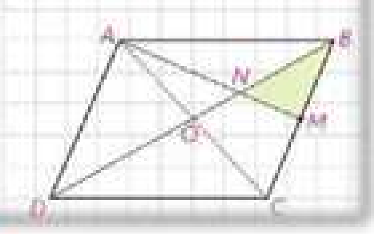
$S_{\triangle ABCD} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} + S_{\Delta MBC} = \frac{۱}{۲}bc + \frac{۱}{۲}bc + \frac{۱}{۲}c^{۲} = bc + \frac{۱}{۲}a^{۲}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(b+c)^{۲} = bc + \frac{۱}{۲}a^{۲} \xrightarrow{\times ۲} (b+c)^{۲} = ۲bc + a^{۲}$

$\Rightarrow b^{۲} + \cancel{۲bc} + c^{۲} = \cancel{۲bc} + a^{۲} \Rightarrow b^{۲} + c^{۲} = a^{۲}$

۶ـ در متوازی الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$

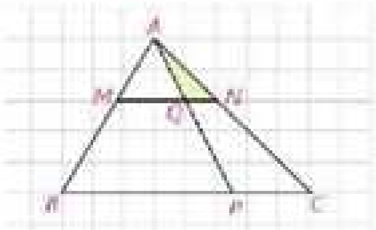


$\Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} S_{\square ABCD} \quad \boxed{۱}$

میانه های هر مثلث آن را به شش قسمت با مساحت های مساوی تقسیم می کنند.

$\Delta ABC ; BM = MC , AO = OC \Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{۱}{۶} S_{\Delta ABC} \quad \boxed{۲}$

$\boxed{۱} , \boxed{۲} \Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲} S_{\square ABCD}\right) = \frac{۱}{۱۲} S_{\square ABCD}$



۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. $S_{\Delta AQN}$ و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

$$\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta APC}\quad\boxed{1}$$

$$\Delta ABC; MN\parallel BC\Rightarrow\begin{cases}\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}\\ \Delta AQN\sim\Delta APC\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta AQN}}{S_{\Delta APC}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{\Delta APC}=9S_{\Delta AQN}\quad\boxed{2}$$

$$\boxed{1},\boxed{2}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=9\left(4S_{\Delta APC}\right)=36S_{\Delta APC}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{36}$$

$$\frac{PB}{BC}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3}{4}\Rightarrow S_{\Delta APB}=\frac{3}{4}S_{\Delta ABC}\quad\boxed{1}$$

$$\Delta ABC; MQ\parallel BP\Rightarrow\Delta AQM\sim\Delta ABP$$

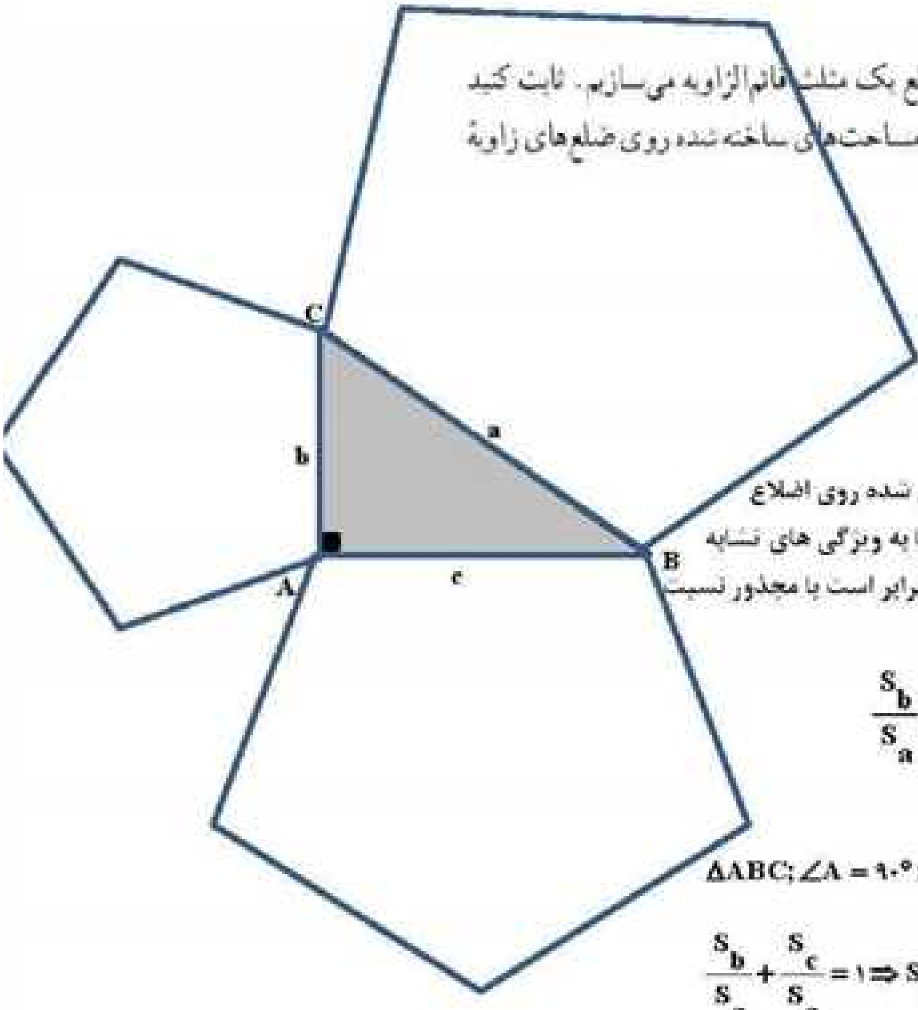
$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta APB}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{\Delta APB}=9S_{\Delta AMQ}\Rightarrow S_{\square BPQM}=\frac{8}{9}S_{\Delta ABP}\quad\boxed{2}$$

$$\boxed{1},\boxed{2}\Rightarrow S_{\square BPQM}=\frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}S_{\Delta ABC}\right)=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}\Rightarrow\frac{S_{\square BPQM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2}{3}$$

۸ــ زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به‌طور مساوی در آن شریک‌اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطهٔ M که MC = ۲۰ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعهٔ با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

کافی است نقطه N را روی ضلع AB چنان اختیار کنیم که AN = ۲۰ در این صورت دو ذوزنقه با قاعده های ۲۰ و ۱۸ و ارتفاع ۱۵ تشکیل می شود .

۹ـ سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه است.



اگر مساحت چندضلعی های متشابه تشکیل شده روی اضلاع a, b, c را به ترتیب S_a, S_b, S_c بنامیم بنا به ویژگی های تشابه نسبت مساحت های دو چند ضلعی متشابه برابر است با مجذور نسبت اضلاع متناظر آنها. به عبارت دیگر:

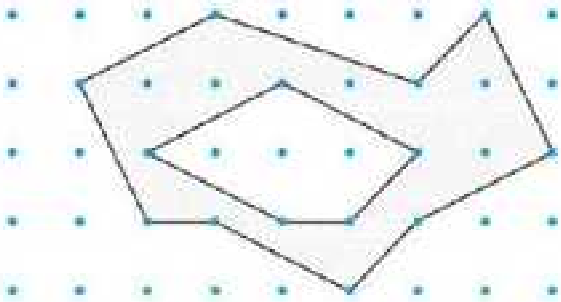
$$\frac{S_b}{S_a}=\left(\frac{b}{a}\right)^{۲} \quad , \frac{S_c}{S_a}=\left(\frac{c}{a}\right)^{۲}$$

از طرف دیگر:

$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ \Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲} \Rightarrow \frac{b^{۲}}{a^{۲}}+\frac{c^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

$$\frac{S_b}{S_a}+\frac{S_c}{S_a}=۱ \Rightarrow S_b+S_c=S_a$$

۱۰ـ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.



$$b=۱۴\ , i=۵ , S=\frac{b}{۲}-۱+i$$

$$\Rightarrow S=۷-۱+۵=۱۱$$

۱۱ـ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

مساحت به روش معمول : $S = m \times n$

مساحت به کمک قضیه پیک :

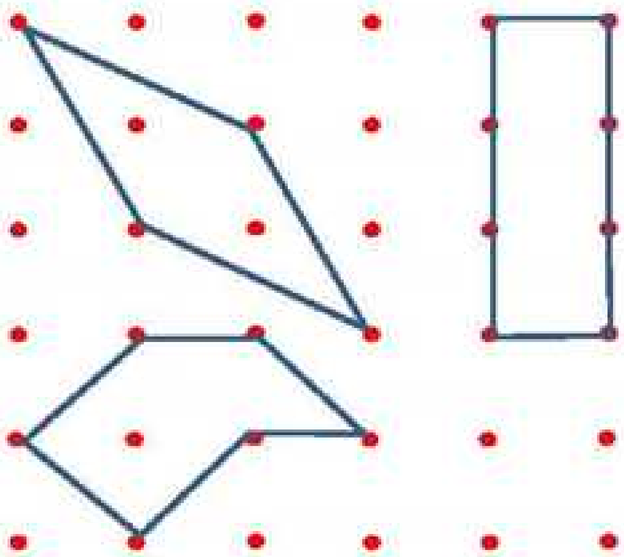
$$b = ۲m + ۲n$$

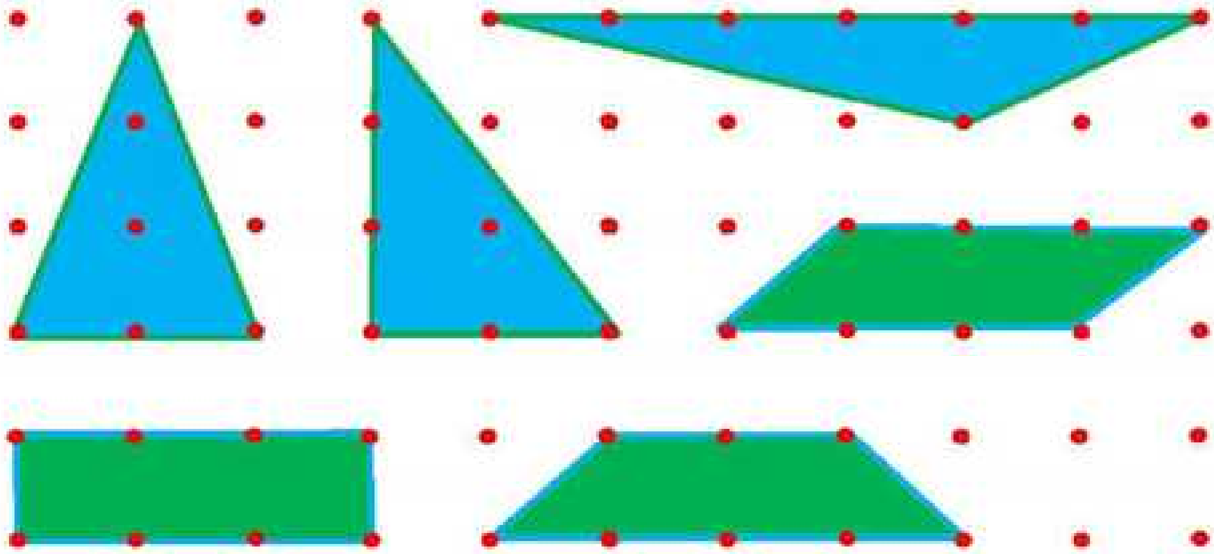
$$i = (m+۱)\times(n+۱) - (۲m+۲n) = mn - m - n + ۱$$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۲m+۲n}{۲} - ۱ + (mn - m - n + ۱) = m + n - ۱ + mn - m - n + ۱ = mn$$

۱۲ـ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰
$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$	۳	۳	۳

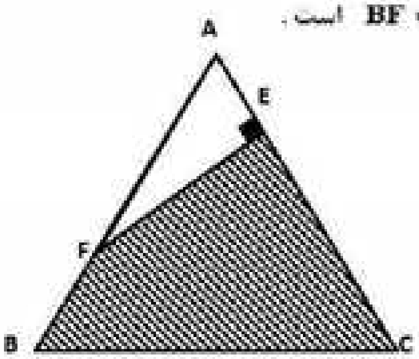


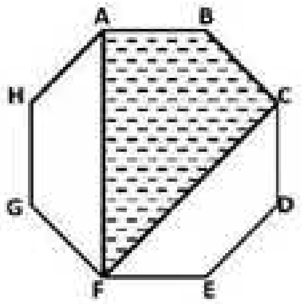


تمرینات تکمیلی :

۱- ثابت کنید مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب اندازه یک ساق در فاصله ی آن از وسط ساق دیگر.

۲- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع و $EF = 2\sqrt{2}$, $BF = 2$ است .
مساحت ناحیه سایه زده را حساب کنید.





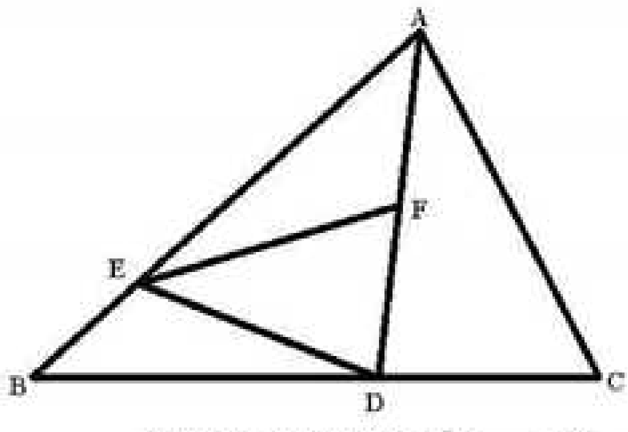
۳- اگر هشت ضلعی مقابل ، منتظم و محیط آن برابر ۳۲ باشد . و قطر های

FA و FC زاویه ی EFG را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشند .

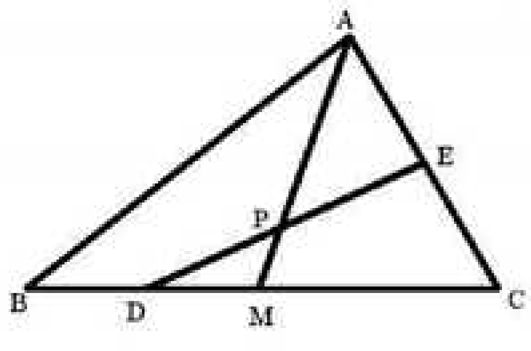
مساحت چهار ضلعی $ABCF$ را حساب کنید ؟

۴- در شکل مقابل مساحت ΔABC برابر ۹۰ سانتی متر مربع و $BD = 2DC$, $BE = \frac{1}{4}EA$ و نقطه ی F وسط

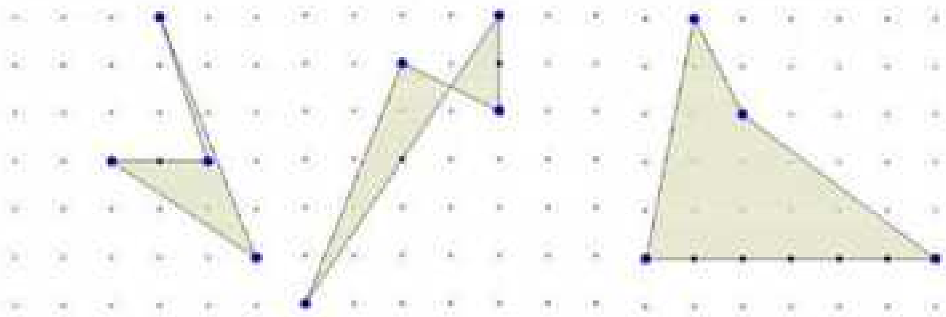
پاره خط AD است . مساحت ΔDEF را حساب کنید.



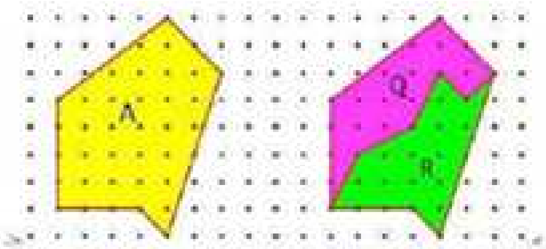
۵- در شکل مقابل AM میانه وارد بر BC است نشان دهید اگر $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta CDE}$ آنگاه $AP \times EP = DP \times MP$



۶- مساحت هر یک از شکل های زیر را به کمک قضیه پیک حساب کنید.

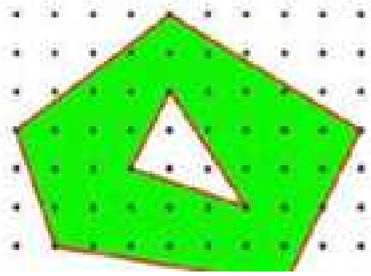


۷- در صفحه مختصات نقاطی که طول و عرض آنها اعداد صحیح می باشند را علامت گذاشته ایم . مربعی که هیچ یک از این نقاط ، نقطه درونی نباشد.حداکثر چه مساحتی دارد؟ آیا اگر این سوال را به کمک قضیه پیک حل می کردیم جواب نهایی تغییر می کرد ؟ چرا ؟



۸- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$S_Q + S_R = S_A$$



۹- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

مساحت قسمت رنگی = مساحت رنگ نشده - مساحت کل شکل

نقد و بررسی :

- اگر چه دانش آموز در دوره متوسطه اول با مساحت آشنا شده است ولی چیزی از اهمیت لزوم تعریف مساحت کم نمی کند . بهتر بود تعریف مساحت و اثبات فرمول های مساحت چند ضلعی های متعارف بررسی می شد.
- مساحت مثلث متساوی الاضلاع صفحه ۶۵ ارائه شده ولی هیچ مساله ی یا کاربردی برای مساحت مثلث متساوی الاضلاع بیان نشده است.
- همرسی سه میانه در فعالیت صفحه ۶۷ به روشی بسیار زیبا ثابت شده ولی درمورد کاربردهای فراوان این قضیه در حل مسائل هیچ اشاره ای نشده است.
- ایده استفاده از قضیه بیک در کتاب درسی بسیار پسندیده است و بهتر است که از این قضیه در سالهای بعد نیز استفاده شود.

فصل ۴

هندسه دهم

کار در کلاس

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیهٔ توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.

الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

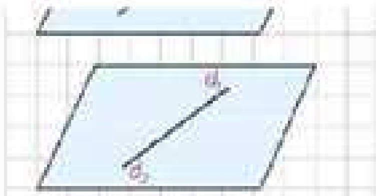
B,F,E

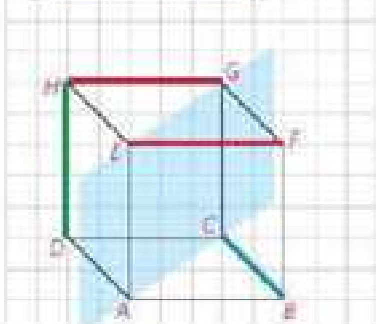
ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم راستا نیستند.

B,F,D

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.

B,F,D, C





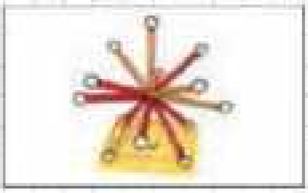
فعالیت

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

EF و HG : موازی	HG و HD : ه اطع
EA و GC : موازی	EC و FD : ه اطع
HD و BC : ه ا ر	GD و AB : ه ا ر

تعریف: دو خط را که نقطهٔ اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:



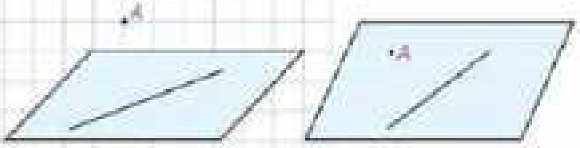
دو خط در فضا نسبت به هم موازی یا متقاطع یا م...... یا م...ا...ر هستند.

کار در کلاس

۱ـ به سؤالات زیر پاسخ دهید.
(می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

ـ در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟ ی...ما...ر

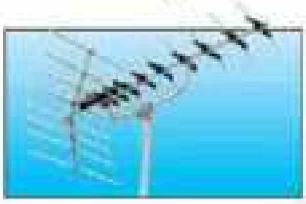
در فضا چطور؟ ی...ما...ر

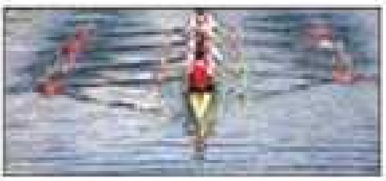


ـ در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟ ...ک و ...ها ...ک

در فضا چطور؟ ...ک و ...ها ...ک

۲ـ در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متنافر اشاره کنید.

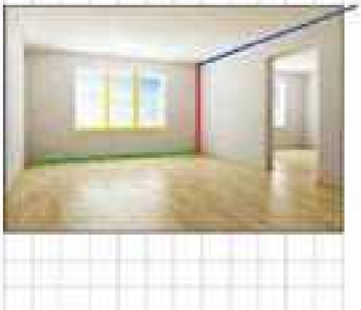




۳ـ دو خط موازی رسم کنید و آنها را L_1 و L_2 بنامید.
حالا خط L_3 را موازی با L_2 رسم کنید. دو خط L_1 و L_3 نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

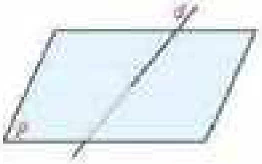
نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط ....موازی‌اند.

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟ ...له



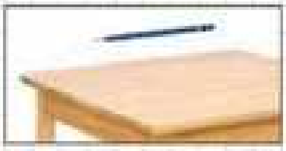
۴ـ می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.
آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟ ...ر

۵ـ خط d با صفحهٔ P متقاطع است.
خط‌های موجود در صفحهٔ P نسبت به خط d چه وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟



م...اطع ...ا م...ا ...ر

حالت‌های مختلف خط و صفحه



مدادتان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحهٔ میز را قطع نکند.

اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم ...موازی... هستند.

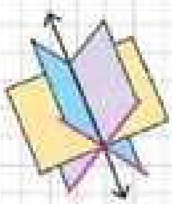
نوک مداد را روی میز بگذارید.
در این حالت مدادتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.

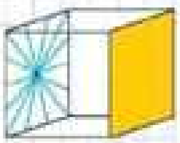
اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم ..م...اطع.. هستند.

مدادتان را روی میز قرار دهید.

اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطهٔ اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

خط و صفحه در فضا نسبت به هم موازی‌ند یا م...اطع هستند یا خط بر صفحه ..وا..ع.. است.





کار در کلاس

۱ــ به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

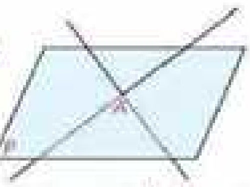
ــ از یک خط در فضا چند صفحه می‌گذرد؟ بی شمار

ــ از دو خط متقاطع چند صفحه می‌گذرد؟ یک و تنها یک صفحه

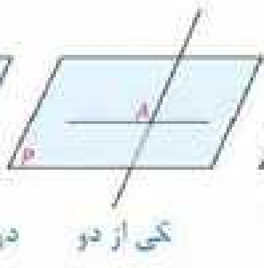
ــ از دو خط موازی چطور؟ یک و تنها یک صفحه

ــ از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد؟ بی شمار

۲ــ دو خط در نقطهٔ A متقاطع‌اند و صفحهٔ P شامل نقطهٔ A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت‌های مختلف خطوط متقاطع و صفحهٔ P را بررسی کنید.



هیچ یک از دو خط در صفحه P قرار ندارد



یکی از دو خط در صفحه P قرار دارد

هر دو خط در صفحه P قرار دارند

۳ــ دو خط یک و یک در فضا با هم موازی‌اند.

الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

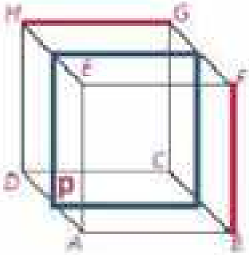
ا ا دوم موازی اس ا دوم ر آ وا ع اس .

ب) اگر صفحهٔ P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعش دارد؟

ا ا د ر موازی اس ا هردو ر ا ص حه رار دار د

ج) اگر صفحهٔ P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعش دارد؟ م اطع

۴ــ مسئلهٔ قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متنافرند.

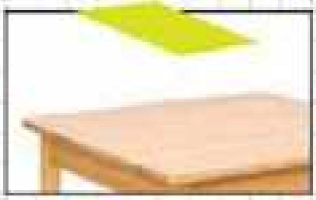


ال) ا ر ص حه ای ا کی دو
م ا ر موازی ا د می وا سه حال
را در ر و ۱- ا د ر موازی
اس . ما د ص حه Pو دو
GH,BF ۲-ا د ر م اطع اس
ما د ص حه BFG و هاى AE ,
GH ۳- د ر و آ ص حه رار
دارد ما د ص حه BFE و هاى AE
, GH

) ا و ص حه ای امل کی از دو
م ا ر ا د می وا دو حال را
در ر و ۱- ا د ر موازی
اس . ما د ص حه GHDو دو
GH,BF ۲-ا د ر م اطع اس
ما د ص حه BFG و هاى , BF
GH

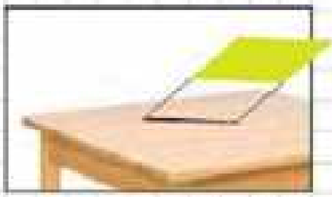
) ا ر ص حه ای کی از دو
م ا ر را ع ک د می وا سه
حال را در ر و ۱- ا د ر
موازی اس . ما د ص حه EHD و دو
GH,BF ۲-ا د ر م اطع
اس ما د ص حه ای که از وس ال
های GH,BF,EFمی رد و دو
GH,BF ۳- د ر و آ ص حه
وار دارد. ما د ص حهBFE و هاى
EH .BF

حالت‌های مختلف دو صفحه



یک برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحهٔ میز را قطع نکند.

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم ...موازی... هستند.



برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحهٔ میز را قطع کند.
اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

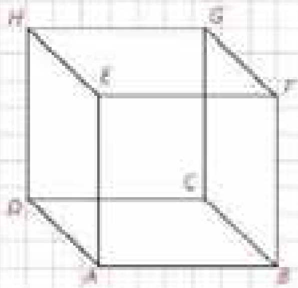
اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم ...متقاطع... هستند.

خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

برگه را روی میز قرار دهید.

دو صفحه در فضا نسبت به هم ...موازی... یا ...متقاطع... هستند.

کار در کلاس



به این مکعب دقت کنید:

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

HG و DC چطور؟ موازی

EF و GC چطور؟ مـ ا ر

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟ چهار

با چند خط موازی است؟ سه

با چند خط متنافر است؟ چهار

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟ BFG

با کدام متقاطع است؟ EFG,ABC

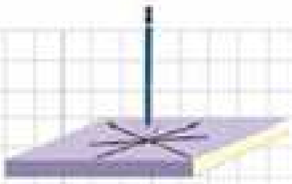
بر کدام منطبق است؟ HAD,HDC

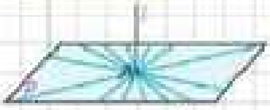
د) دو صفحهٔ موازی و دو صفحهٔ متقاطع نام ببرید.

EFG,ABC دو صـ حه موازی ا د

ABF,ABC دو صـ حه مـ اطع ا د

تعامد

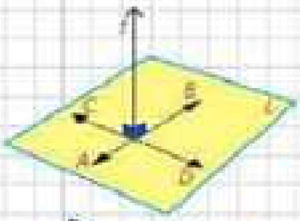




نوک مداد خود را مطابق شکل به‌صورت قائم بر صفحهٔ کتاب نگه دارید.
در این حالت مدادتان با بقیهٔ خط‌های موجود در صفحه که از نقطهٔ تقاطع مداد و سطح میز می‌گذرند، چه وضعیتی دارد؟
عمود اس

تعریف: فرض کنید خط l در نقطهٔ A صفحهٔ P را قطع می‌کند. خط l بر صفحهٔ P عمود است؛ هرگاه بر تمام خط‌های صفحهٔ P که از نقطهٔ A می‌گذرند، عمود باشد.

آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود باشد، می‌توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟
ز



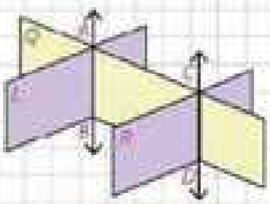
می‌توان نشان داد که:

اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

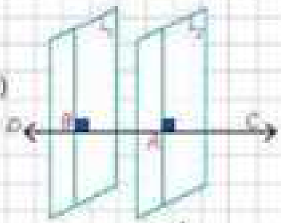
کار در کلاس

(۱)

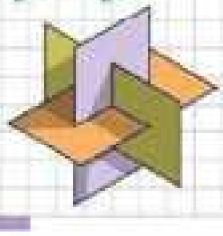
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟ بله

ب) آیا دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟ بله

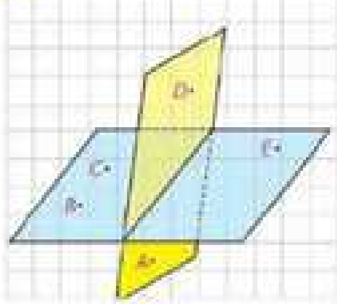
ج) دو صفحهٔ عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی اند

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ عمود اس

هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید. آ عمود اس

تمرین صفحه ۸۴

تمرین



۱ــ با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :

الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.

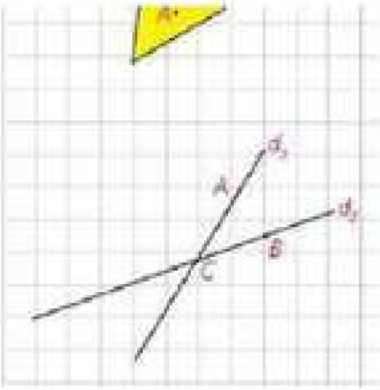
ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.

د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟

ال : دو صـ حه ــصـ حه BCE و صـ حه ای که از AD و صل مـ رک می رد

: B,C,E : B,C,E,D د : مـ ا ر – مـ ا ر



۲ــ خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل‌اند. صفحهٔ P را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.

الف) صفحهٔ P شامل نقطهٔ C است.

ب) صفحهٔ P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.

ج) صفحهٔ P شامل نقاط C و B و A است.

د) صفحهٔ P شامل خط d_1 و نقطهٔ B است.

ال : یکی از حال‌های ز ر ر می دهد : ۱-هر دو روی صـ حه P رار دار د. ۲- یکی از دو مـ اطع روی صـ حه P رار دارد. و د ری صـ حه P را در ـه C ع می ک د ۳- هر دو صـ حه P را در ـه C ع می ک د.

: یکی از حال‌های ز ر ر می دهد : ۱-هر دو روی صـ حه P رار دار د. ۲- d_1 روی صـ حه P رار دارد. و d_2 صـ حه P را در ـه C ع می ک د.

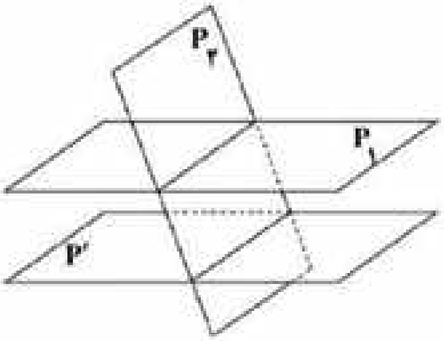
: هر دو روی صـ حه P رار دار د.

د : هر دو روی صـ حه P رار دار د.

۳ــ دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

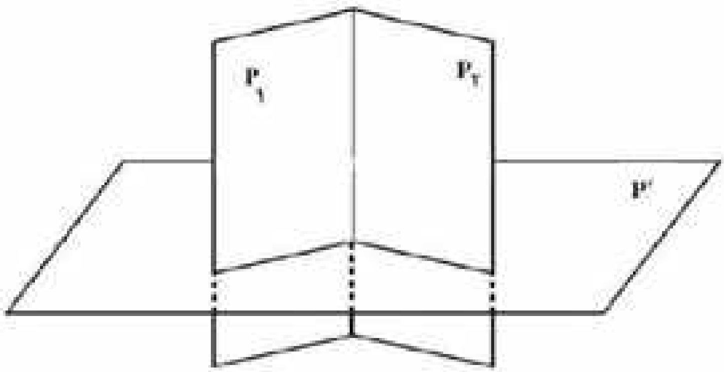
الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با $P_۱$ موازی باشد، نسبت به $P_۲$ چه وضعیتی خواهد داشت.

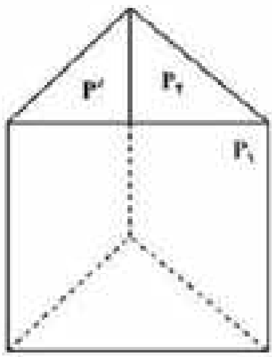
ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با $P_۱$ متقاطع است، با $P_۲$ چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.

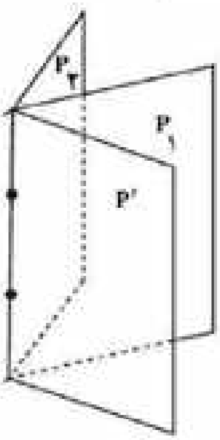


الـ : صـ حه P' صـ حه $P_۲$ را در ی موازی d ع

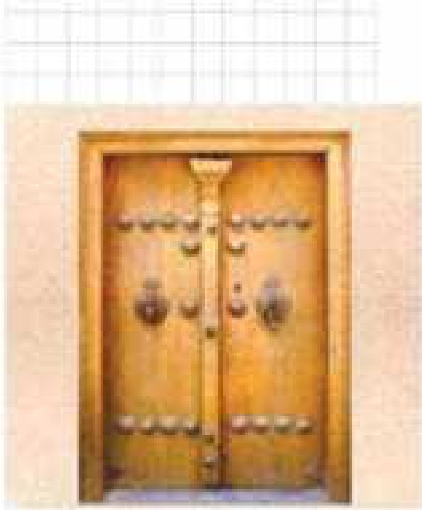
می کـ د.



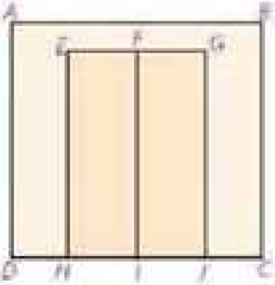




۴ــ شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دو به‌دو نسبت به هم بررسی کنید.



ب) خطوط FI و BC

ج) خطوط FI و AB

د) خطوط FG و EF

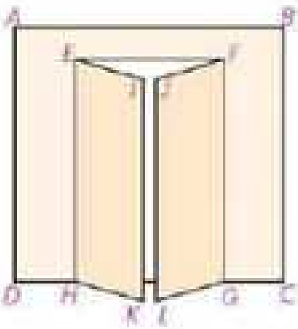
هـ) خطوط FG و HI

و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)

ال : دو صـ حه EFIH,FGJI و هم مـ اند و صـ حه ABCD با هر دوی آ ها موازی اسـ .

: موازی - : مـ ا ر - د: مـ - هـ: موازی - و: موازی

۵ــ تجسم کنید دو لنگهٔ در هرکدام °۳۰ باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH

ج) خط JL و صفحهٔ EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

هـ) خطوط EI و JF

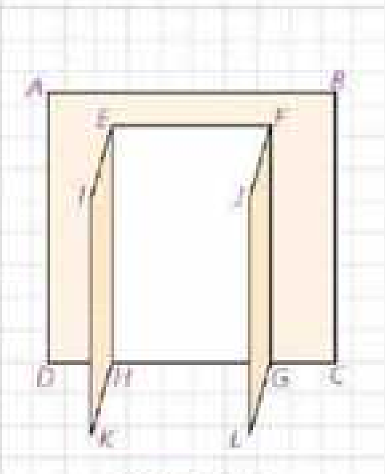
و) خطوط EI و FG

ث) خطوط FJ و BC

ال : دو به دو مـ اطع اند : مـ اطع : موازی

د : EH روی دو صـ حه ABCD,EIKH رار دارد و با صـ حه JFGL

هـ: مـ اطع و: مـ ا ر ز: مـ ا ر



۶ــ تصور کنید دو لنگهٔ در هرکدام 90° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

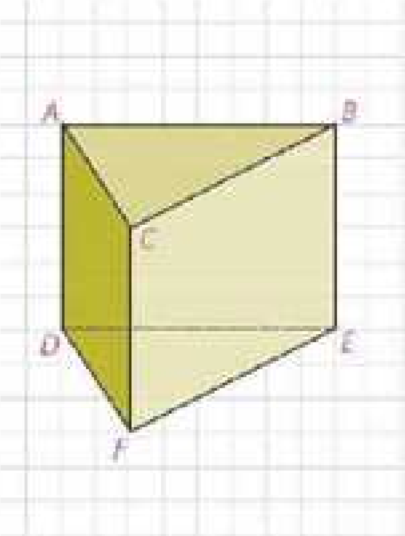
ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH موازی

ج) خط JL و صفحهٔ EIKH موازی

د) خطوط EI و FJ موازی

هـ) خطوط FJ و HK موازی

ال) دو صـ حه ABCD,EIKH مـ اطع ، دو صـ حه ABCD,FGLJ مـ اطع ، دو صـ حه EIKH,EIKH موازی



۷ــ منشور سه‌پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

الف) سه جفت خط متمایز دو به‌دو موازی نام ببرید. **AD,CF, BE**

ب) سه جفت خط متمایز دو به‌دو متنافر نام ببرید. **CD,EF, AB**

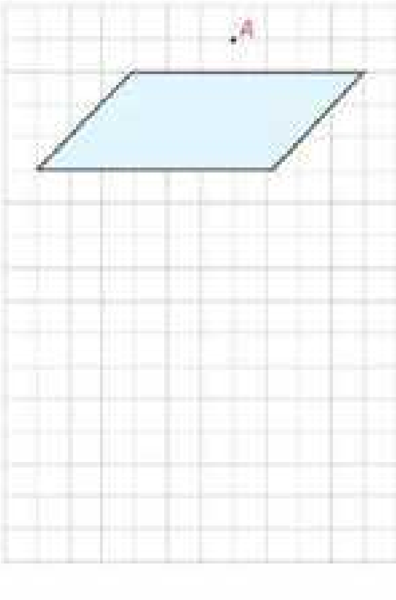
ج) سه جفت خط دو به‌دو متقاطع نام ببرید. **AB,AC,BC**

د) سه خط همرس نام ببرید. **AB, AC, AD**

هـ) سه جفت خط و صفحهٔ موازی نام ببرید. **خطهای AB, AC, BC و صفحه DEF**

و) دو صفحهٔ موازی نام ببرید. **ABC , DEF**

ز) سه صفحهٔ دو به دو متقاطع نام ببرید. **ABC ,BCFE , ACFD**



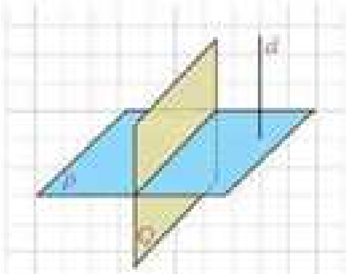
۸ــ از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

یک و تنها یک خط می توان عمود کرد

۹ــ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

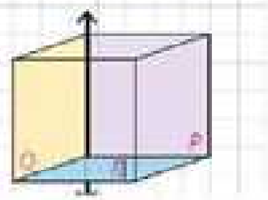
الف) خط بر صفحه عمود باشد. **بی شمار صفحه**

ب) خط بر صفحه عمود نباشد. **فقط یک صفحه**



۱۰ــ دو صفحه P و Q برهم عمودند و خط d نیز بر صفحهٔ P عمود است. این خط نسبت به صفحهٔ Q چه وضعی دارد؟

موازی است



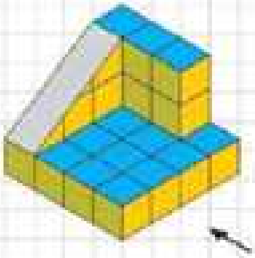
۱۱ــ دو صفحهٔ متقاطع P و Q بر صفحهٔ R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحهٔ R چه وضعیتی دارد؟

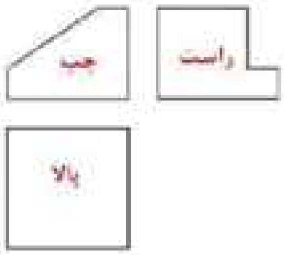
عمود است

کار درکلاس صفحه ۸۹

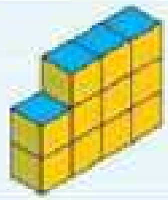
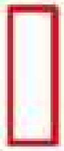
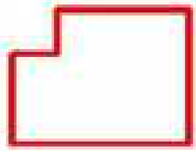
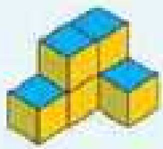
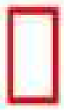
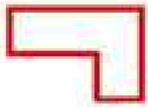
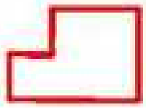
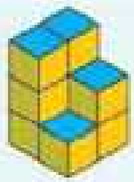
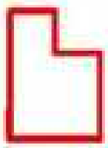
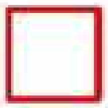
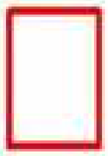
کار در کلاس

۱ـ شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

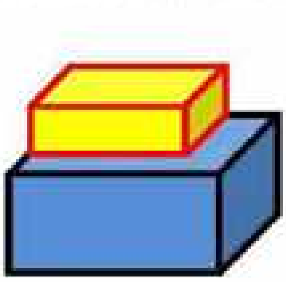




۲ـ سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

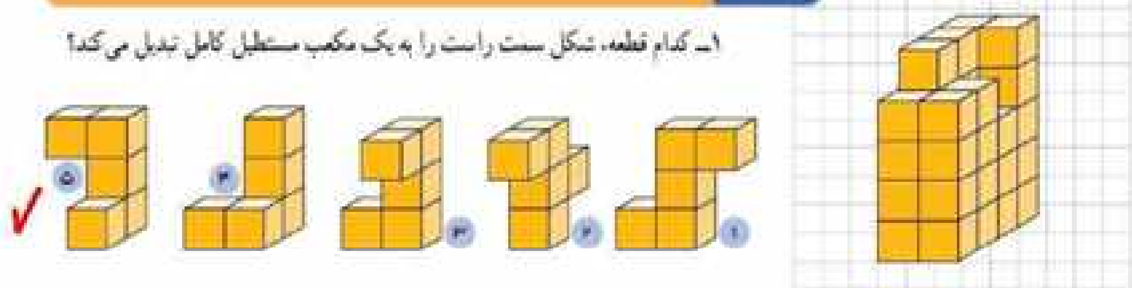
	نمای چپ	نمای بالا	نمای روبه‌رو
			
			
			

۳ـ دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ایم. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است. تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.

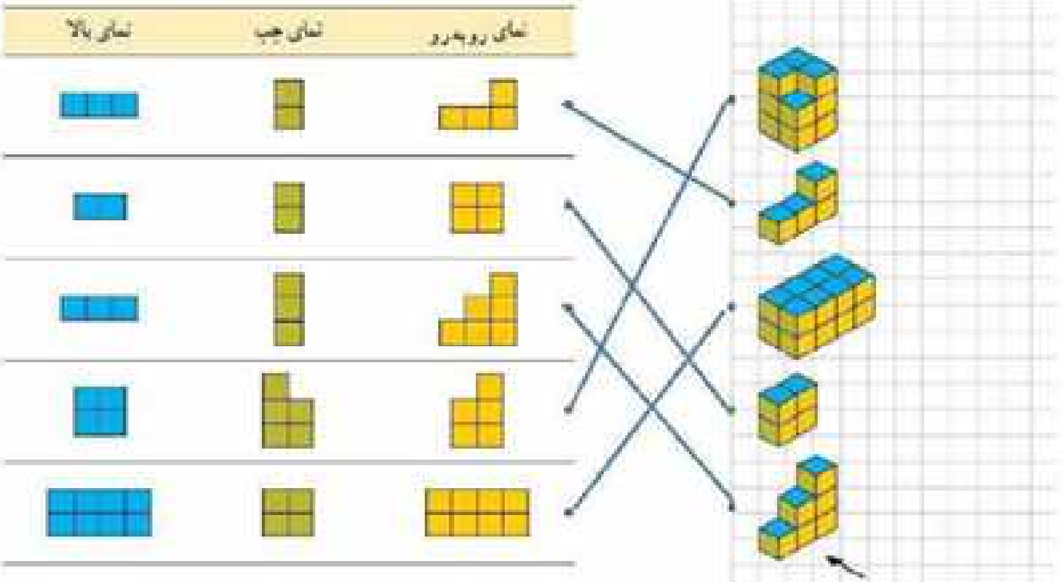


تمرین

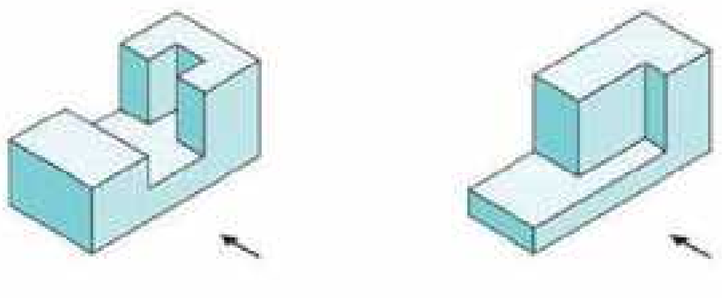
۱ـ کدام قطعه، شکل سمت راست را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟

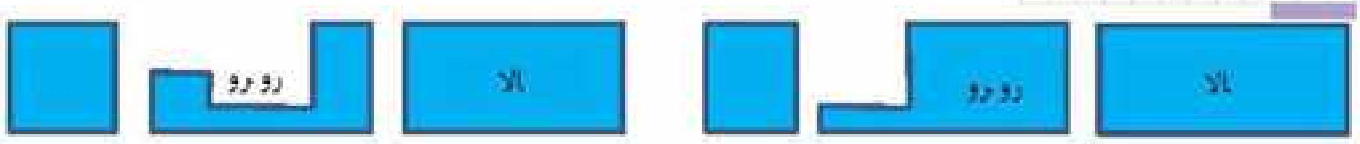


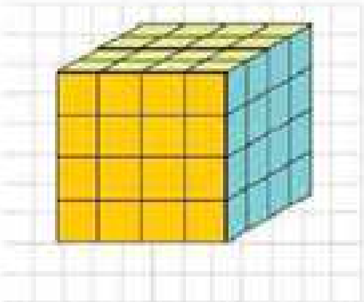
۲ـ نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.



۳ـ در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.







۴ـ تمام وجه‌های مکعبی را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.

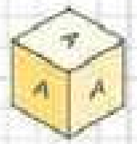
ـ چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟ ۶۴

ـ چند مکعب، رنگ نشده است؟ ۸

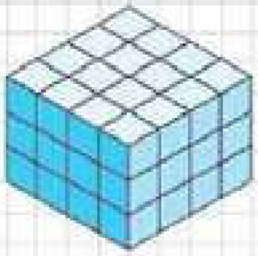
ـ چند مکعب، رنگ شده است؟ ۵۶

ـ چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟ ۲۴

ـ چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟ ۸

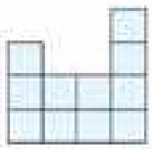


۵ـ روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟ ۳۳



۶ـ شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟ ۴۸

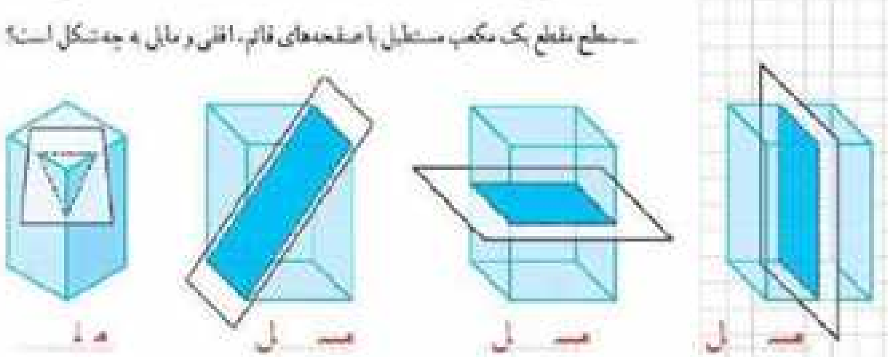
حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟ ۱۵

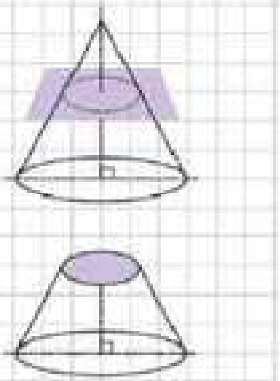


صفحه ۹۳

در سال‌های آینده با تعریف دقیق‌تر بیضی آشنا خواهید شد.

ـ سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟



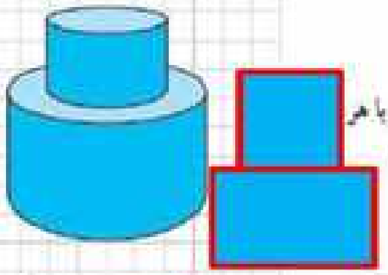


ـ مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن برخورد داده‌ایم. این صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟ دا ره

بخش زیرین را **مخروط ناقص** می‌نامند.

اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند، سطح مقطع حاصل چیست؟ وز ه

کار در کلاس



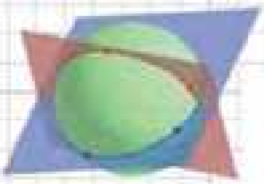
۱ــ دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

۲ــ در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که از قاعدهٔ استوانه عبور نکند به چه شکل است؟

م ع ا ی

م ع مایل   م ع عمودی

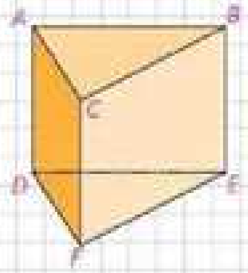
۳ــ سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟



دا ره ــ درصورتی که ص حه طع از مرک کره رد ـ ح م ع ،

و ساح ممک را دارد

تمرین

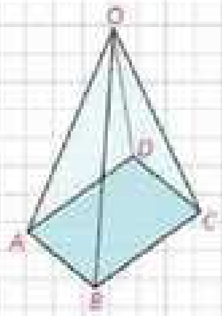


۱ــ فرض کنید منشور زیر، یک قطعهٔ چوبی توپر باشد. این قطعهٔ چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطهٔ مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟

الف) M، N و P وسط پاره‌خط‌های BE، CF و AD دو م   ور هم اندازه و هم   کل

ب) C، D و E   ک هرم م ا   ال اعده و ک هرم ا اعده   هار لعی

ج) C، F و Q (وسط پاره خط AB)   دو م   ور هم اندازه

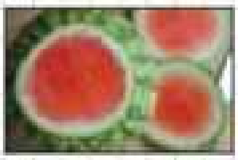


۲ــ قاعدهٔ هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

الف) صفحهٔ P بر ارتفاع هرم عمود باشد.   مسـ   ل

ب) صفحهٔ P از O بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.   م ا

ج) صفحهٔ P از O نگذرد؛ ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.   وز   ه

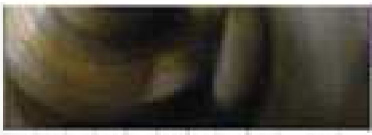


۳ــ صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است.
اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

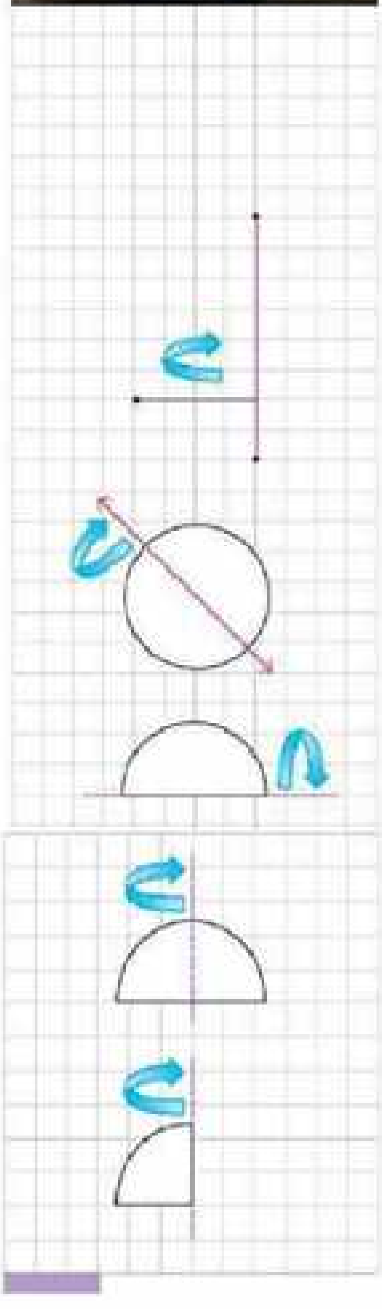
$r^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \Rightarrow r = ۴ \Rightarrow S = \pi r^۲ = ۱۶\pi$

۴ــ دو کره با شعاع‌های r و r′ یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟   دا ره

اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟   م   روط



دوران حول محور



از دوران دادن شکل‌های متفاوت هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های هندسی مختلفی را تصور کرد.

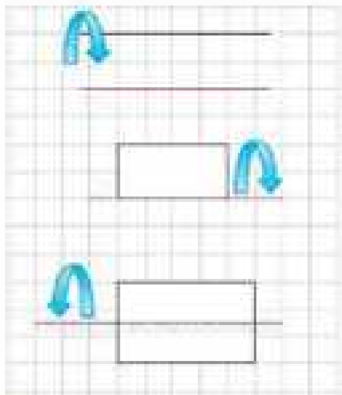
ـ فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟ اـ وا ه

ـ دایره‌ای به شعاع ۲ را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟ کره

ـ یک نیم دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟ کره

ـ اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟ م کره

ـ اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ م کره

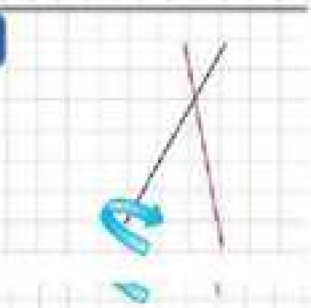


ـ دو خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟ اـ وا ه

ـ اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟ اـ وا ه

ـ اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ اـ وا ه

تمرین



۱ـ دو خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟

دو م روط ا راس و محور م رک

۲ـ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن: م روط

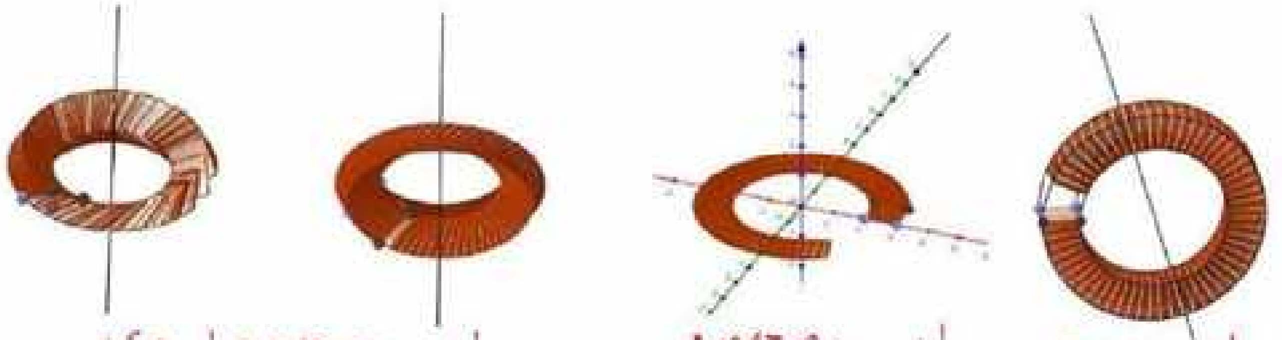
ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه: م روط

پ) دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها: م روط ا

ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ آن:

دو م روط مساوی ا اعده م رک (دوک)

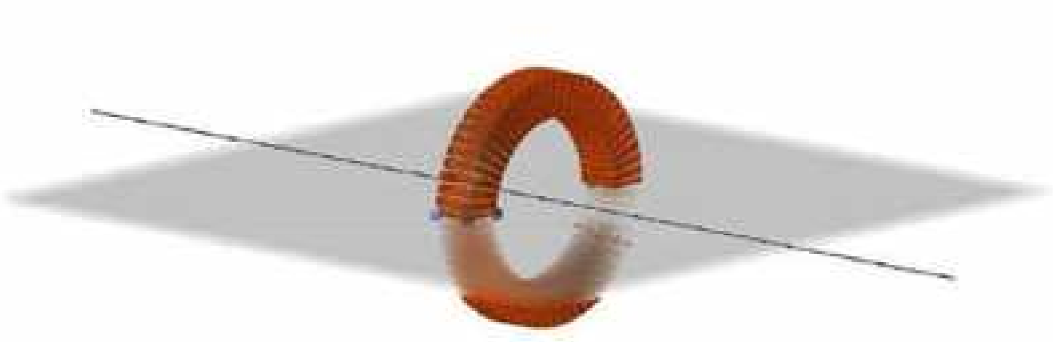
۳ـ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

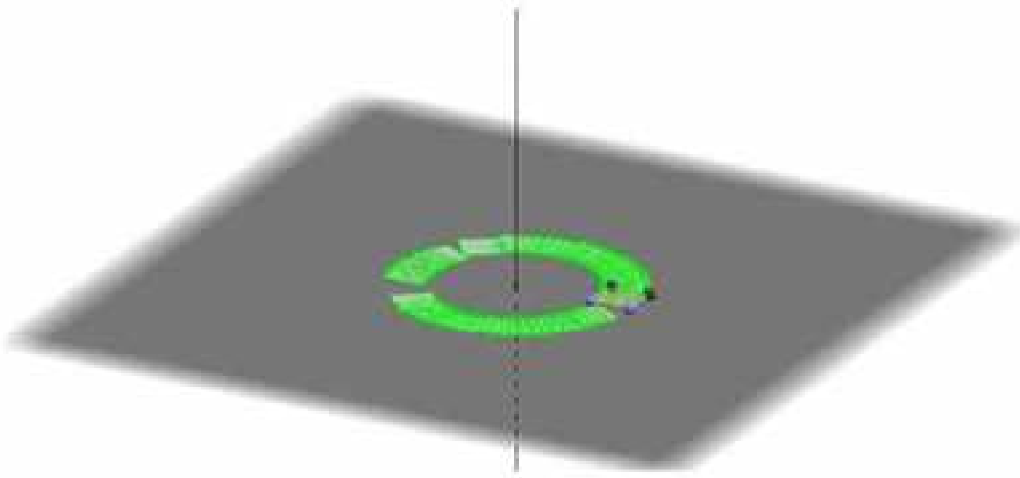


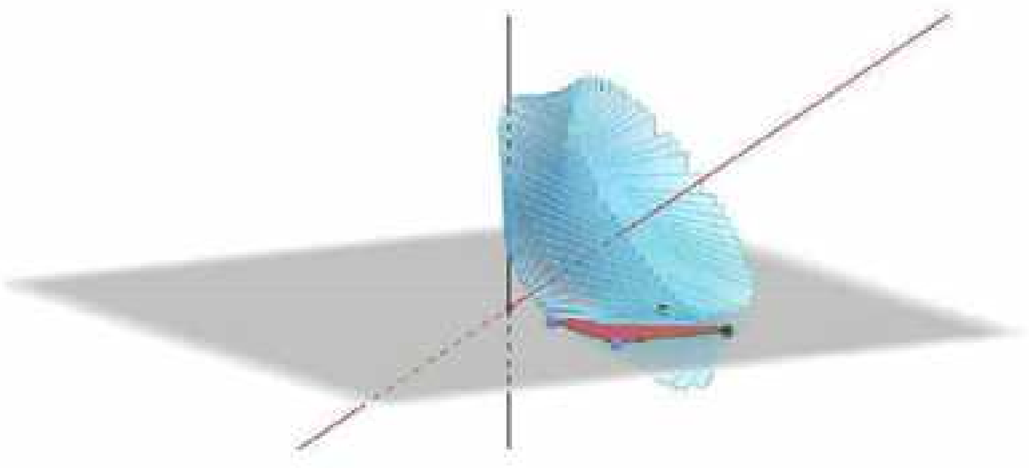
ا ر ، ص حه مرع را ع ک د

ا ر ر ص حه مرع عمود ا د

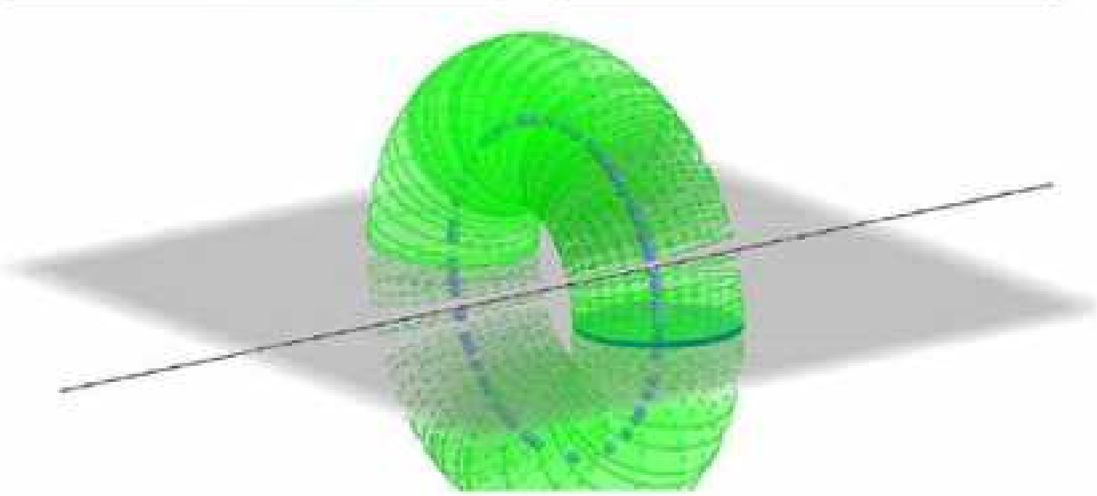
ا ر و مرع در ک ص حه ا د







۴ــ شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.   دایره



تمرین های تکمیلی :

۱- چهار نقطه غیر واقع بر یک صفحه مفروض اند.

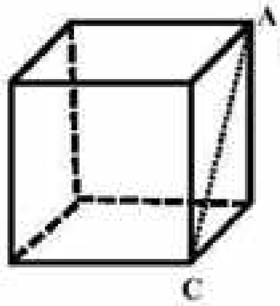
الف : چند صفحه وجود دارد که حداقل از سه نقطه از آنها بگذرد

ب : چند خط وجود دارد که حداقل از دو نقطه از آنها بگذرد

ج : چند جفت صفحه موازی می توان رسم کرد که یکی از آنها شامل سه نقطه و دیگری از نقطه چهارم بگذرد.

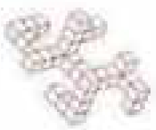
۲- از یک نقطه خارج از دو خط متنافر چند خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرند و بر هردو خط عمود باشند.

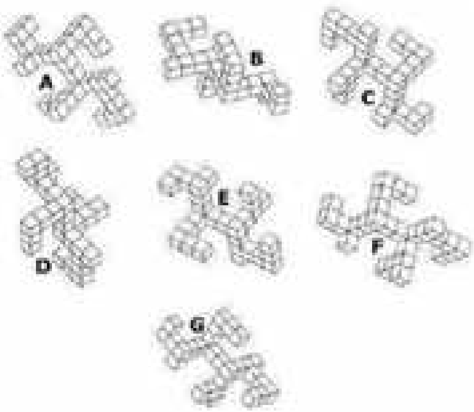
۳- دو خط متنافر و یک نقطه خارج آنها مفروض اند چند خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرند و دو خط متنافر را قطع کنند.



۴- در شل مقابل اگر صفحه ای از قطر AC بگذرد و مکعب را چنان قطع کند که هیچکدام از یالهای مکعب روی آن صفحه نباشند . مقطع ایجاد شده چه شکلی دارد؟

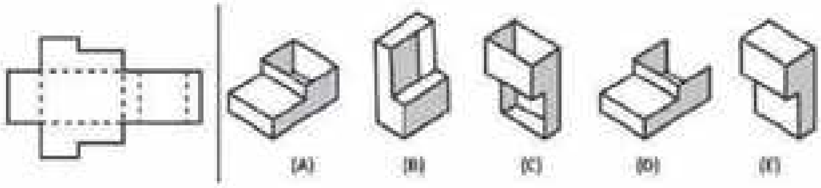
۵- کدامیک از تصاویر زیر از با شکل مقابل شبیه است ؟



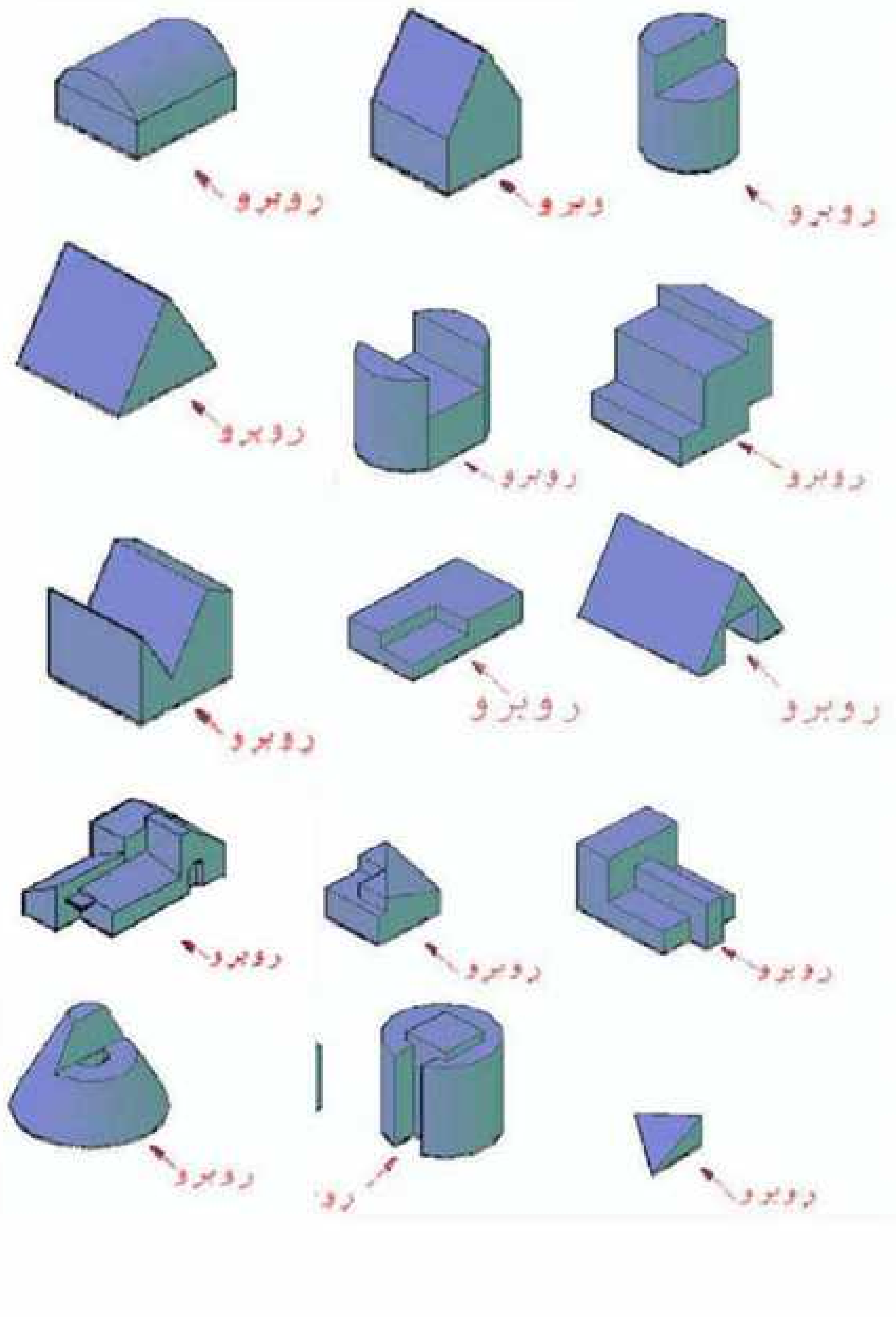


۶- خط d و دو صفحه متمایز P,P' مفروض اند اگر d بر صفحه P عمود بوده و بر یکی از خطوط صفحه ی P' نیز عمود باشد . وضعیت نسبی دو صفحه P,P' را با رسم شکل مشخص کنید.

۷- شکل سمت چپ گسترده شده کدامیک از اجسام سمت راست می باشد؟



۸- برای هر شکل سه نمای روبرو - بالا و نمای جانبی را با رعایت اصول رسم و تمیز بودن کاغذ رسم کنید.



نقد و بررسی :

- هد ا حل هما وه که از ام آ ه اب درک پودی از ای سه عدی می ا د ا ر ه درک پودی از ای سه عدی لازم و روری اب ولی ا راط در آ اه می ود دا آموز اهد اس و اب دلال اب ا ی را درک کد.
- اد اضی ود ه اده می ما د ، ص حه و ا در م الهای کا ه وی ده اب وا اه صدما را ا ری در درک دا آموزا از ای سه عدی واهد د.
- در مر ا ص حه ۸۴ ا ماس سه سوال۴و ۵ و۶ (ا سه های ز اد) از ۱۱ سوال ه ک م پوم ا ه پا وری ــ لکه رای دا آموز کلاا ار اب و ار آموز ی دارد.
- مر وط ه دورا دو ه وه مر ا م دمه ای از دورا ارئه ده اب .