



هم کلاسی
Hamkelasi.ir



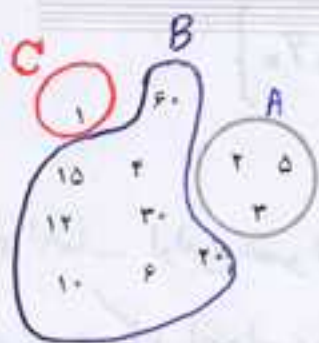
مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...
(سورة النجم، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستاره خورشید. ستاره هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشاندند.

فعالیت: مجموعه: set



در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد 60 را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های 60 را که اول نیست در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اول عدد 60 یعنی $2, 3, 5$ را در داخل

دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم و به هر یک از عددهای $2, 3, 5$ یک عضو مجموعه A می‌گوییم؛ در این صورت مجموعه A دارای 3 عضو است. $n(A) = 3$

* شما شمارنده‌های مرکب عدد 60 را به صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید. $n(B) = 8$

* مجموعه شامل شمارنده‌های عدد 60 که نه اول باشد و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این

مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید. $n(C) = 1$

* مجموعه D شامل همه شمارنده‌های دورقمی 60 را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو

دارد؟ $D = \begin{matrix} 40 & 30 & 20 \\ 10 & 15 & 12 \end{matrix} \Rightarrow n(D) = 6$

① از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل 3 شمارنده زوج عدد 60 را تشکیل دهند. احمد

نوشت: $\{4, 6, 10\}$ و رضا نوشت: $\{6, 10, 12\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ *دو صفحه ۲/۱*

نتیجه عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کننده یک مجموعه معین و یکتا نباشد،

مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند. *چون نظر رضا و احمد متفاوت است*

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی

عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک

مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به جای $\{3, 3, 4\}$ می‌نویسیم $\{3, 4\}$.

۱- اعضاء مشخص باشند

۲- متمایز باشند (غیر تکراری) *دو صفحه ۲/۱*

معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه

استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران

را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای

مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری) استفاده می‌کنیم.

① چون عدد شصت، ۸ شماره‌های زوج دارد و رضا، احمد به سلیقه‌ی خود و به دلخواه می‌توانند سه عضو از آن را انتخاب کنند

$$\text{شماره‌های زوج عدد ۶۰} = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 40\}$$

برای انتخاب اولین عضو (۸ حالت) و برای عضو دوم (۷ حالت) و برای عضو سوم (۶ حالت) داریم پس کل انتخاب‌ها برابر است با $(8 \times 7 \times 6 = 336)$

می‌دانیم ترتیب نوشتن اعضاء در یک مجموعه تاثیری ندارد یعنی داریم

$$\{2, 4, 6\} = \{2, 6, 4\} = \{4, 2, 6\} = \{4, 6, 2\} = \{6, 2, 4\} = \{6, 4, 2\}$$

لذا هر مجموعه ۶ تایی تکرار می‌شود بنابراین داریم

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از ۸ عضو} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

نکته‌ی مهم: چون عضوهای یک مجموعه تکرار نمی‌شوند، لذا $\{a, a, b\}$ تعداد مناسبی

برای مجموعه‌ی $\{a, b\}$ نیست

Note: A set does not change if one or more elements of the set are repeated. For example, the sets $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ are equal, since each element of A is in B and vice-versa. That is why we generally do not repeat any element in describing a set.

شماره‌ها قسمت‌های «ب» و «ج» مجموعه نیست چون اعضای آن مشخص نمی‌باشد

۱- کدام یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.

الف) عددهای طبیعی و یک رقمی $\sqrt{}$ (ب) چهار شاعر ایرانی X (ج) دو عدد اول کوچک‌تر از 12

مجموعه است مجموعه نیست مجموعه نیست

۲- با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به جای $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$ باید بنویسیم $A = \{1, 2, 4, 5\}$ **عصوتراری حذف می‌شود**

ب) به دلیل تکراری بودن عدد 5 در $B = \{5, 6, 5, 7\}$ آن را به صورت $B = \{5, 6, 7\}$

می‌نویسیم.

اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, 5, 7\}$ در نظر بگیریم برای نشان دادن اینکه a عضوی از مجموعه A است می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم « a عضو A است» و چون عدد 4 عضو A نیست، می‌نویسیم $4 \notin A$ و می‌خوانیم « 4 عضو A نیست».

تماز عضویت



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می‌توان با

استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعه

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم که نمایش با استفاده از

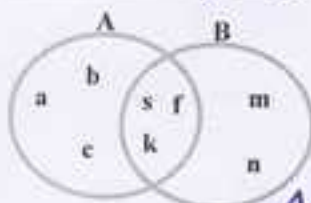
نمودار ون است.

نمودار ون Venn diagram

نمودار ون

کراسه جان ون منطق دان انگلیسی ابداع کرد

شماره‌ها



۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه A و B رسم

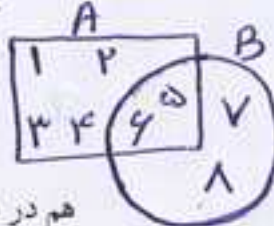
شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

$$A = \{a, b, c, s, f, k\} \text{ و } B = \{s, f, k, m, n\}$$

۲- دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به A و

هم در منحنی بسته B وجود دارد؟



۳- مجموعه عددهای دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند

عضو دارد؟ **عضو ندارد (عضو ندارد)**

$$E = \{ \}$$

نمته‌ی هم، مجموع‌های $\{0\}$ و $\{\emptyset\}$ تعریف نیستند هر کدام یک عضو دارند
 null set یا empty set

مجموعه تهی

«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعه $\{0\}$ یا $\{0\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴- کدام یک از عبارات‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟
 ✓ الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶
 ب) عددهای صحیح بین -۱ و ۱ $\{0\}$ بی‌عضوی
 ج) عددهای اول و زوج $\{2\}$
 د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشند.
 بی‌عضوی $\{2\} \Rightarrow$ بی‌عضوی

کار در کلاس

- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشند؛ سپس عبارات‌های خود را با نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید. **مهر ۴/۱**
- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص‌کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک‌عضوی می‌نامند). **مهر ۴/۱**
- عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص کنید (با ذکر دلیل). **مهر ۴/۱**
 - الف) چهار عدد فرد متوالی \times
 - ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲ \checkmark
 - ج) عددهای اول کوچک‌تر از $\sqrt{2}$ \checkmark د) سه شهر ایران \times
 - ه) شمارنده‌های عدد ۲۴ \checkmark
 - و) ۵ عدد بزرگ \times ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳ \checkmark
- مانند نمونه کامل کنید:

- | | | |
|---|--------------------------------|--------------------------------|
| ۱ | $A = \{ \dots, ب, پ, الف \}$ | مجموعه حروف الفبای فارسی |
| ۲ | $B = \{ ۴, ۸, ۱۲, \dots \}$ | $\{ ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \}$ |
| ۳ | مجموعه حروف a و b و عدد ۳ | مجموعه عددهای صحیح بین -۲ و -۳ |
| ۴ | $D = \{ ۵ \}$ | مجموعه عددهای طبیعی و مضرب ۴ |
| ۵ | $E = \{ \}$ | مجموعه عددهای اول و یک رقمی |
| ۶ | $F = \{ ۲, ۴, ۶, ۸ \}$ | مجموعه عددهای اول و مضرب ۵ |
| ۷ | مجموعه عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰ | $\{ ۳, a, b \}$ |
| ۸ | $H = \{ ۲, ۳, ۵, ۷ \}$ | $\{ ۶, ۴, ۲, ۸ \}$ |

۱- مجموع اعداد اول کوچکتر از ۲ - مجموعی شماره‌های زوج عدد ۹
مجموعی مضارب طبیعی عدد ۷ کوچکتر از ۵

۲- مجموعی شماره‌های اول عدد ۲۷. **جواب:** $\{3\}$

مجموعی اعداد صحیح منفی بزرگتر از ۲- **جواب:** $\{-1\}$

مجموعی اعداد کوچکتر از عدد ۷ شماره‌های طبیعی دارند **جواب:** $\{74\}$

اعدادی که ۷ شماره‌های طبیعی دارند، فقط یک عامل اول دارند (زیراهمت از آنی تکرار
به صورت چند عدد نوشته) و توان عوامل اول آن‌ها برابر ۴ می‌باشد

$$\{2^4, 3^4, 5^4, 7^4, 11^4, 13^4, \dots\}$$

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$$

* شماره‌های طبیعی 2^6 را بنویسید.

۳- الف) مجموع نیست چون جواب‌های متعددی دارد یعنی از جواب‌ها $\{5, 7, 9, 11\}$

ب) مجموع است جواب $\{2, 4, 6\}$

ج) مجموع است جواب $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

د) مجموع نمی‌باشد چون جواب‌های متعددی دارد

ه) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ = شماره‌های عدد ۲۴

و) مجموع نیست چون نظر افراد درباره‌ی ۵ عدد بزرگ متفاوت است

ز) این مجموع تهی است

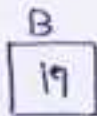
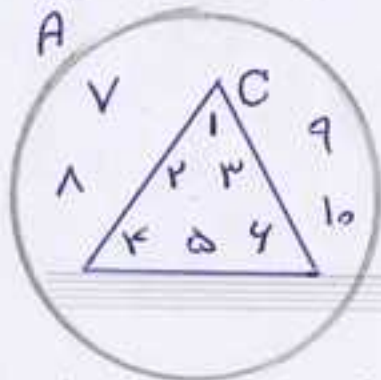
۵- کدام یک از عبارات‌های زیر مشخص‌کننده یک مجموعه است؟ با نمودار و نشان دهید:

✓ الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰ $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

✓ ب) شمارنده‌های اول عدد ۱۹ $B = \{19\}$

✓ ج) عددهایی که نش و وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند. $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

✓ د) جواب‌های معادله $2x+8=1$ $D = \{-3, 5\}$



X (ه) چهار میوه خوشمزه **مجموعه نیست**

✓ و) عددهای منفی و بزرگ‌تر از یک $\emptyset = \{ \}$

مجموعه‌ای نمایش و نداد *

تصویر

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد

عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید:

الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ **مطلب اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴ و $n(A) = 5$**

ب) $C = \{10\}$ **مجموعه اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱ و $n(C) = 1$**

ج) عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ $\Rightarrow n(B) = 333$ **$B = \{3, 6, 9, \dots, 999\}$**

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ **مجموعه تهی**

ه) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. **مجموعه تهی**

و) عددهای اول دورقمی که مضرب ۷ باشند. **مجموعه تهی**

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص **نمی‌کند**.

ب) مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای **هشت** عضو است.

ج) مجموعه $A = \{0, \emptyset\}$ دارای **دو** عضو است.

د) با توجه به مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$: داریم: $5 \in A$ است یا با نماد ریاضی، **$5 \in A$** .

و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، **$12 \notin A$** .

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

۱- مجموعه اعداد اول ۲- مجموعه اعداد زوج ۳- مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰

۴- مجموعه توان‌های طبیعی عدد ۲ **$\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$**

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه برابر

فعالیت

توضیح: هر قطر ۱۲

۱۰	-۱۵	۱۲
۶	۴	۲
-۴	۱۸	-۲

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$$A = \{4, 4, 2\} \Rightarrow n(A) = 3$$

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هر یک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ $B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(B) = 3$ هر کدام سه عضو دارند

آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟ آری

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان است و هر

عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه

A و B برابر است و می‌نویسیم $A = B$.

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا

A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

X الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ $A = \{8, 9, 10\}$ $B = \{7, 8, 9\}$

✓ ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ $C = \{8, 9, 10\}$

✓ ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است. $D = \{8, 9, 10\}$

همان‌طور که دیدید مجموعه $\{8, 9, 10\}$ با مجموعه $\{7, 8, 9\}$ برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان

یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد در این صورت

مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

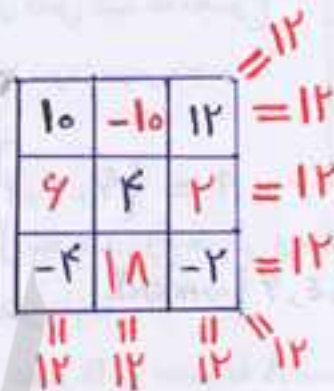
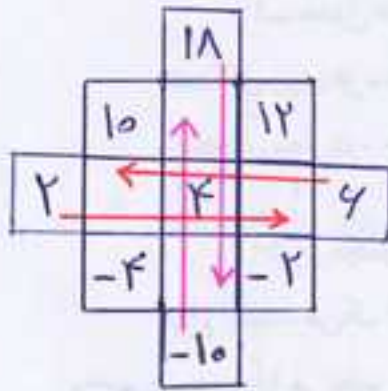
الف) $\left\{ 5, -3, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, 4, \sqrt{25} \right\}$

$\sqrt{25} = 5, \frac{9}{3} = 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2} = \frac{-12}{4} = -3$

$$(-10, -4, +2), (-2, 4, 10), (4, 12, 18)$$

$$(-10) + (-4) + (+2) + (-2) + 4 + 10 + 4 + 12 + 18 = 36$$

$$36 \div 3 = 12 \quad \text{مجموع هر سطر}$$



فصلیت ۱

$$(-10, -4, 2)$$

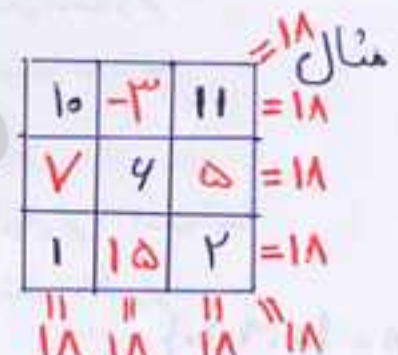
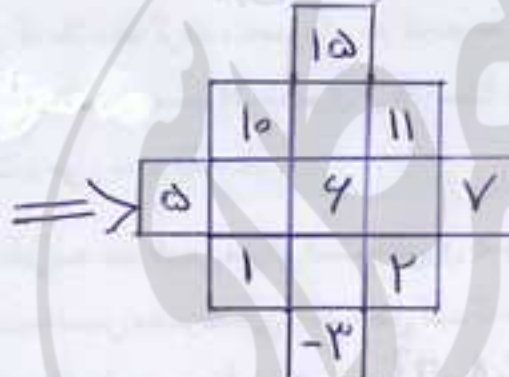
$$(-2, 4, 10)$$

$$(4, 12, 18)$$

$$(15, 11, 7)$$

$$(10, 4, 2)$$

$$(5, 1, -3)$$



$$x = \frac{21}{4} = \frac{37}{4} \quad ; \quad y = \frac{9}{4} \quad ; \quad z = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, -\frac{1}{2} = -0.5, \sqrt[4]{625} = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$

$$\left\{ \sqrt[4]{625}, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, -2, -0.5 \right\} = \left\{ \frac{5}{8}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, -0.5, \frac{5}{8}, \sqrt{-2} \right\} \text{ (ب)}$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$$A = \left\{ \sqrt{25}, \frac{21}{15}, 2^3, \frac{-\sqrt{36}}{-\sqrt{9}} \right\}$$

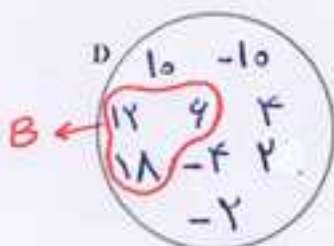
$$B = \left\{ \sqrt[3]{125}, 8, -\frac{4}{2}, \frac{7}{5} \right\}$$

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ \sqrt{25} &= \sqrt{125} \\ \frac{21}{15} &= \frac{7}{5}, \frac{-\sqrt{36}}{-\sqrt{9}} = -\frac{4}{2} \end{aligned}$$

زیر مجموعه

فعالیت

زیر مجموعه



مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید:

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ **آری**

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D = C$ ؟ **بله**

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B زیر مجموعه D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعه C زیر مجموعه D است؟ **بله**، چون هر عضو C، عضوی از D می‌باشد

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

اکنون زیر مجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این

مجموعه چیست؟ $\emptyset = \{ \}$ تهی

آیا عبارت $\{1, 4, -6, 2\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ **بله**، چون هر عضو مجموعه، عضوی از مجموعه D

می‌باشند

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیر مجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

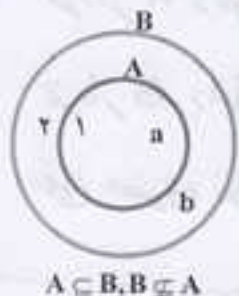
آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟ **خیر**

مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

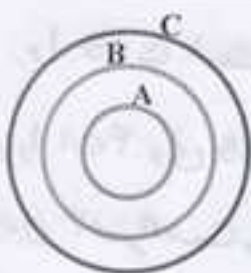
الف) $\{a,b,c,e\} \not\subseteq \{a,b,d\}$: زیرا در مجموعه سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

ب) $\{-1,2\} \subseteq \{4,3,0,1,-1,2\}$: زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه سمت راست است.



ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همه عضوهای A در B قرار دارد و $B \not\subseteq A$ درست است؛ زیرا عضو 2 در B مانند 2 می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

$C \not\subseteq A$ ✓, $B \subseteq A$ ✗, $A \not\subseteq C$ ✗
 $A \subseteq B$ ✓, $B \subseteq C$ ✓, $\emptyset \subseteq A$ ✓

۲- مجموعه‌های A ، B و C را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل):

$A = \{1,3,6,4\}$, $B = \{5,1,2\}$, $C = \{2,5,1,3,6\}$
 $B \not\subseteq A$ ✓, $2 \subseteq B$ ✗, $A \subseteq B$ ✗, $B \subseteq C$ ✓, $A \not\subseteq C$ ✓, $2 \in A$ ✗
 $\{1,4\} \in A$ ✗, $6 \in A$ ✗, $\{5,6\} \subseteq C$ ✓, $5 \in C$ ✓, $0 \subseteq A$ ✗

مثال : همه زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است :

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

۳- مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

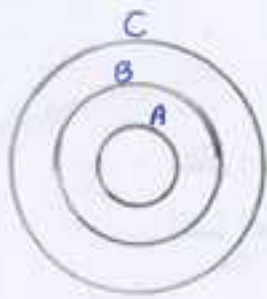
الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲.
 $B = \{a,b,c,d\}$ (ب)
 $A = \{10, 11\}$

پاسخ ۱/۱

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

کار در مثال ①



$C \notin A$ ✓ مجموعه A داخل مجموعه C است پس C زیرمجموعه A نیست

$B \subseteq A$ ✗ مجموعه A را در خودش دارد لذا B زیرمجموعه A نیست

$A \notin C$ ✗ نمودار A داخل نمودار C است پس $A \subseteq C$ می باشد

$A \subseteq B$ ✓ نمودار A داخل نمودار B است پس $A \subseteq B$ می باشد

$B \subseteq C$ ✓ نمودار B داخل نمودار C است پس $B \subseteq C$ می باشد

$\emptyset \subseteq A$ ✓ هیچ عضوی ندارد و زیرمجموعه تمام مجموعه ها می باشد.

②

$A = \{1, 3, 4, 4\}$ $B = \{5, 1, 3\}$, $C = \{2, 5, 1, 3, 4\}$

$B \notin A$ ✓ زیرا $5 \in B$ ولی $5 \notin A$ $3 \subseteq B$ ✗ است زیرا 3 در مجموعه B نیست

$A \subseteq B$ ✗ زیرا $4 \in A$ ولی $4 \notin B$ $B \subseteq C$ ✓ تمام اعضای B در مجموعه C موجود می باشد

$A \notin C$ ✓ چون 4 عضو A است ولی عضو C نیست $2 \in A$ ✗ عدد 2 در مجموعه A نیست

$\{1, 4\} \in A$ ✗ اعضای مجموعه A است پس $\{1, 4\}$ در مجموعه A وجود دارد ولی $\{1, 4\}$ عضو مجموعه A نیست

$4 \notin A$ ✗ عدد 4 عضو A می باشد $\{5, 4\} \subseteq C$ ✓ اعضای مجموعه C است پس $\{5, 4\}$ در مجموعه C وجود دارد

$5 \in C$ ✓ عدد 5 عضو C می باشد $0 \subseteq A$ ✗ است زیرا 0 در مجموعه A نیست

$A = \{10, 11\}$ $\xrightarrow{\text{زیرمجموعه ها}} \emptyset, \{10\}, \{11\}, \{10, 11\}$

$B = \{a, b, c, d\}$ $\xrightarrow{\text{زیرمجموعه ها}} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

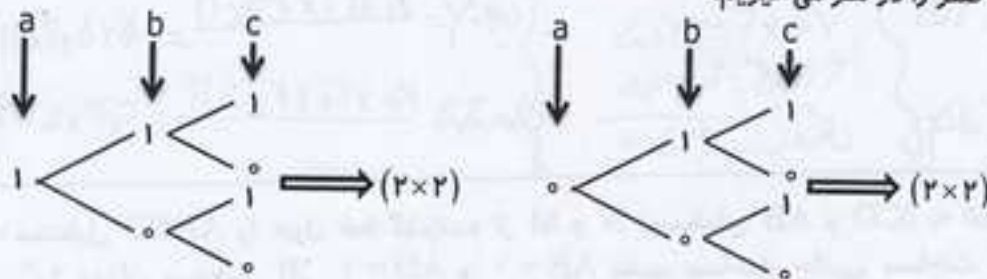
$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

$\{a, b, c, d\}$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی Π عضوی:

مثال: تمام زیر مجموعه های، مجموعه ی $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

هر کدام از اعضای مجموعه A می توانند در زیر مجموعه باشند یا نباشند. یعنی برای هر عضو دو حالت داریم برای بودن عدد یک و برای نبودن عدد صفر را در نظر می گیریم.



کل زیر مجموعه های این مجموعه برابر است با: $2 \times (2 \times 2) = 8$

نتیجه: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی K عضوی برابر است با:

عضوها $\rightarrow a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$

حالت ها $\rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی K عضوی برابر 2^k می باشد.

مثال: مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه ی دو عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B = \{\square, \square\}$ یک زیر مجموعه ی دو عضوی دل خواه از مجموعه ی A باشد که دو خانه خالی دارد که حتما باید پر شود

خانه ی اول	خانه ی دوم
a	a
b	b
c	c
d	d
e	e

* برای پر کردن خانه اول ما هیچ محدودیتی نداریم و به 5 حالت ممکن می توانیم خانه اول را پر کنیم.

** ولی برای پر کردن خانه دوم ما نمی توانیم عضوی را که در خانه اول قرار دادیم

در خانه دوم نیز قرار دهیم پس برای پر کردن این خانه 4 حالت ممکن می باشد.

*** در کل می توانیم این دو خانه را به $5 \times 4 = 20$ حالت ممکن پر کنیم ولی با توجه به این که جابجایی اعضاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a, b\} = \{b, a\}$ پس نصف حالت ها حذف می شوند لذا تعداد زیر مجموعه های دو

عضوی یک مجموعه ی 5 عضوی برابر است با: $\frac{5 \times (5-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

نکته: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی یک مجموعه ی Π عضوی برابر است با: $\frac{n \times (n-1)}{2}$

مثال: مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه ی سه عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B = \{\square, \square, \square\}$ یک زیر مجموعه ی سه عضوی دل خواه از مجموعه ی A باشد که سه خانه خالی دارد که حتما باید پر شود

خ سوم	خ دوم	خ اول
a	a	a
b	b	b
c	c	c
d	d	d
e	e	e

* برای پر کردن خانه اول ما هیچ محدودیتی نداریم و به ۵ حالت ممکن می توانیم خانه اول را پر کنیم.

** ولی برای پر کردن خانه دوم ما نمی توانیم عضوی را که در خانه اول قرار دادیم در خانه دوم نیز قرار دهیم پس برای پر کردن این خانه ۴ حالت ممکن می باشد.

*** برای پر کردن خانه ی سوم، دو تا محدودیت داریم و دو عضو قبلی را نمی توانیم انتخاب کنیم پس برای پر کردن خانه سوم فقط سه انتخاب ممکن می باشد.

**** در مجموع می توانیم این سه خانه را به $5 \times 4 \times 3 = 60$ حالت ممکن پر کنیم ولی با توجه به این که جابجایی اعضاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$ پس $\frac{1}{6}$ حالت ها باقی می ماند و بقیه حذف می شوند، لذا تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی ۵ عضوی برابر است با:

$$\frac{5 \times (5-1) \times (5-2)}{6} = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$$

نکته: وقتی با سه عضو a, b, c می خواهیم سه خانه ممکن را پر کنیم این کار به $(3 \times 2 \times 1 = 6 = 3!)$ ممکن هست.

نکته: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل حالت ها} &\rightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} \\ \text{تعداد تکرار هر حالت} &\rightarrow \end{aligned}$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی یک مجموعه ای n عضوی برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل حالت ها} &\rightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ \text{تعداد تکرار هر حالت} &\rightarrow \end{aligned}$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه ای n عضوی از فرمول $\frac{n!}{r! \times (n-r)!}$ بدست می آید. که مقدار $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ و اثبات فرمول بالا را در سال های بعد خواهید آموخت.

توجه مهم: قرار داد $0! = 1$

مثال: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی و ۸ عضوی یک مجموعه ی ۱۰ عضوی را بدست آورید.

جواب:

$$\frac{10!}{2! \times (10-2)!} = \frac{10!}{2! \times 8!} = \frac{\overset{1}{10} \times \overset{9}{9} \times \overset{8}{8} \times \overset{7}{7} \times \overset{6}{6} \times \overset{5}{5} \times \overset{4}{4} \times \overset{3}{3} \times \overset{2}{2} \times \overset{1}{1}}{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1} = 45$$

$$\frac{10!}{8! \times (10-8)!} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{\overset{1}{10} \times \overset{9}{9} \times \overset{8}{8} \times \overset{7}{7} \times \overset{6}{6} \times \overset{5}{5} \times \overset{4}{4} \times \overset{3}{3} \times \overset{2}{2} \times \overset{1}{1}}{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1} = 45$$

مثال: مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل a باشد ولی e در آن ها نباشد؟

عضوها $\rightarrow a, b, c, d, e$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

جواب: عضو a باید در تمام زیر مجموعه ها باشد پس فقط یک حالت دارد

و عضو e هم تو هیچ کدام از مجموعه ها نیست، پس فقط یک حالت دارد. $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^3 = 8$ حالت ها

ولی برای بقیه اعضا، دو حالت وجود دارد (بودن و نبودن)

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی Π عضوی که ρ تا از اعضای آن در زیر مجموعه هستند و q از اعضای آن در

زیر مجموعه نیستند برابر است با: $2^{n-(p+q)}$

مثال: مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیر مجموعه دارد، که شامل 1 و 2 باشند ولی اعداد 7 و 8 و 9 را شامل نشود.

حل: تعداد زیر مجموعه ها برابر است با: $2^{10-(2+3)} = 2^5 = 32$

زیر مجموعه های محض: همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه به جزء خود مجموعه را زیر مجموعه های محض آن مجموعه می نامند.

نکته: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ی Π عضوی برابر است با: $2^n - 1$

مجموعه عددهای طبیعی را با N نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون مجموعه‌ها را با اعضاها و نمودار ون مشخص کردیم. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال: مجموعه عددهای طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in N$. پس می‌نویسیم: $E = \{2k | k \in N\}$ ← **مجموعه عددهای طبیعی زوج**

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعه عددهایی به شکل $2k$ به طوری که k متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه E علامت « $|$ » خوانده می‌شود «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم:

الف) مجموعه عددهای طبیعی فرد: $O = \{2k - 1 | k \in N\}$

ب) $A = \{x \in N | 6 < x < 11\}$ یا $A = \{x \in N | 7 \leq x \leq 10\}$ $A = \{7, 8, 9, 10\}$

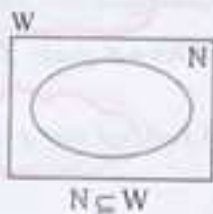
ج) زیرمجموعه‌ای از N که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش پذیر است: $\{3k | k \in N\}$

مثال: مجموعه $A = \{5n + 3 | n \in N\}$ را با عضوهایش مشخص کنید:

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای n یک عدد طبیعی در $5n + 3$ قرار دهید.

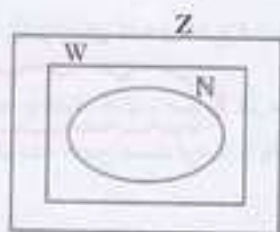
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n + 3$	$\frac{5(1)+3}{8}$	$\frac{5(2)+3}{13}$	$\frac{5(3)+3}{18}$	$\frac{5(4)+3}{23}$	۲۸	۳۳	۳۸	...

بنابراین داریم: $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$



مجموعه عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت $W = \{k - 1 | k \in N\}$ نوشت.



هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $N \subseteq W$

مجموعه عددهای صحیح را با Z نمایش می‌دهیم:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو Z هم هست؛ پس: $N \subseteq W \subseteq Z$

مجموعه های بی پایان معروف عبارت اند از :

مجموعه اعداد صحیح : \mathbb{Z}	مجموعه ی اعداد حسابی : \mathbb{I} یا \mathbb{W}	مجموعه اعداد طبیعی : \mathbb{N}
مجموعه ی اعداد گویا : \mathbb{Q}	مجموعه ی اعداد طبیعی فرد : \mathbb{O}	مجموعه ی اعداد طبیعی زوج : \mathbb{E}
مجموعه ی اعداد گنگ (اصم) : \mathbb{Q}'	مجموعه ی اعداد حقیقی : \mathbb{R}	مجموعه ی اعداد اول : \mathbb{p}

مجموعه ی اعداد طبیعی: اعداد طبیعی اعدادی هستند که برای شمارش (Counting Numbers) به کار می روند.

در ریاضیات، مجموعه اعداد طبیعی را با نماد \mathbb{N} یا \mathbb{N} نمایش می دهند. این حرف از آغاز واژه انگلیسی Natural Numbers به معنای اعداد طبیعی، گرفته شده است. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. به اعداد طبیعی اعداد صحیح مثبت (positive integers) نیز می گویند.

مجموعه ی اعداد حسابی : اعداد حسابی همان اعداد طبیعی هستند که صفر هم به آنها اضافه شده است. به این اعداد، اعداد کامل (Whole Numbers) نیز گفته می شود. مجموعه اعداد حسابی عبارت اند از $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ اعداد حسابی اعداد صحیح نامنفی (non-negative integers) می باشند.

مجموعه ی اعداد طبیعی زوج: مجموعه ی اعداد طبیعی زوج را با نماد \mathbb{E} نمایش می دهیم.

$$\mathbb{E} = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه ی اعداد طبیعی فرد: مجموعه ی اعداد طبیعی فرد را با نماد \mathbb{O} نمایش می دهیم.

$$\mathbb{O} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه ی اعداد صحیح: مجموعه ی اعداد صحیح، مجموعه ای شامل اعداد طبیعی، صفر و قرینه ی اعداد طبیعی می باشد و این مجموعه را در ریاضی معمولاً با \mathbb{Z} یا \mathbb{Z} (ابتدای کلمه zahlen که در زبان آلمانی به معنی اعداد است) نشان می دهند.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه ی اعداد گویا: اعداد گویا، اعداد کسری هستند که از حاصل تقسیم دو عدد صحیح بدست می آیند، به شرطی که عدد دوم صفر (مخرج) نباشد. یا هر عدد کسری که صورت و مخرج آن یک عدد صحیح باشد و مخرج آن مخالف صفر باشد یک عدد گویا می باشد.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

حرف \mathbb{Q} از ابتدای کلمه ی خارج قسمت "quotient" گرفته شده در واقع هر عدد گویا خارج قسمت تقسیم دو عدد صحیح می باشد.

مجموعه ی اعداد گنگ (اصم): هر عدد حقیقی که گویا نباشد را یک عدد گنگ می نامیم. هر عددی که نتوان آن را به صورت یک کسر که صورت و مخرج آن یک عدد صحیح هست نوشت را یک عدد گنگ می نامیم.

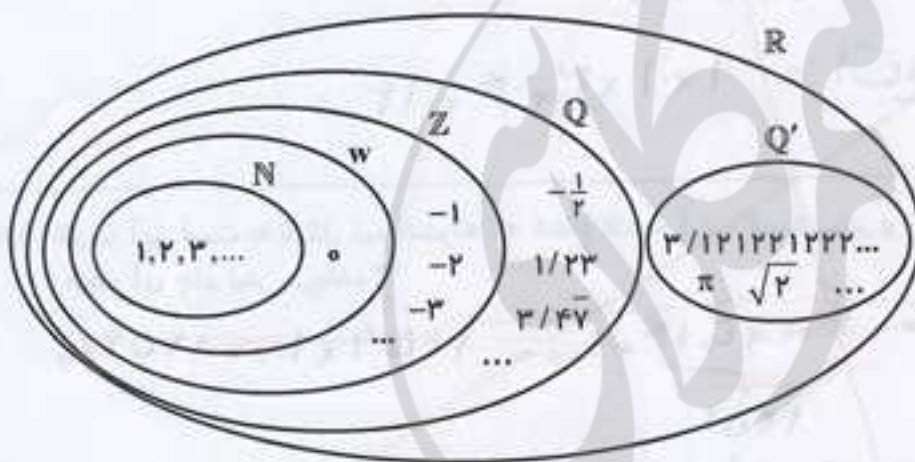
$$Q' = \{x \mid x \in R, x \notin Q\}$$

مجموعه ی اعداد حقیقی: مجموعه ای که شامل تمام اعداد گویا و گنگ می باشد را مجموعه ی اعداد حقیقی می نامیم. مجموعه ی اعداد حقیقی (Real numbers) را با حرف R نمایش می دهیم.

زیر مجموعه (Subset): مجموعه ی A را زیر مجموعه ی B گوئیم هر گاه هر عضو مجموعه ی A ، عضوی از مجموعه ی B باشد. و آن را با نماد $A \subset B$ نمایش می دهیم.

مجموعه ی اعداد طبیعی زیر مجموعه ی مجموعه ی اعداد حسابی می باشد و مجموعه ی اعداد حسابی زیر مجموعه ی اعداد صحیح می باشد و مجموعه ی اعداد صحیح زیر مجموعه ی مجموعه ی اعداد گویا می باشد.

و مجموعه ای اعداد گویا زیر مجموعه ی مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد. $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R, Q' \subset R$



$$C = \{ \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \}$$

$$A = \{ -5, -4, -3, \dots, 4 \}$$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید:

الف) مجموعه عددهای صحیح فرد C (ب) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$

ج) $B = \{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq Q$

تمرین

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

برابر است؟ **صفر اول**

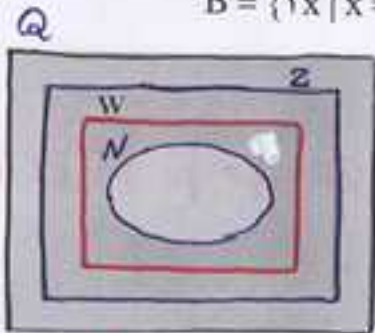
$B = \{x | x \in A, x' \leq 2\}$, $C = \{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$, $D = \{x | x \in A, x' = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند A , B , و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه

گرفت $A \subseteq C$ ؟ **بله صفر اول**

۳- تمام زیر مجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید: **صفر اول**

الف) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 3\}$ (ب) $B = \{2x | x = 0, 2, 3\}$



۴- نمودار رویه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q , W , N و \mathbb{Z}

را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام گذاری و با علامت \subseteq با هم

مقایسه کنید. $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

۵- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید:

- الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. **X**
- ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. **✓**
- ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. **✓**
- د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. **✓**

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{x \mid x \in A, x^2 \leq 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$(-2)^2 = 4 \Rightarrow -2 \notin B, \quad (-1)^2 = 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \in B, \dots$$

$$C = \{x \mid x \in A, -1 \leq x \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$-2 < -1 \Rightarrow -2 \notin C, \quad 2 > 1 \Rightarrow 2 \notin C$$

$$D = \{x \mid x \in A, x^4 = 1\} \Rightarrow D = \{-1, 1\}$$

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{و} \quad (-2)^4 = 16 \Rightarrow -2 \notin D, \dots$$

تمرین ۱

۱

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \subseteq B \subseteq C$$

۲

بنابراین داریم $A \subseteq C$ است زیرا تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B وجود دارد ($A \subseteq B$)

و تمام اعضای مجموعه B در مجموعه C موجود است ($B \subseteq C$) بنابراین تمام اعضای مجموعه A

در مجموعه C موجود است لذا داریم $A \subseteq C$

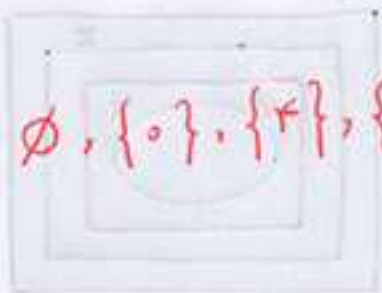
$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x+1=3\} \Rightarrow 2x+1=3 \stackrel{-1}{\Rightarrow} 2x=2 \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} x=1$$

۳

$$\Rightarrow A = \{1\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه}} \emptyset, \{1\}$$

$$B = \{2x \mid x = 0, 2, 3\} = \{0, 4, 6\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه}} \emptyset, \{0\}, \{4\}, \{6\}$$

$$\{0, 4\}, \{0, 6\}, \{4, 6\}, \{0, 4, 6\}$$



فعالیت

۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید.

مهتر ۱۱/۱

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

۲- دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید و

مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ب) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

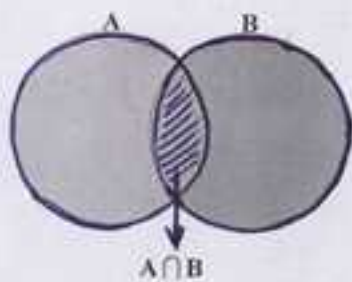
ج) $\{1, 2, 3\}$ = مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم).

د) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم).

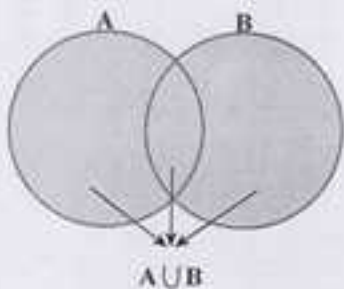
اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای شامل



همه عضوهای است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

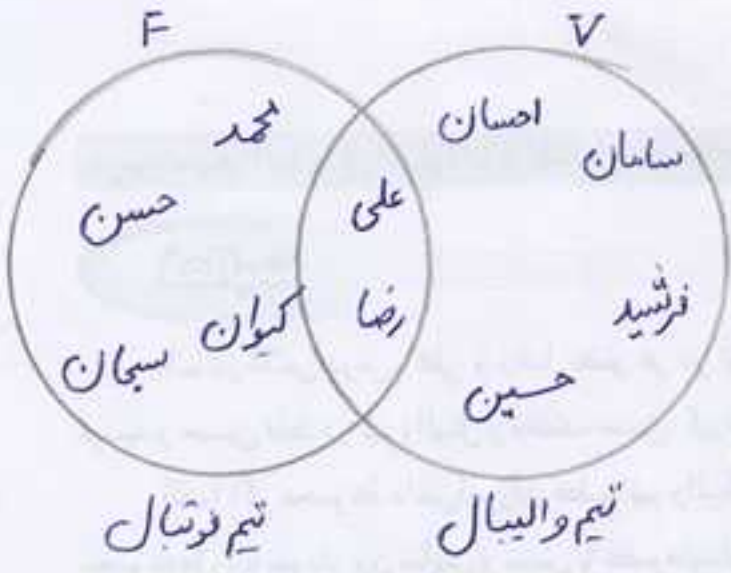
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B ،



مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

فعاآآآ (أ) الف



$$F = \{ \text{رضا, آلى, كآوان, سآوان, آسن, محمد} \}$$

$$V = \{ \text{رضا, آلى, آآآ, فرآآآ, سامان, اصان} \}$$

$$A = \{ \text{رضا, آلى} \}$$

$$B = \{ \text{رضا, آلى, كآوان, سآوان, آسن, محمد, آآآ, فرآآآ, سامان, اصان} \}$$

$$n(B) = 10, n(A) = 2, n(V) = 6, n(F) = 6$$

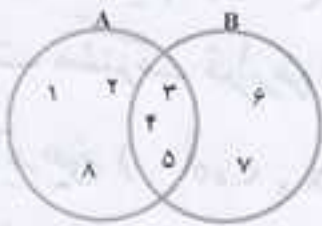
$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4 \} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

2

$$B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3 \} = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

$$A \cap B = \{ 1, 2, 3 \}, A \cup B = \{ -2, -1, 0, \dots, 6 \}$$





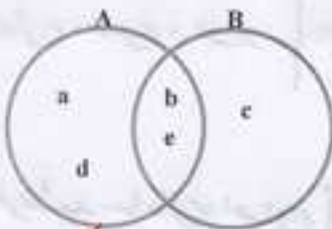
مثال: با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A \cup B$ و $A \cap B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

فعالیت

۱- دو مجموعه $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, e\}$ را در نظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار وین نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:

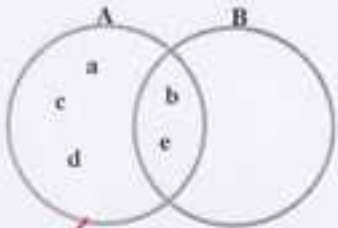


پاسخ حمیده ✓

الف) درباره‌ی درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.

$$A \cap B = \{a, b, e\} \text{ زیرا پاسخ زهرا نادرست است}$$

در صورتی که $A \cap B = \{b, e\}$ می‌باشد و بقیه جوابها صحیح می‌باشند



پاسخ ریحانه ✓



پاسخ زهرا ✗



پاسخ حنا ✓

ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۱۲/۱ صبح

۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم:

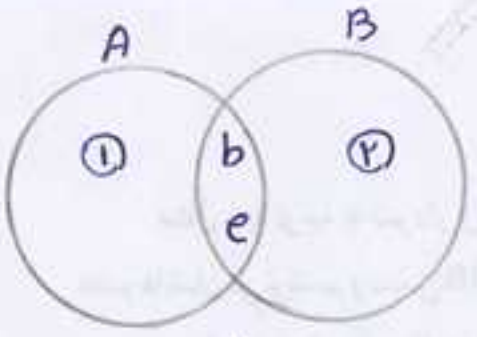
۱۲/۱ صبح

$$V - F = \{ \quad \quad \quad \} \quad F - V = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$F - V = \{ \text{سبحان, کیوان, حسن, محمد} \}$$

$$V - F = \{ \text{حسین, فرشید, سامان, احسان} \}$$

① فعالیت



با توجه به اینکه داریم $A \cap B = \{b, e\}$ است، این دو عضو را در قسمت مشترک قرار می دهیم

۳ عضو دیگر یعنی (a, c, d) داریم که هر کدام می توانند در ناحیه ۱ یا ۲ قرار بگیرند پس برای هر کدام (۲ حالت) داریم بنابراین در مجموع $(2 \times 2 \times 2 = 8)$ حالت داریم

②

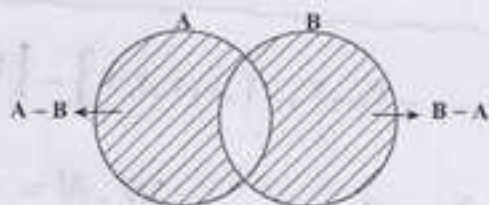
برای نوشتن اعضای مجموعه $F-V$ ، ابتدا تمام اعضای مجموعه F را می نویسیم پس اعضای مشترک یعنی $(V \cap F)$ را حذف می کنیم

$$F-V = \{ \text{کیوان، ساجان، حسن، محمد، رضا، علی، کیوان، ساجان، حسن، محمد} \} = \{ \text{محمد، حسن، ساجان، کیوان} \}$$

$$V-F = \{ \text{حسین، فرزید، سامان، احسان، رضا، علی، حسین، فرزید، سامان، احسان} \} = \{ \text{احسان، سامان، فرزید، حسین} \}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ هائور خورده است:

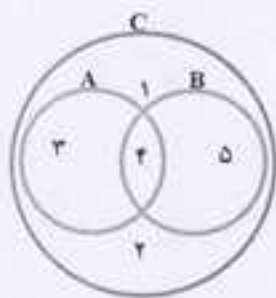
$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر $A = \{a, b, c, d, e, k\}$ و $B = \{c, d, k, f, s, t\}$ در این صورت:

$$A - B = \{a, b, e\} \quad \text{و} \quad B - A = \{f, s, t\}$$

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟

- الف) $A \subseteq C$ ✓ ب) $B \subseteq C$ ✓ ج) $C \subseteq (A \cup B)$ ✗
 د) $(A \cup B) \subseteq C$ ✓ ه) $2 \in (A \cup B)$ ✗ و $4 \notin (A \cap B)$ ✗
 ز) $A \cup B = A$ ✗ ح) $5 \in (A \cup B)$ ✓ ط) $4 \in (A \cup B)$ ✓

۲- مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B

صفحه ۱۳/۱

بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارنده ۱۸ باشد ولی شمارنده ۱۲ نباشد.

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارنده ۱۲ و هم شمارنده ۱۸ باشند.

صفحه ۱۳/۱

۳- مجموعه‌های $(Z - N)$ ، $(N - Z)$ و $(W - N)$ را تشکیل دهید.

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به

عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A) = k$.

مثلاً اگر $A = \{۲, ۴, ۶, ۷\}$ در این صورت $n(A) = ۴$.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 9, 12\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 9, 18\}$$

س٢
س٣

$$B - A = \{9, 18\} \text{ (الف)}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \text{ (ب)}$$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \text{ س٣}$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{\} = \emptyset, \quad \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$

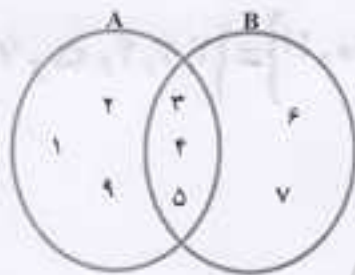


تمرین

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

- الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$
 هـ) $A - B$ و) $C - B$ ز) $(A - C) \cup (B - C)$ ح) $(A \cup B) - C$
 ۱۴/۱ صحیح! ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارات‌های درست را با \checkmark و گزاره‌های نادرست را با \times مشخص کنید:



- الف) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ (ب) \checkmark $B - A = \{6, 7\}$ (الف) \checkmark
 ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$ (ج) \times
 د) $n(A \cup B) = 8$ (د) \checkmark
 هـ) $A - B = B - A$ (هـ) \times
 و) $n(A - B) = n(B - A)$ (و) \times

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

- ۱) B ۲) A ۳) اجتماع
 ۴) زیرمجموعه ۵) $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه اجتماع همان دو مجموعه است.

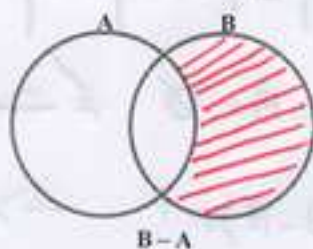
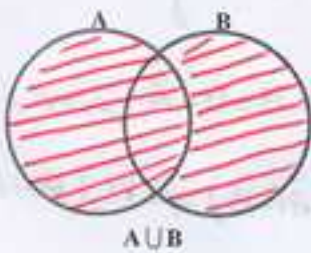
ب) هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه $A \cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیرمجموعه هر یک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه A است.

هـ) اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه B مساوی است.

۴- در هر یک از شکل‌های زیر مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.



$A - C =$ آبی ۱۴

$C =$ قرمز

حل تمرين

سؤال 1

ا) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow n(A \cup B) = 9$

ب) $B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\} \Rightarrow n(B \cup C) = 8$

ج) $A \cup C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \Rightarrow n(A \cup C) = 9$

د) $A \cap B = \{9\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

هـ) $A - B = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow n(A - B) = 4$

و) $C - B = \{8, 10, 11\} \Rightarrow n(C - B) = 3$

ز) $(A - C) \cup (B - C) = \{2, 4, 6, 9\} \cup \{3, 5, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

ح) $(A \cup B) - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 7, 8, 10, 11\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

ب) $A \cap A = \{2, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow A \cap A = A$

ج) $A \cap \emptyset = \{ \} \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$

د) $B \cup B = \{1, 5, 7, 9, 9\} \Rightarrow B \cup B = B$

هـ) $C \cup \emptyset = \{1, 7, 8, 10, 11\} \Rightarrow C \cup \emptyset = C$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = \{1, 2, 9\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\} = A$

$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

ثلاثة

ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 9\} \cup \{4, 7\} = \{1, 2, 4, 7, 9\}$

ب) $A = B = \emptyset$ ليس $A - B = B - A$ است

و) $n(A - B) = 3, n(B - A) = 2 \Rightarrow n(A - B) \neq n(B - A)$

در سال گذشته برای محاسبه احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را S ، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید:



(الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

(ب) عدد رو شده اول باشد.

(ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

(د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل: الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم:

$$A = \{3, 6\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; n(A) = 2, n(S) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ب) $B = \{2, 3, 5\}; n(B) = 3$; پیشامد رو شدن عدد اول: B

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ج) $C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = 0$; پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶: C

$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow \text{احتمال رخ دادن آن صفر است}$$

(د) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$; پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷: D

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \text{احتمال رخ دادن آن حتی است}$$

فعالیت



۱- با توجه به چرخنده مقابل، همه حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: $S = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(S) = 3$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$A = \{3, 1\}$ (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B = \{1, 2\}$ - عقربه روی اعداد کوچک‌تر از ۳ بایستد

$C = \{2, 3\}$ - عقربه روی اعداد اول بایستد $D = \{2\}$ - عقربه روی عدد زوج بایستد

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی هایتان مقایسه کنید.

ج) همه زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعه همه حالت‌های ممکن $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعه A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، $\frac{4}{10}$ باشد.

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و

C را تشکیل دهید و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس است؟ چرا؟

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad 16$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(C) = 5 \Rightarrow P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

فعالیت قسمت ب)

۱- پیشامد آن که روی ۱ بایستد $E = \{1\} \Rightarrow n(E) = 1 \Rightarrow P(E) = \frac{1}{3}$

۲- پیشامد آن که روی ۲ بایستد $D = \{2\} \Rightarrow n(D) = 1 \Rightarrow P(D) = \frac{1}{3}$

۳- پیشامد آن که روی ۳ بایستد $F = \{3\} \Rightarrow n(F) = 1 \Rightarrow P(F) = \frac{1}{3}$

۴- پیشامد آن که کوچکتر از ۳ بایستد $B = \{1, 2\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$

۵- پیشامد آن که عقربه روی عدد فرد بایستد $A = \{1, 3\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$

۶- عقربه روی اعداد اول بایستد $C = \{2, 3\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{2}{3}$

۷- پیشامد آن که روی ۱ یا ۲ یا ۳ بایستد $G = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(G) = 3 \Rightarrow P(G) = \frac{3}{3} = 1$

۸- پیشامد آن که روی هیچ کدام نایستد $H = \{\} = \emptyset \Rightarrow n(\emptyset) = 0$

$$\Rightarrow P(H) = \frac{0}{3} = 0$$

$$P(E) = P(D) = P(F) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{3}$$

ج) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

کاردرکلاس الف) $A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 4$ $n(S) = 10$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ب) عدد روی کارت اول باشد $B = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 4$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

عدد خارج شده کوچکتر از ۷ و بزرگتر از ۲ باشد $E = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **سؤال!**

$B = \{4, 6\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $C = \{2\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$

$D = \{1, 2\} \Rightarrow P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

تمرین

۱- اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده زوج باشد. A ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگتر باشد. B

ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. C د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. D

۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید

هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د، د، ب) نمایش دهید. ثانیاً چقدر احتمال دارد این

صفر ۱۷/۱

خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی

صفر ۱۷/۱

از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

$\frac{3+4}{3+4+5} = \frac{7}{12}$

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{4}{3+4+5} = \frac{4}{12}$ ب) این مهره سبز نباشد. $\Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.

۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد:

صفر ۱۷/۱

(اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(S) = 36$)

الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. $A \rightarrow \frac{1}{6}$

ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $B \leftarrow \frac{1}{6}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. $C \rightarrow \frac{1}{9}$

د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $D \leftarrow \frac{1}{6}$

خوبانی

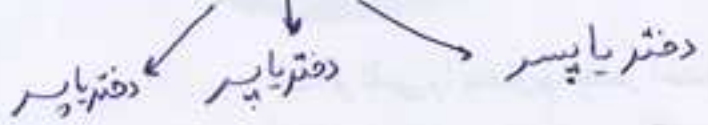
در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگویم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگویم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟
در واقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگویم: در همه شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزیه نخستین تعریف نشده‌ها است، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

سؤال ۲

$$S = \{ (پ, پ, پ), (د, پ, پ), (پ, د, پ), (د, د, پ), (پ, پ, د), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د) \}$$

برای هر کدام از فرزندان ۲ حالت وجود دارد (دختر یا پسر)

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$



$$A = \{ (پ, د, د), (د, د, پ), (پ, د, د) \} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

سؤال ۳

الف) $B \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
 $S \Rightarrow n(S) = 4 + 3 + 5 = 12$

ب) $P(G) = \frac{5}{12} \Rightarrow P(G') = 1 - P(G) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

ج) $P(R) + P(G) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

احتمال قرمز آمدن
 احتمال سبز آمدن

سؤال ۴

تاس اول
 تاس دوم
 $n(S) = \frac{4}{4} \times \frac{4}{4} = 16$
 حالت حالت

الف) $A = \{ (۲, ۲), (۲, ۳), (۲, ۵), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۵), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۵) \} \Rightarrow n(A) = 9$

تعداد حالت ها = $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{16} = \frac{1}{4}$

ب) $B = \{ (۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۵, ۵), (۶, ۶) \} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ج) $C = \{ (۳, ۳), (۳, ۶), (۶, ۳), (۶, ۶) \} \Rightarrow n(C) = 4 \Rightarrow P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

د) $D = \{ (۱, ۶), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۳), (۵, ۲), (۶, ۱) \} \Rightarrow n(D) = 6 \Rightarrow P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...
(سورة النجم، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستاره خورشید. ستاره هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشاندند.

عددهای حقیقی



«... و أخاط بما لذیهم و أخصن كل شئ عذدا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید گنجی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین مفکر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. گنجی به روشی گملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی نوشت عدد π که عددی **حقیقی و گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خنار چنین بیان می‌کند: «به نام تو که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است»

فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچکتر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W} x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگتر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z} x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ اعداد ۳، ۴ و ۵
 نادرست $1 > 3$ ، نادرست $2 > 3$ ، $3 \geq 3$ ، $4 \geq 3$ ، $5 \geq 3$ ، $1, 2, 3, 4, 5$

۲- می‌خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

صبحه ۱۹/۱

روش بهار

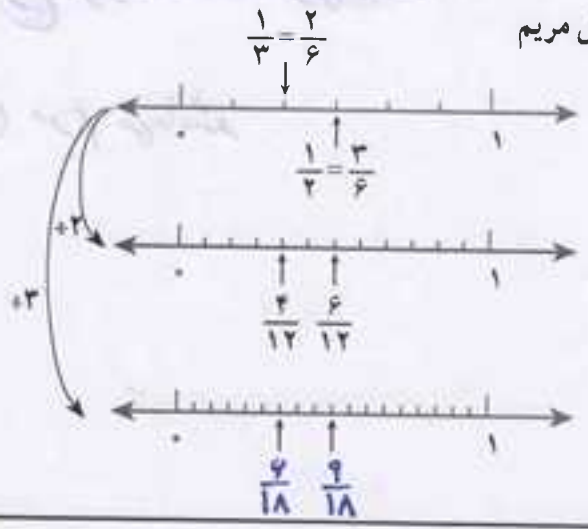
$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18}, \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

روش مریم



۱- ابتدا هر دو کسر را هم مخرج کرده و بسین اعداد $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ را روی محور مشخص کرده است

۲- برای نسبت آوردن یک عدد بین این دو عدد هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده، لذا یک واحد

به دوازده قسمت مساوی تقسیم می شود بنابراین $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ و $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ می باشد و کسر $\frac{5}{12}$ طبق

شکل بین این دو عدد قرار می گیرد

۳- در این مرحله به جای تقسیم هر کدام از قسمت های کوچک به ۲ قسمت مساوی، هر کدام از آن ها

را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می کند؛ لذا واحد به ۱۸ قسمت مساوی تقسیم می شود

بنابراین $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ و $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ می باشد و دو کسر $\frac{7}{18}$ و $\frac{8}{18}$ بین این دو عدد قرار می گیرد

بهار دقیقاً کار مريم را انجام داده است ولی عدد رسم نکرده است. روشن مريم مفهومی تر

ولی روشن بهار سریع تر می باشد

می توانیم بگوییم روشن بهار نتیجه ی روشن مريم می باشد

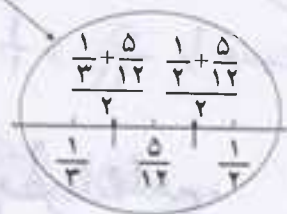
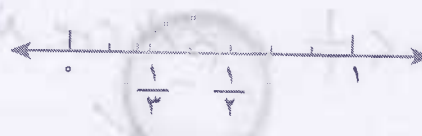
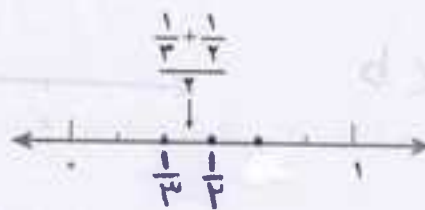
روش عطیه

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

روش مهناز



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بی‌شمار، کسر پیدا کرد. **صفحه ۲۰/۱**
 ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟ **خیر، چون بین دو عدد گویا**
 ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ **خیر، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد**
 د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

کار در کلاس

صفحه ۲۰/۱

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲- بین $-\frac{1}{2}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

روش دوم
صفحه ۲۰/۲

$$-1 = -\frac{2}{2} = -\frac{2 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{6}{6} < -\frac{5}{6}, -\frac{4}{6} < -\frac{1}{2} = -\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{3}{6}$$

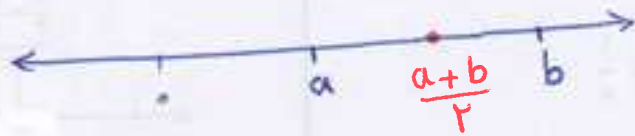
فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.

مختار پس از مشخص کردن جای دو عدد روی محور از خاصیت میانگین دو عدد نگه

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$



گرفته است

میانگین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ برابر $\frac{5}{12}$ می باشد پس داریم $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{4}$

در مرحله ی دوم ابتدا میانگین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$ و سپس میانگین $\frac{1}{4}$ و $\frac{5}{12}$ را بدست آورده است
عطیه هم دقیقاً از روش مختار استفاده کرده است، فقط محور رسم نکرده است.

(الف)

روش مردم

تعداد زیادی

مردم می توانند یک واحد را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کند و تعداد زیادی کسری این دو عدد بنویسد
اگر هر قسمت را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹ عدد گویا بین این دو کسری می تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{300}{600} \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{200}{600}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{1}{4}$$

اگر هر قسمت را به ۱۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹۹ عدد گویا بین این دو کسری می تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{3000}{6000} \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{2000}{6000}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{2001}{6000}, \frac{2002}{6000}, \frac{2003}{6000}, \dots, \frac{2999}{6000} < \frac{1}{4}$$

در روش مختار نیز می توانیم به دفعات زیادی میانگین دو عدد را محاسبه کنیم

نتیجه: بین دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \quad , \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{3}{4}$$

کاربرد کلاس

دو کسر را هم مخرج می کنیم پس $\frac{8}{20} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{15}{20}$ را می نویسیم

کاردرکلاس 1:

می دانیم $a < \frac{a+b}{2} < b$ لذا داریم

$$\text{کسر اول} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{24}{20}}{2} = \frac{24}{40} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{24}{40} < \frac{3}{4} \quad (1)$$

با اعدادی روش بالا داریم

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{24}{40}}{2} = \frac{\frac{39}{40}}{2} = \frac{39}{80}, \quad \frac{\frac{24}{40} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{53}{40}}{2} = \frac{53}{80} \quad (2)$$

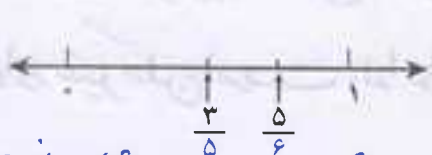
$$(1), (2) \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{39}{80} < \frac{24}{40} < \frac{53}{80} < \frac{3}{4}$$

کاردرکلاس 2:

$$\text{کسر اول} = \frac{-\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{-1 + (-\frac{3}{4})}{2} = \frac{-\frac{7}{4}}{2} = -\frac{7}{8}, \quad \frac{-\frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{-\frac{5}{4}}{2} = -\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -1 < -\frac{7}{8} < -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2}$$



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسره‌های $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده

از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ **خیر، این روش مناسبی برای مقایسه نیست**

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را

مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید: $[9, 8, 4, 5] = 360$

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{315}{360}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار

نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55$$

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

$$\frac{5}{6} = 0.83$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید. **صغری ۲۱/۱**

۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسره‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{1}{7} = 0.14$$

$$\frac{1}{9} = 0.11$$

$$\frac{7}{6} = 1.16$$

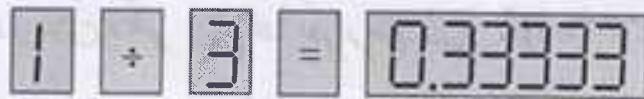
$$\frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{3} = 0.33$$

$$\frac{3}{8} = 0.37$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می‌دهد؟ **پاسخ یاز - ۸ رقم**

ب) بین مقادیر اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ **صغری ۲۱/۱**



در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{5}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\dots = 0.3\bar{3}$$

$$\frac{7}{6} = 1.1666\dots = 1.1\bar{6}$$

فعالیت 1 برای مقایسه‌ی اعداد گویا با مخزج‌های مساوی و کوچک استفاده از محور روشن

مناسبی است. در صورتی که مخزج‌ها بزرگ باشد تقسیم یک واحد به قسمت‌های مساوی کار دشوار حتی در خیلی موارد غیر ممکن است. لذا برای این سؤال روشن شاهد روشن مناسبی نیست

* یکی از روش‌های مناسب برای مقایسه‌ی کسرها هم مخزج کردن آن‌ها باشد ولی این روش نیز به نوبه‌ی خود محدودیت‌های دارد و در صورتی که مخزج کسرها بزرگ باشد بدست آوردن «ک.م.م» آن‌ها بسیار وقت‌گیر است

* مجید از ابزار استفاده کرده است و ابتدا صورت را بر مخزج تقسیم کرده و بعد اعشاری آن‌ها را بدست آورده و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کرده، استفاده از ماشین حساب در زندگی روزمره و کسرهای واقعی بسیار مناسب‌تر از دو روش بالاست باشد این روش هم محدودیت‌هایی دارد چون ممکن است ماشین حساب نداشته باشیم نتیجه: برای شروع کار روشن شاهد مناسب‌ترین روش است و در انتها روشن مجید در صورت داشتن ماشین حساب بسیار مناسب‌تر است

فعالیت 2 بی) برخی اعداد تعداد رقم‌های اعشاری محدودی دارند مثلا $\frac{1}{5} = 0.2$ که فقط یک رقم اعشاری دارد. در برخی دیگر رقم‌ها تکرار می‌شود مثلا $\frac{1}{3} = 0.3333...$ که رقم 3 تکرار می‌شود و برخی از آن‌ها برخی ارقام تکرار و برخی تکرار نشده‌اند مثلا $\frac{1}{6} = 0.1666...$

کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید:

$$\frac{5}{11} = 0,45$$

$$\frac{7}{9} = 0,7$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$$

$$\frac{7}{22} = 0,31\bar{8}$$

$$\frac{3}{20} = 0,15$$

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید:

$$1 + \frac{3}{2} = 2,5$$

$$-1 + \frac{3}{4} = -0,25$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24} = 0,291\bar{6}$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1,6\bar{6}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{3}{5} = -0,6$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{1}{4} - \frac{2}{2}} \div \frac{1}{3} = \frac{\frac{4}{4}}{-\frac{3}{4}} \times \frac{3}{14} = -\frac{5}{14} = -0,357\bar{1}$$

صغری ۲۲/۱

$$\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} = -2\frac{4}{12} - 3\frac{4}{12} + 4\frac{7}{12} = -1\frac{3}{12} = -1,25$$

صغری ۲۲/۱

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div \left(2 \div \frac{-6}{5}\right)$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

الف) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

ب) $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}$

ب) $0, -\frac{1}{3}$ صغری ۲۲/۱

$$\frac{10}{11} = \frac{130 \times 2}{143 \times 2} = \frac{260}{286} < \frac{271}{286}, \frac{272}{286}, \frac{273}{286} < \frac{12}{13} = \frac{132 \times 2}{143 \times 2} = \frac{264}{286}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{14} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = -0.33$$

نکته: مرتب و تقسیم بر جمع و تفریق الویت دارد ولی چون تقسیم ابتدا کرده مرحله اول تقسیم و سپس ضرب در مرحله دوم جمع و تفریق را باید انجام دهیم

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \div \frac{4}{5}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \times \frac{5}{4}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (\frac{5}{2})$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \times (-\frac{2}{5}) = \frac{5}{6} + \frac{7}{20} = \frac{143}{120} = 1.3583$$

سؤال ۳ قسمت الف)

$$[1, 3, 4, 1, 2] = 24, \quad -\frac{35}{6} = -\frac{23}{4}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{21}{24}, \quad -\frac{7}{4} = -\frac{14}{24}, \quad \frac{3}{4} = \frac{18}{24}, \quad \frac{1}{2} = \frac{12}{24}, \quad -\frac{23}{6} = -\frac{92}{24}$$

$$\Rightarrow -\frac{92}{24} < -\frac{14}{24} < \frac{18}{24} < \frac{21}{24} < \frac{12}{24} < \frac{35}{6} < -\frac{23}{4} < \frac{7}{8} < \frac{1}{2} < 2$$

قسمت ب)

$$\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}, \quad -\frac{5}{9} = -\frac{10}{18}, \quad -\frac{3}{4} = -\frac{9}{12}, \quad \frac{56}{13} = 4\frac{4}{13} = \frac{56}{13}$$

$$4\frac{3}{5} = 4\frac{39}{65}, \quad 2,75 = 2\frac{75}{100} = 2\frac{3}{4} = 2\frac{21}{28}$$

$$-\frac{10}{12} < -\frac{9}{12} < 2\frac{18}{28} < 2\frac{21}{28} < 4\frac{20}{65} < 4\frac{39}{65} \Rightarrow -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{14}{5} < 2,75 < \frac{56}{13} < 4\frac{3}{5}$$

روش دوم استفاده از ماشین حساب

$$-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots < 0$$

$$-\frac{1}{4} < \frac{0}{4} \Rightarrow -\frac{4}{12} < \frac{0}{12} \Rightarrow -\frac{4}{12} < -\frac{3}{12}, -\frac{2}{12}, -\frac{1}{12} < \frac{0}{12} = 0$$



فعالیت

۱- پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.
 $A = \frac{7}{4}, B = \frac{4}{3}, C = \frac{9}{4}, D = \frac{10}{4}, E = \frac{11}{4}$

۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ مساوی $1/4$ است، آن را روی محور نشان دهید.
 ۳- معلم از دانش آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{2}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش آموزان از ماشین حساب های مختلف استفاده می کردند، تعداد رقم هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب ها را در زیر می بینید. با توجه به آنها به سؤال های زیر پاسخ دهید:

1.4142136 1.414213562

1.41421356237

صفحه ۲۳/۱ => - چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد؟
 - چرا این تفاوت در ماشین حساب های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی شود؟

- با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم های اعشاری دیده می شود؟
 - مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان داده شده برای $\sqrt{2}$ ، تناوبی می بینید؟

اعداد گنگ

عددهایی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π و e که تعداد ارقام اعشاری آنها بی شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می گوئیم. مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می دهیم.

$\sqrt{2}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال های آینده می خوانید.

★ با توجه به اینکه رقم نهم ۶ می باشد وقتی این رقم حذف می شود یک واحد به رقم هشتم یعنی عدد

اصافه می شود (چون ۶ > ۵ است) $1,4142135\boxed{6} \rightarrow 1,4142136$

★ چون رقم یازدهم برابر ۳ می باشد وقتی این رقم حذف می شود رقم قبلی تغییری نمی کند

(چون ۳ < ۵ است) $1,41421356\boxed{3} \rightarrow 1,414213562$

اثبات کنید چرا $\sqrt{2}$ گنگ است

اثبات: فرض می کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد پس وجود دارد کسری مانند $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)

به طوری که داریم $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شده است یعنی $(a, b) = 1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ عددی زوج است

چون a^2 زوج است لذا a عددی زوج است پس $a = 2k$ (k عددی طبیعی است)

$a^2 = 2b^2 \xrightarrow{a=2k} (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$

بنابراین b^2 عددی زوج است پس b هم عددی زوج است

از ① و ② داریم $(a, b) \neq 1$ چون هر دو زوج می باشند پس کسر $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شده

است. چون فرض گرفته بودیم $\frac{a}{b}$ ساده شده است پس فرض مان باطل است

یعنی کسر ساده شده نمی داریم که $\sqrt{2}$ یا آن برابر باشد پس $\sqrt{2}$ عددی گنگ است

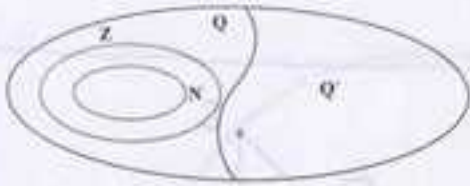
عدد π نیز گنگ است. در زیر عدد π تا 30° رقم اعشار نوشته شده است؛ اما در محاسبات، معمولاً تا

دو رقم اعشار π استفاده می شود: $\pi \approx 3.141592653589793238462643383279$

به طور کلی جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است؛ مانند $\sqrt{15}$ ، $\sqrt{6}$ ، ... (عددهایی

مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است.)

مثال: مجموعه های \mathbb{N} و \mathbb{Z} و \mathbb{Q} و \mathbb{Q}' به کمک



نمودار ون، مشخص شده است.

مثال: $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}'$ ، $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$ ، $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}'$ ، $0 \in \mathbb{Q}$ ، $0.2002000200002000002 \dots \in \mathbb{Q}'$

کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

درست

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}'$

نادرست

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

درست

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}'$

نادرست است

($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ است)

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ است

فعالیت

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می توان نوشت؟ بی شمار عدد گویا می توان نوشت

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم؛ متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور

می توان پیدا کرد؟ متناظر با هر عدد فقط یک نقطه وجود دارد در كل من شمار نقطه داریم

ج) روی محور نقطه نمایش $\sqrt{2}$

را پیدا کنید.



د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می دهد، آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ

می شود؟ آیا $\sqrt{2}$ نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط

به وجود می آورد؟ چرا؟ خیر زیرا این هر دو عدد گویا می شمار عدد گنگ داریم که رنگ نمی شود

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{10}$ روی محور به صورت زیر است:



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می کنیم. نقطه B

روی محور عدد $\sqrt{10}$ را نمایش می دهد.

$OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$

الف) بین هر دو عدد گویا بیشتر عدد گویا وجود دارد

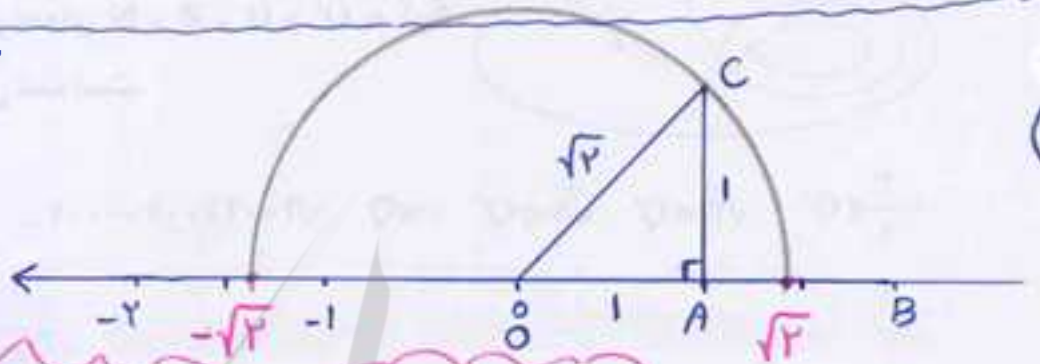
$$1 < \frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \frac{1}{5} < \frac{1}{6} < \dots < \frac{1}{n} < 1$$

$$1 < \frac{3}{2} < \frac{4}{3} < \frac{5}{4} < \frac{6}{5} < \frac{7}{6} < \dots < \frac{n+1}{n} < 2$$

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

$$OC^2 = 1^2 + 1^2$$

$$OC = \sqrt{2}$$



ج)

$$\Rightarrow -1,5 < -\sqrt{2} < -1, \quad 1 < \sqrt{2} < 1,5$$

د) بین دو عدد 1 و 2 بیشتر عدد گویا وجود دارد. و بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد. وقتی نقاط متناظر با اعداد گویا بین 1 و 2 را زنجیر می‌کنیم نقاط متناظر با اعداد گویا زنجیر نشده باقی می‌ماند در نتیجه این نقاط نمی‌توانند با خط وجود آورند.

نکته

★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★★★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد

مثال: $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

کار در کلاس

- ۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.
 ۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

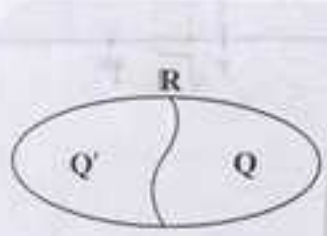
$\sqrt{5.1}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{8.1}$
 $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$

۳- الف) مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به



صورت زیر درست است؟ **خیر صحت ۲۵/۱**

ب) نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.



عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته بندی می شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می نامیم و آن را با \mathbb{R} نمایش می دهیم. تساوی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ بین سه مجموعه Q و Q' و \mathbb{R} برقرار است.

مثال:

$0 \in \mathbb{R}$ $\sqrt{10} \in \mathbb{R}$ $-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$ $0.75 \in \mathbb{R}$
 $0.202202220222... \in \mathbb{R}$ $\pi \in \mathbb{R}$ $\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$

کار در کلاس

۱- داخل \circ علامت \in یا \notin بگذارید:

$4 \in \mathbb{Z}$ $0.2 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{18} \in \mathbb{R}$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$
 $-5 \in \mathbb{R}$ $-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$ $5 = \sqrt{25} \notin \mathbb{Q}'$ $\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$ $\frac{0}{6} = 0$
 $\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$ $\sqrt{0.9} \in \mathbb{Q}'$ $\sqrt{0.9} \in \mathbb{Q}$ $\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$ $\frac{9}{-1} = -9$

۲۵

$\sqrt{0.9} = 0.3$

$$\sqrt{5} < \sqrt{5,1}, \sqrt{5,2}, \sqrt{5,3}, \dots, \sqrt{9}, \sqrt{9,1}, \dots, \sqrt{9,9}, \sqrt{9,1}, \sqrt{9,2}, \dots$$

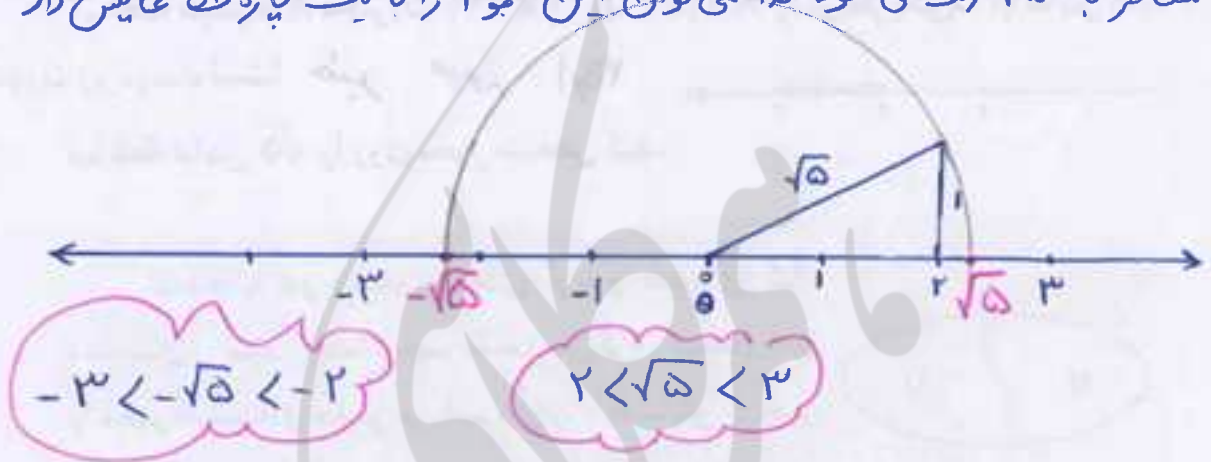
تذکره: $\sqrt{9}$ گنگ نیست

این سؤال پاسخ باز است

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{4,1}, \sqrt{4,2}, \sqrt{4,3}, \sqrt{4,4} < \sqrt{9} = 3$$

۲- این سؤال پاسخ باز است

۳- مجموعه A شامل تمام اعداد گویا از ۲ تا ۳ می باشد (دو سره، اینز شامل می شود) و می شامل اعداد گنگ نمی شود مثلا $2 < \sqrt{5} < 3$ یک عدد گنگ است و نقطه‌ی متناظر با $\sqrt{5}$ رنگ نمی شود لذا نمی توان این مجموعه را با یک پاره خط نمایش داد



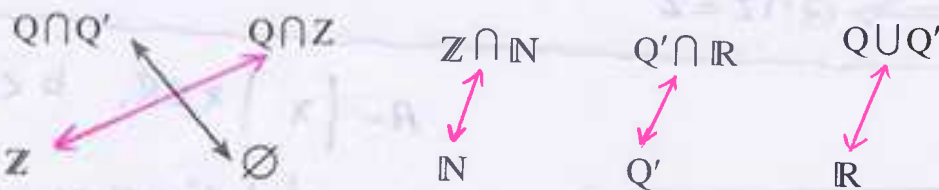
نکته

۱- دو مجموعه Q و Q' جدا از هم می باشند زیرا $Q \cap Q' = \emptyset$

۲- $R - Q' = Q$ و $R - Q = Q'$

۳- اجتماع این دو مجموعه، مجموعه اعداد حقیقی را درست می کند یعنی: $Q \cup Q' = R$

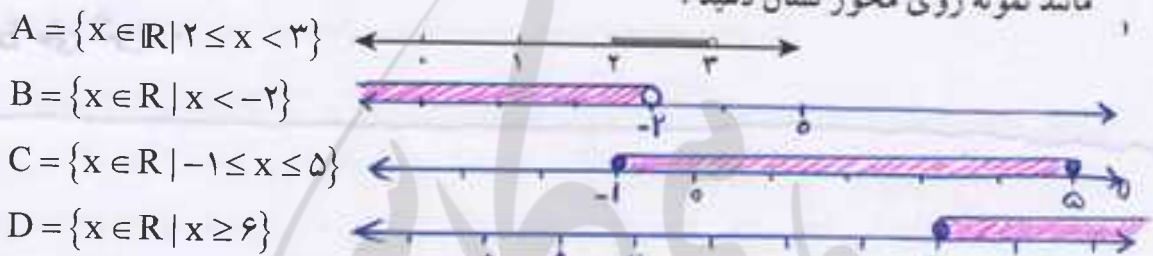
۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را

مانند نمونه روی محور نشان دهید:



با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟

نامساوی $x < 3$ به این معنی است که x باید از ۳ کم‌تر باشد و مجموع شامل عدد ۳ نمی‌باشد و نامساوی $2 \leq x$ یعنی مجموع شامل ۲ و اعداد بزرگ‌تر از آن می‌باشد

کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:



۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

- $0.75 \in A$
- $0.252552555... \in B$
- $\sqrt{13} \in A$
- $\sqrt{7} \in C$
- $\sqrt{1} \in A$
- $-1000 \in C$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



مجموعه‌ی مشخص شده شامل تمام نقاط بین -۲ و ۳ است
یعنی تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از -۲ و کوچک‌تر از ۳.

اگر $A \subseteq B$ باشد نگاه داریم: $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$ نکته:

$$Q' \subseteq R \implies Q' \cap R = Q'$$

$$N \subseteq Z \implies Z \cap N = N$$

$$Z \subseteq Q \implies Q \cap Z = Z$$

نکته: $A = \{x \mid x \in R, b < x \leq a\}$



نامساوی $x \leq a$ یعنی تمام اعداد

کوچک تر و مساوی a ، پس اینج

مجموعه شامل عدد a نیز می شود و نامساوی $b < x$ به این معنی است که x بزرگ تر از b است

و شامل عدد b نمی شود.



تمرین

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	π	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229\dots$	-10	$\frac{6}{2}$
\mathbb{N} طبیعی	x	x	x	x	x	x	✓
\mathbb{W} حسابی	x	x	✓	x	x	x	✓
\mathbb{Z} صحیح	x	x	✓	x	x	✓	✓
\mathbb{Q} گویا	x	✓	✓	x	✓	✓	✓
\mathbb{Q}' گنگ	✓	x	x	✓	x	x	x
\mathbb{R} حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید : ص ۲۷/۱

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

ب) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ ص ۲۷/۱

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

۵ و ۲- (الف) ۶ و ۷ (ب) $\sqrt{3}, 6$ (ج) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$ (د)

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بنویسید.

۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. تمام اعداد صحیح گویا هستند.

۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. تمام اعداد طبیعی صحیح هستند. $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{3}{11}$ چه تفاوتی هست؟

$\frac{3}{11} = 0.272727\dots$, $\sqrt{10} = 3.16227766\dots$

در نمایش اعشاری $\frac{3}{11}$ دوره‌ی تناوب وجود دارد و ۲۷ تکرار می‌شود ۲۷

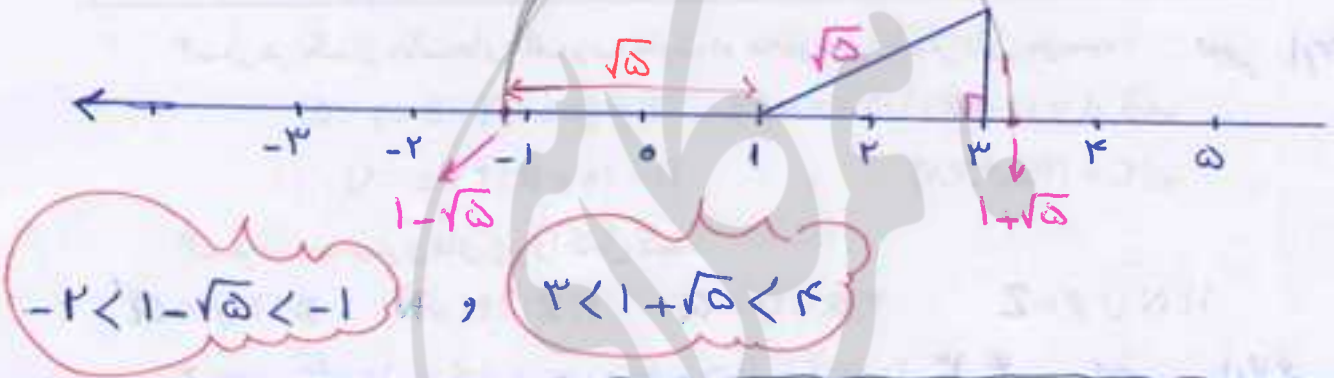
ولی در نمایش اعشاری $\sqrt{10}$ دوره‌ی تناوب وجود ندارد

تجزیه الف) مجموعه A شامل همه اعداد بین ۱،۵ و ۵ است (اعداد گویا و گنگ) ولی مجموعه B فقط شامل اعداد گویای بین این دو عدد می باشد
 ب) مجموعه D شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۳، ۹ می باشد ولی مجموعه C فقط شامل اعداد طبیعی بین ۳، ۹ می باشد

$$N \subseteq Z \Rightarrow \begin{cases} N \cup Z = Z \\ N \cap Z = N \end{cases}, \quad Q' \subseteq R \Rightarrow R \cap Q' = Q'$$

$$R \begin{array}{|c|} \hline Q \\ \hline Q' \\ \hline \end{array} \Rightarrow R - Q' = Q$$


$$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \xrightarrow{+1} 3 < 1 + \sqrt{5} < 4$$



- الف) $-2 = -\sqrt{4} < -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3} < \sqrt{25} = 5$
 ب) $4 = \sqrt{34} < \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, \dots, \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$
 ج) $\sqrt{3} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12} < \sqrt{34} = 6$
 د) $\sqrt{2} < \sqrt{21}, \sqrt{22}, \sqrt{23}, \sqrt{24} < \sqrt{41}$

نکته مهم
 مفاد اعشاری هر عدد گویا یکی از دو حالت زیر می باشد
 ۱- عدد اعشاری تقریبی (مختوم) ۲- عدد اعشاری متناوب (ساده و مرکب)

فعالیت

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:
 نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهد؟


فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ $OA = 3$

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ $OB = 3$

می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می توان

یافت؟ دو نقطه

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می نامیم و با علامت |a| (بخوانید

قدر مطلق a) نمایش می دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می توان نوشت: $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ تا مبدأ برابر $\frac{2}{3}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است؛ یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق $-\sqrt{5}$ را به صورت $|\sqrt{5}|$ نشان می دهیم که مساوی $\sqrt{5}$ است. قدر مطلق

0.04 را به صورت $|0.04|$ نشان می دهیم که مساوی 0.04 است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد

است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$$\text{اگر } a = -3 \Rightarrow |-3| = -(-3)$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

کار در کلاس

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- الف) دو عدد a و b مثبت است. $۱) a > ۰, b < ۰$
- ب) عدد a نامنفی است. $۲) a > ۰, b > ۰$
- ج) دو عدد a و b منفی است. $۳) a \geq ۰$
- د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. $۴) a < ۰, b < ۰$
- ه) عدد a نامثبت است. $۵) a \leq ۰$

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- الف) $a > ۰, b > ۰$ $۱) ab < ۰$
- ب) $a < ۰, b < ۰$ $۲) ab > ۰, a + b > ۰$
- ج) $a < ۰, b > ۰$ $۳) ab > ۰, a + b < ۰$

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- الف) $a > ۰$ $۱) |a| = -a$
- ب) $a > ۰, b > ۰$ $۲) |a| = a$
- ج) $a < ۰$ $۳) |a + b| = a + b$
- د) $a < ۰, b < ۰$ $۴) |a + b| = -(a + b)$

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

- ۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست. **صمیم ۲۹۱**
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق های آن دو عدد، کوچک تر یا مساوی است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6 \quad \sqrt{8} \approx 2/8$$

۱) $|ab| = |a||b|$

$|(-۲) \times (-۵)| = |-۲| \times |-۵|$, $|(-۳) \times ۴| = |-۳| \times |۴|$

$\Rightarrow |1+10| = ۲ \times ۵$
 $10 = 10$ ✓

$\Rightarrow |-۱۲| = ۳ \times ۴$
 $۱۲ = ۱۲$ ✓

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$|۳+۴| \leq |۳|+|۴|$

مثال ۱

$۷ \leq ۳+۴$

$۷ \leq ۷$ ✓

مثال ۲ $|(-۱۵)+۲۰| \leq |-۱۵|+|۲۰|$

$|۵| \leq ۱۵+۲۰$

$۵ \leq ۳۵$ ✓

مثال ۳

$| -۱۷+۷ | \leq |-۱۷|+|۷|$

$| -۱۰ | \leq ۱۷+۷$

$۱۰ \leq ۲۴$ ✓



با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید:

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل: $\sqrt{2} = 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می شود:

دلیل: $\sqrt{3} = 1/7$ پس $2 - \sqrt{3}$ مثبت می شود ۱) $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

دلیل: چون $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ است ۲) $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ هر دو عدد $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ است

دلیل: ۳) $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

دلیل: ۴) $|-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$ $-4 - \sqrt{3} < 0$

هر دو عدد -4 و $-\sqrt{3}$ منفی است پس $-4 - \sqrt{3} < 0$ است

مثال: اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = -3$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به دست می آوریم:

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -2/5 + \sqrt{2} \right|$$

چون $-2/5 + \sqrt{2}$ عددی منفی است ($\sqrt{2} = 1/4$)، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-2/5 + \sqrt{2})$ یعنی $2/5 - \sqrt{2}$ است.

مثال:
$$\underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-2 - \sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل $\sqrt{a^2}$ همیشه مثبت و بر $|a|$ می باشد

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می توانیم بنویسیم: $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: برای محاسبه $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < a^n$$

$$0 < \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^4} < \dots < \frac{1}{a^n}$$

کار در کلاس

۱- عبارات های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|(-7)^2| \oplus |-7|^2$ $| -7^2 | = |-49| = 49$, $| -7 |^2 = (7)^2 = 49$

ب) $|-8+5| \otimes |-8|+|5|$ $|-8+5| = |-3| = 3$, $|-8|+|5| = 8+5 = 13$

ج) $|3-9| \odot |3|-|9|$ $|3-9| = |-6| = 6$ $|3|-|9| = 3-9 = -6$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

۱- حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

الف) $|0| = 0$ $|- \frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$ $|7^2 - 7^2| = 0$ $|0/25 - 0/25| = 0$

ب) $|7^3 - 7^4| = -(7^3 - 7^4) = 7^4 - 7^3$ $0 < \frac{1}{25} < 1 \Rightarrow \frac{1}{25^2} < \frac{1}{25}$

الف) $\sqrt{(-2595)^2} = |-2595| = 2595$ ب) $\sqrt{(1394)^2} = 1394$

ج) $\sqrt{(-3+\sqrt{10})^2} = |-3+\sqrt{10}| = \sqrt{10}-3$ د) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5} = \sqrt{5}-2$

تمرین

۱- اگر $a = 0/25$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

الف) $|-3\sqrt{5}|$ ب) $|7-5\sqrt{3}|$ ج) $|0+\sqrt{5}|$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$$|5-12| > 1 + \square$$

۴- مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a = -2$, $a = 0$ و $a = 2$ به دست آورید. آیا می توانید

عدد حقیقی به جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟ **خیر**

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۶- حاصل عبارات روبه رو را به دست آورید :

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \quad \sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$$

$$|a+b| + 2|a-b-c| = \left| \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \right| + 2 \left| \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) - 2 \cdot \frac{1}{2} \right| \quad \text{تمرین ۱}$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| + 2 \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right| = 0 + 2 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 2 \cdot 0 = 2 \times 2 = 4$$

$$|-3\sqrt{5}| = -(-3\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} \quad , \quad |v - 5\sqrt{3}| = |\sqrt{49} - \sqrt{20 \times 3}|$$

$$= |\sqrt{49} - \sqrt{75}| = -(\sqrt{49} - \sqrt{75}) = \sqrt{75} - \sqrt{49} = 5\sqrt{3} - 7$$

منفی

$$v = \sqrt{49} \quad , \quad 5\sqrt{3} = \sqrt{20} \times \sqrt{3} = \sqrt{75} \Rightarrow v < 5\sqrt{3} \Rightarrow |v - 5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3} - v$$

ج) $|0 + \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

$$|5 - 12| > 1 + \square \Rightarrow v > 1 + \square \Rightarrow 6 > \square$$

پس \square هر عدد کوچکتر از ۶ می تواند باشد

a	$-r$	0	r
$ a+a $	$r+(-r)=0$	0	$r+r=r$

$$a < 0 \Rightarrow |a| + a = -a + a = 0 \Rightarrow |a| + a \geq 0$$

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| + a = a + a = 2a$$

$$\sqrt{a^2} = a \xrightarrow{a=v} \begin{cases} \sqrt{(-v)^2} = \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{(-v)^2} = -v \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2} \neq a$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

زیرا $\sqrt{2} > 1$ است و $\sqrt{2}-1 > 0$ است

$$\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = -|1-\sqrt{10}| = -1 + \sqrt{10} = \sqrt{10} - 1$$

زیرا $\sqrt{10} > 1$ است پس $1 - \sqrt{10} < 0$ است

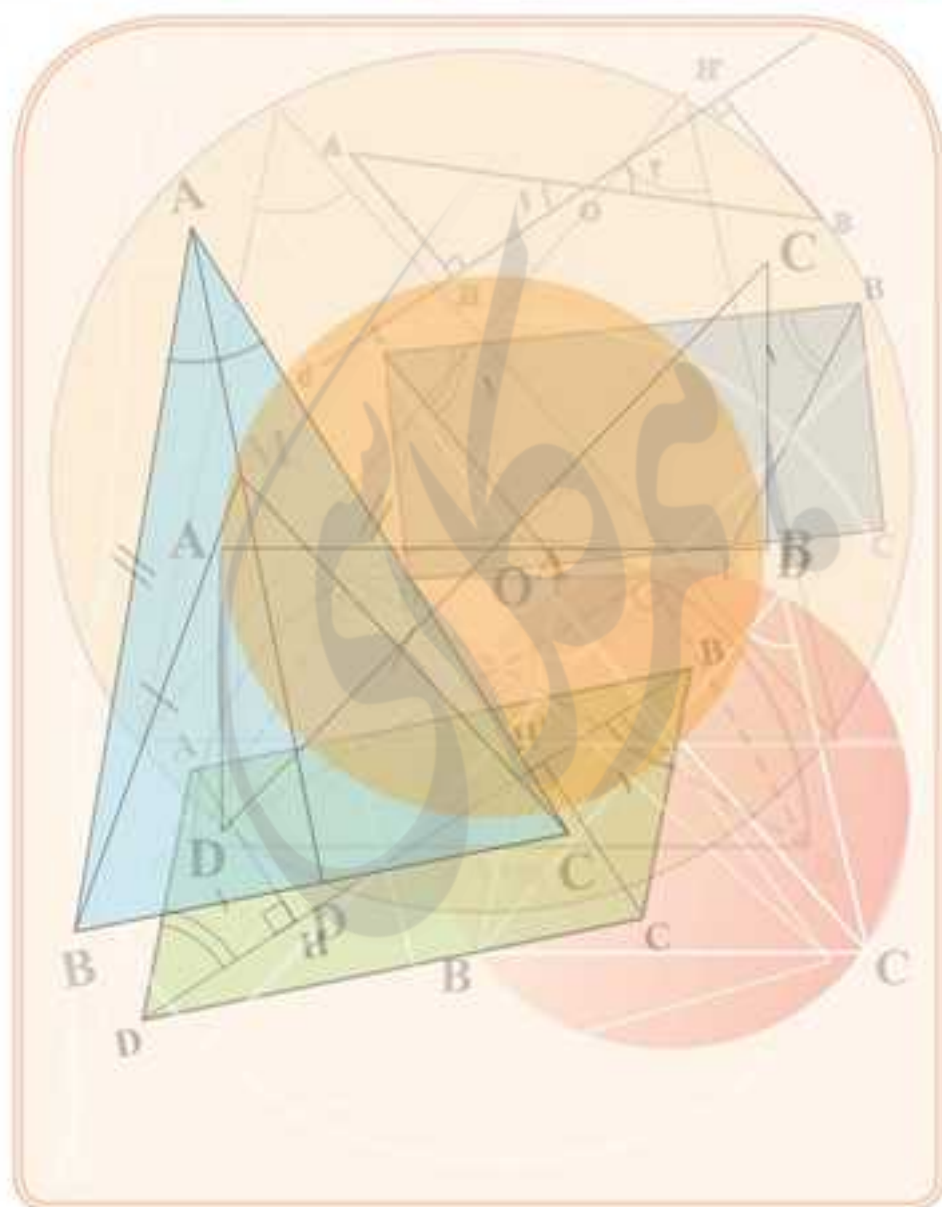
عددهای حقیقی



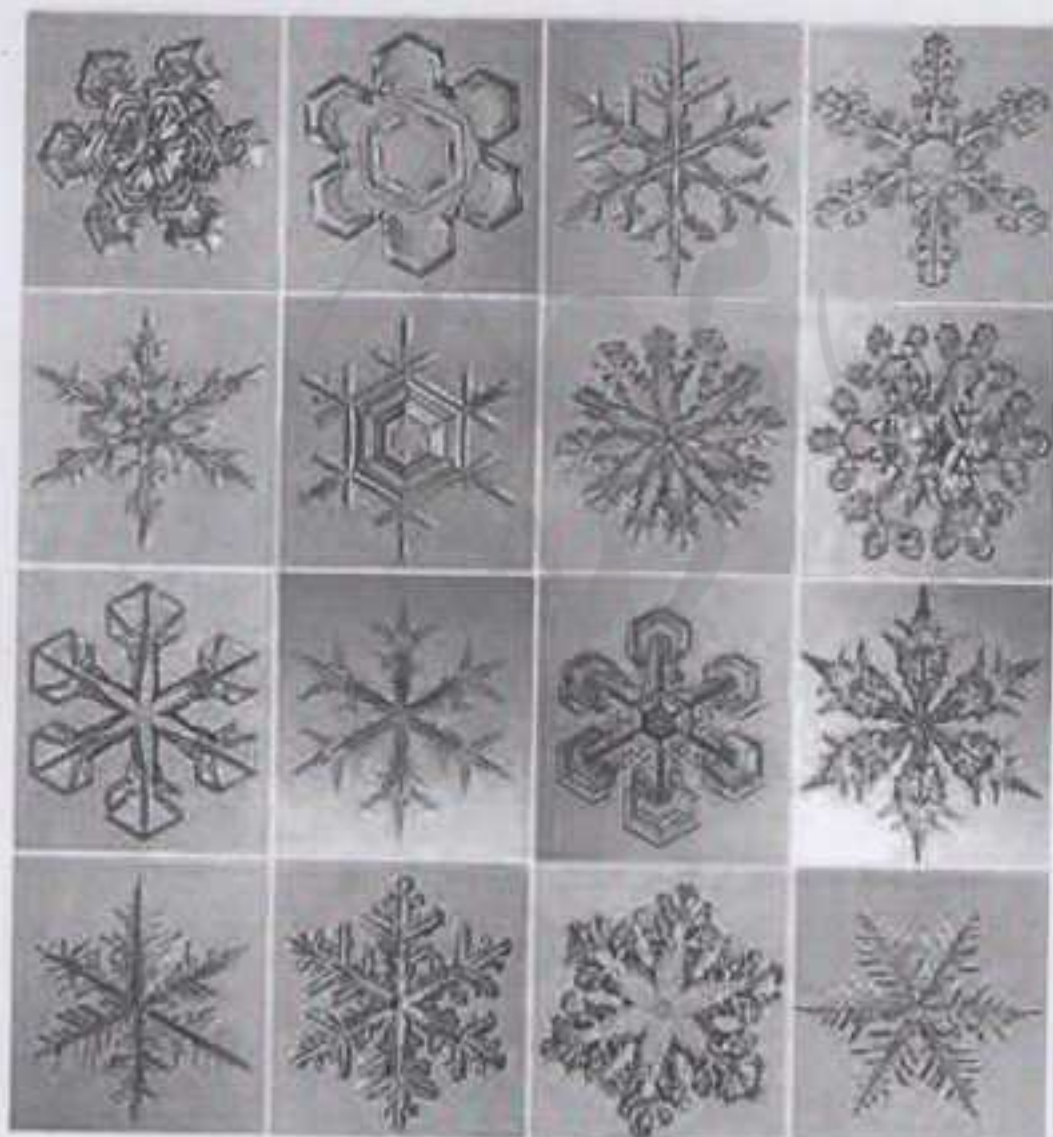
«... و أخاط بما لذیهم و أخصن كل شئ عذدا»
«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد
شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین
مفکر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی گملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط
چندضلعی‌های محاطی و محیطی نوشت عدد π که عددی **حقیقی و گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار
محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند او در
ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند
«به نام تو که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است»



أدعُ إلى سبيل رَبِّكَ بِالْحِكْمَةِ وَ الْمَوْعِظَةِ الْخَسَنَةِ وَ جَادِلْهُمْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ ...
 باحکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و
 مناظره کن! (سوره نحل، آیه ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهشت» نیستند!

فعالیت

متن های زیر را بخوانید و به سوال ها پاسخ دهید :

۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ **خیر، زیرا رفتن محسن به ورزشگاه نمی تواند علت باشد.**
 ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

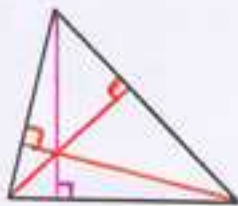
۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است. **دلیل ما قابل اطمینان تر است**

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می کنیم. راه های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گویم.

کار در کلاس

- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه ای می گیرد که درست نیست. هر وقت تکالیف را نمی نویسیم، معلم تکالیف را نمی بیند.
- دو ارتفاع از هر یک از مثلث های زیر، رسم کنید :



فعالیت ۱- رفتن محسن به ورزشگاه می تواند علت بافت نیم مورد علاقه می او باشد و برد تیم به عوامل متعددی بستگی دارد که مهم ترین آن ها روحیه و آمادگی بازیکنان تیم و ضعف تیم مقابل می تواند باشد

۲- با توجه به ضخامت یکسان بیکریته ها، مقدار بیکریته فیزیکی بیش تر است که مساحت بیش تری داشته باشد
 بنابراین مقدار بیکریته باقر بیش تر است
 $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$
 $8 \times 4 = 32 \text{ cm}^2$
 $36 > 32$

۳ در فعالیت اول محسن بر اساس نتایج قبل، نتیجه گیری کرد و می مادر فعالیت دوم بر اساس یافته هایی که درستی آن ها از قبل اثبات شده است نتیجه گیری کردیم

- کار در کلاس ۱ (الف) هر وقت در رسم را می خوانم معلم از من امتحان می گیرد
- (ب) هر وقت دیر به مدرسه می روم مدیر من را می بیند
 - (ج) وقتی چتر ندارم، باران می بارد
 - (د) اگر ما شینم را تمیز کنیم حتما فردا باران می بارد
 - (و) ماکه شانس نداریم تا سرمان را بلند می کنیم اما شوره می شود (یعنی تو نیم قلب کنیم)

۲ **نتیجه نادرست**: چون ارتفاع ها در این سه مثلث هم دیگر را درون مثلث قطع کردند لذا نتیجه می گیریم در هر مثلث سه ارتفاع که هم دیگر را درون مثلث قطع می کنند



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ **خیر**
 یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند. **مبصر ۳۴/۱**
 اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ **قسمت اول (فعالیت ۱)**

فعالیت



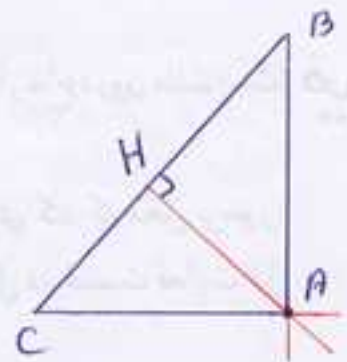
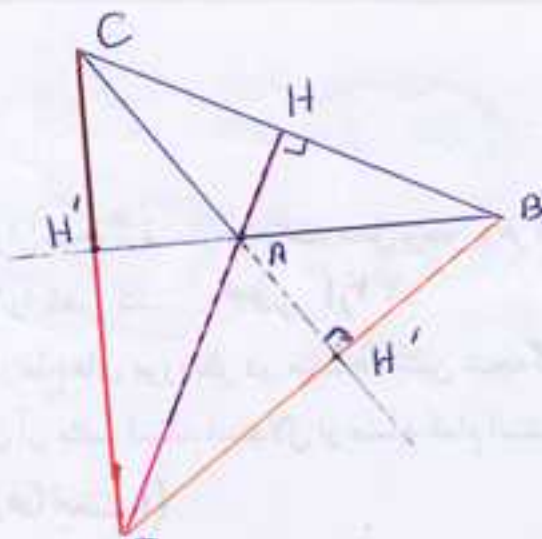
۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟ **ظاهر مساوی می‌باشند**
 الف) با مشاهده تشخیص دهید. **سمت چپ**
 ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید. **با هم برابرند**



۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از سیرینی موردعلاقه شما باشند، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟) **A را**
 با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ **خیر، هم اندازه می‌باشند**

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟ **خیر، چون مشاهده به تنهایی بجز به نتایج درست نمی‌شود**

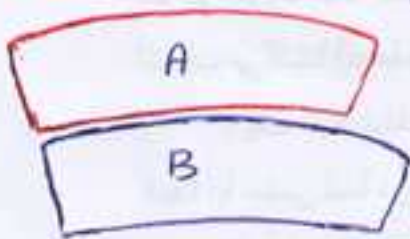
هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش‌ها بوده است، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.



نتیجه: اگر هر سه زاویه یکی یک مُثلث تند (حاد) باشد آنگاه ارتفاع‌ها داخل مُثلث بیرون افتاده را قطع می‌کنند. اگر مُثلث قائم‌الزاویه باشد محل برخورد ارتفاع‌ها رأس زاویه قائم‌الزاویه مُثلث است و اگر یکی از زاویه‌ها باز باشد آن‌گاه محل برخورد ارتفاع‌ها خارج مُثلث است

فعالیت ۱- با توجه به این‌که دایره‌های کناری درست چپ کوچک‌تر از دایره‌های کناری درست راست است در نگاه اول دایره‌ی سمت چپ بزرگ‌تر به نظر می‌آید در صورتی‌که هر دو دایره باهم برابر می‌باشند (منظور دایره‌ی مرکزی است)

۲ قطعی A (در نگاه اول) در صورتی‌که هر دو قطعه باهم برابر می‌باشند



۱- سراب یک پدیده فیزیکی است که در اثر خطای چشم و انعکاس نور از یک هوای گرم در حال حرکت به سمت بالا در مجاورت شن یا زمین سنگلی ایجاد می شود

۲- وقتی از بیرون به آب نگاه می کنیم عمق آن را کم تر از عمق واقعی آن می بینیم

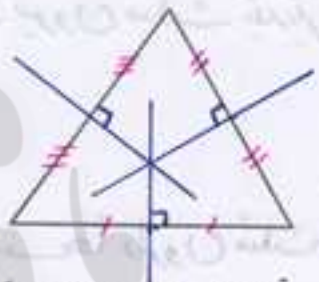
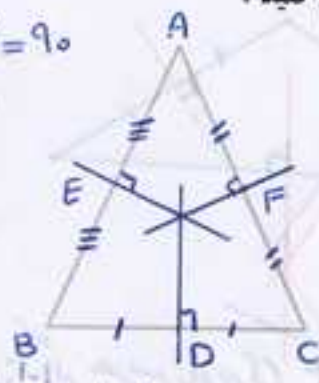
کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می کند. در مورد تاییدی که از این مثال ها می گیرید با یکدیگر بحث کنید. صفحه ۳۵۱

تمرین

۱- در شکل های زیر عمود منصف های سه ضلع مثلث ها را رسم کنید:

$\hat{E} = \hat{D} = \hat{F} = 90^\circ$
 $AE = BE$
 $AF = CF$
 $BD = CD$



آیا فقط با توجه به این شکل ها، می توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف های هر مثلث

همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ **خبر صفحه ۳۵۱**

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنه ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال توانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام. او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال ها بحث کنید. **استدلال نیما صفحه ۳۵۱**

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال های زیر است؟ **استدلال « ج »**

الف) چون برخی مثلث ها قائم الزاویه هستند پس مثلث های متساوی الاضلاع هم قائم الزاویه اند.

ب) همه فیلم های جنگی که تاکنون دیده ام، جذاب بوده اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود.

کاردرکلاس ۱- وقتی به ریل قطار نگاه می‌کنیم، احساس می‌کنیم ریل‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر مقدار خود را داخل آب یک لیوان فرو ببرید، آن را کوتاه‌تر می‌بینید

۳- سه ظرف محتوی آب - سرد، آب گرم و آب ولرم داریم. اگر هم زمان دست راست خود را در آب سرد و دست چپ خود را در آب گرم فرو بردن پس از مدتی هم زمان هر دو دست را درون آب ولرم فرو ببریم، دست راست آب - ولرم را گرم و دست چپ آب - ولرم را سرد احساس می‌کند

۴- چای داغ چندان تلخ احساس نمی‌شود ولی اگر همان چای سرد شود تلخ‌تر احساس می‌شود

نتیجه: همان طور که مشاهده می‌کنیم عمود منصف‌ها ممکن است بیرون مثلث یکدیگر را قطع کنند



مخرج = ۱
۳۶ = ۳۶
۹۰ = ۹۰
۰۰ = ۰۰

نکته مهم ۱- اگر هر سه زاویه یک مثلث خارجاً باشد عمود منصف‌ها دایره بیرون مثلث هم‌دیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر یکی از زاویه‌های مثلث ۹۰ درجه باشد (مثلث قائم الزامی) آن گاه عمود منصف‌ها یکی و در مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند

۳- اگر یکی از زاویه‌های مثلث بیش‌تر از ۹۰ درجه باشد آن گاه عمود منصف‌ها بیرون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند

۲ استدلال هیچ‌کدام کاملاً دقیق نیست، ولی استدلال پنجم منطقی‌تر است زیرا وقتی یک نفر با تقریبات بهتر نتوانسته است وزنی ۹۰ کیلوگرمی را بلند کند، پس با احتمال زیادی وزنی ۱۰۰ کیلوگرمی را هم نمی‌تواند بالا ببرد. استدلال پیرامان، دلیل منطقی ندارد

۳- مشابه استدلال «ج» است. زیرا هر دو بر اساس یافته‌های قبلی، آئینده را پیش‌بینی می‌کنند تصادف نکردن یک فرد نمی‌تواند دلیلی محکم برای اتفاقات در سفر آئینده باشد. همچنین دقت‌تر بودن بچه‌های قبلی نمی‌تواند دلیل محکم و قوی برای دختر یا پسر بودن فرزند خاله‌ی کوچک باشد

پس فیلم جنگی بوده است.

(ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه خاله کوچکم هم دختر خواهد بود.
(د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دو نفر درباره چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.
اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۴ استدلال تقارون غیر منطقی است اگر در چند خانواده چنین حالتی باشد دلیلی بر تعمیم آن نیست زیرا ممکن است خانواده‌هایی باشند که پسر بزرگ‌تر را حسن و کوچک‌تر را علی نام گذاری کرده باشند

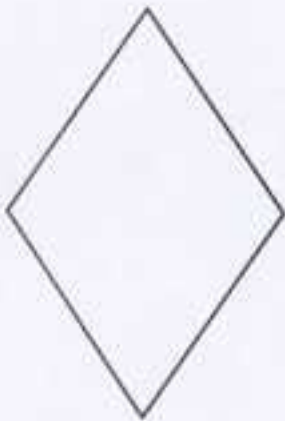
اما استدلال نفر دوم کاملاً درست است

$$\left. \begin{array}{l} \text{حسن حسین} > \text{حسن علی} \\ \text{حسن حسن} > \text{حسن حسین} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حسن} > \text{حسن علی}$$

چون حسن علی از حسین بیش‌تر و حسن حسین هم از حسن حسین بیش‌تر است
لذا نتیجتاً $\text{حسن} > \text{حسن حسین}$ بیش‌تر از حسن حسین است

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟
سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه‌های روبه‌رو برابر است.

استدلال :

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. }
 در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابر است. } در لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است.

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده با دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :



فرض: ABCD مستطیل است.

حکم: قطرهای مستطیل، مساوی است.

فرض: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC, AD = BC \\ AB \parallel DC, AD \parallel BC \end{cases}$

حکم: $AC = BD$

صیغه ۲۸۱

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید:

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم

از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases}$

حکم: $\hat{C} = \hat{F}$



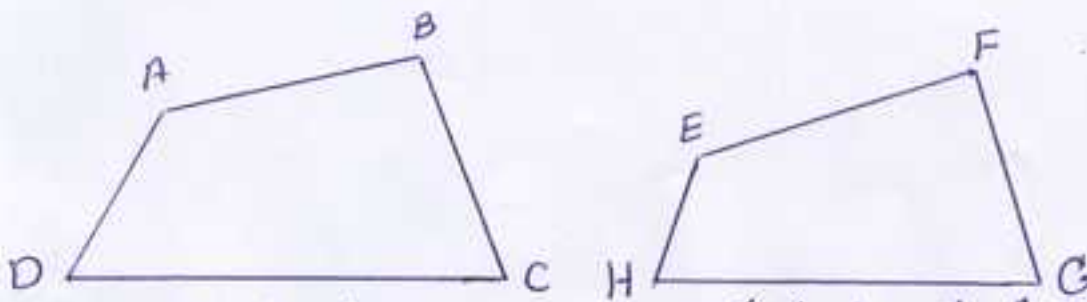
۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از،

ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

حکم: $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow c > AB$

۳- اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH

برابر باشند، ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابر است.

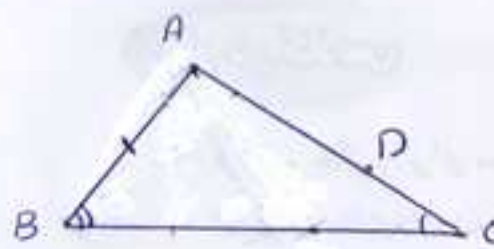


فرض: $\hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H} \Rightarrow$ حکم: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{G}$

فرض $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 فرض $AD = BC$
 $DC = DC$ } $\xrightarrow{\text{(ض و وترس)}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \implies AC = BD$ معادلت

فرض $\hat{A} = \hat{D}$
 فرض $\hat{B} = \hat{E}$ } $\implies \hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{E} \implies 180 - (\hat{A} + \hat{D}) = 180 - (\hat{D} + \hat{E})$ کار در کلاس
 در اینم مجموع زاویه های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است

$\implies 180 - (\hat{A} + \hat{D}) = 180 - (\hat{D} + \hat{E}) \implies \hat{C} = \hat{F}$



$AC > AB \implies \hat{B} > \hat{C}$ ۲
 فرض معم

روی ضلع BC برداریم D یعنی AC به اندازه AD می بریم
 $\implies AB = AD \implies \hat{B}_1 = \hat{D}_1$
 در مثلث BDC داریم: $\hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C}$

$\implies \hat{B}_1 > \hat{C}$
 $\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$ } $\implies \hat{B} > \hat{C}$

عکس قضیه ی بالا $\hat{B} > \hat{C} \implies AC > AB$

برهان خلف اگر $AB = AC$ باشد آن گاه داریم $\hat{B} = \hat{C}$

اگر $AB > AC$ آن گاه طبق قضیه ی بالا داریم $\hat{C} > \hat{B}$ بنا بر این داریم $AC > AB$

فرض $\hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H}$
 در اینم $\hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{C} = 360^\circ$
 $\hat{F} + \hat{H} + \hat{E} + \hat{A} = 360^\circ$ } $\implies \hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{A}$ ۳



فعالیت



۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید:

مثلث ABC متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است.

ثابت کنید AD میانه نیز هست:

فرض: $AB = AC$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم: $BD = CD$

استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است، پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و

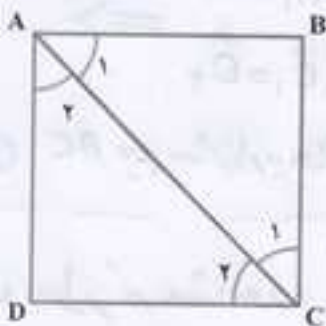
$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث های ADB و ADC به حالت دو زاویه

و ضلع بین (زض ز) با هم همنهشتند، پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه: $BD = DC$ صفحه ۳۹/۱

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده،

میانه هم هست، آیا در مثلث ABC می توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن

است؟ به عبارتی، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد. **خیبر، خیبر**



۲- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که

قطر AC از مربع $ABCD$ نیمساز زاویه های A و C است. چون

دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای

متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC

نیمساز است. صفحه ۳۹/۱

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر

نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ **یل**

۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در

فعالیت ۲ خاصیت مورد نظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام

ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشند،

می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

با عوض شدن نیم ساز شرایط متفاوت بوجود می آید و نمی توان

همیشه بودن را ثابت کردن ولی وقتی قطر عوض می شود شرایط تغییر می کند

① فعالیت ۱) پاره‌ها AD نیم‌ساز است پس می‌توانیم نتیجه بگیریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

ولی نمی‌توانیم تساوی بین دوزاوی \hat{D}_1 و \hat{D}_2 را نتیجه بگیریم پس

(این نتیجه گیری نادرست است) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$ AD نیم‌ساز است

پس نیم‌ساز وارد بر قاعده می‌آید نیز می‌باشد
 پس نیم‌ساز وارد بر قاعده می‌آید نیز می‌باشد
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (مفروضه)
 $\hat{A}B = \hat{A}C$ (مساوی السایات)
 $AD = AD$ (ضلع مشترک)
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$

روش دوم

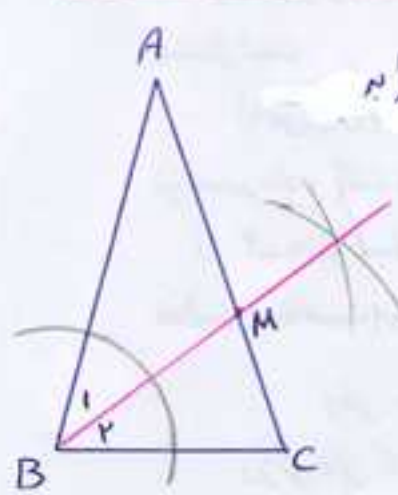
$\hat{B} = \hat{C}$ (مساوی السایات)
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (مفروضه)
 $\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \hat{C} + \hat{A}_2$

$\Rightarrow 180 - (\hat{B}_1 + \hat{A}_1) = 180 - (\hat{C} + \hat{A}_2) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$

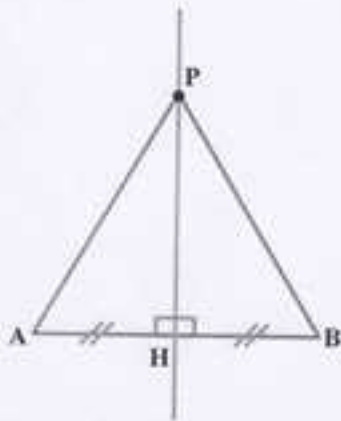
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (۱)
 $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ (۲)
 $AD = AD$
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$

این خاصیت قابل تعمیم به تقسیم زاویه‌ها نمی‌باشد

$AB = AD$ (خاصیت مربع)
 $CB = CD$ (مساوی السایات)
 $AC = AC$ (ضلع مشترک)
 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$
 پس AC نیم‌ساز زاویه‌های \hat{A} و \hat{C} می‌باشد



همان طور که مشاهده می‌کنیم نیم‌ساز زاویه‌های \hat{B} ضلع AC را به دو قسمت مساوی تقسیم نمی‌کند پس می‌توان نتیجه گرفت



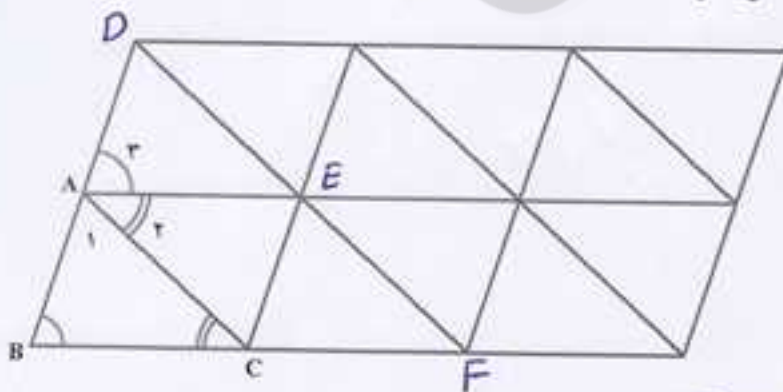
۴- نقطه‌ای مانند P، روی عمود منصف پاره خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ض) هم‌نهشت است، نتیجه می‌شود پاره خط‌های PA و PB با هم برابر است. بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمود منصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟ بیرون نقطه P دلخواه می‌باشد با تغییر مکان نقطه P روی عمود منصف باز هم شرایط برقرار است، بنابراین برای هر نقطه‌ی روی عمود منصف قابل تعمیم می‌باشد (نقطه‌ی P عا بنده‌ی تمام نقاط روی عمود منصف است)

کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده‌اند:

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.
 استدلال حامد: حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است. نادرست است، زیرا یک مثلث خاص در نظر گرفته شد.
 استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را شمرده است. اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. با بررسی مجموع زاویه‌ها در چند مثلث می‌توان آن تعمیم داد. نادرست است.
 استدلال مهدی: مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است را کشید و باشد



با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد:

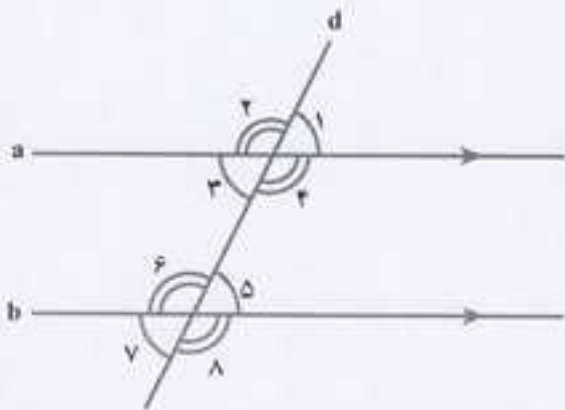
$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

این استدلال نیز نادرست است.

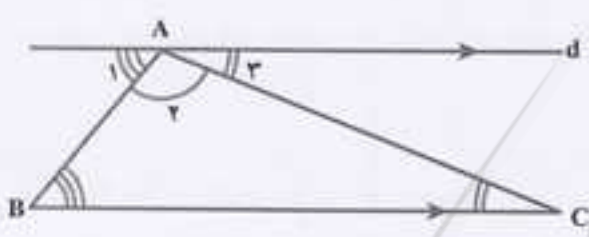
زیرا در مورد این که نقاط A, B, D در یک راستا

(در یک راستا) می‌باشند صحبتی نشده است همچنین نقاط (B, C, F)

سؤال: آیا پاره خط AB, AD در یک راستا می‌باشند؟



استدلال رضا: رضا گفت می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار به هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره های ۱، ۲، ۳ و زاویه \hat{A}_2 همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری \hat{A}_1 و \hat{A}_3 به ترتیب به جای \hat{B} و \hat{C} خواهیم داشت: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ استدلال رضا را می توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال های این دانش آموزان بحث کنید. استدلال رضا کاملا درست است

فعالیت

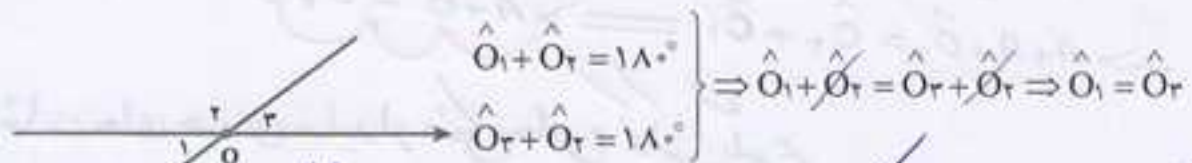
و من تو الیم آن را برای بقیه مثلت ها نیز تعمیم دهیم

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{پول بهرام} + \text{پول حمید} = 5000 \\ \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = \text{پول بهرام} + \text{پول حمید}$$

$$\Rightarrow \text{پول بهرام} = \text{پول حمید}$$

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟ هر دو از دید استدلال مسئله : نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابر است. استفاده می کنند فرض کنیم \hat{O}_1 و \hat{O}_2 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند، داریم :



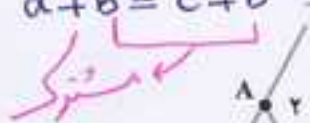
① دو مقدار مساوی باید مقدار خودشان نیز با هم مساوی می باشند

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ c = b \end{array} \right\} \Rightarrow a = c$$

تشریح ۷) وقتی در دو عبارت مساوی دو مقدار برابر داریم آن گاه دو مقدار دیگر نیز با هم

$$a + b = c + b \Rightarrow a = c$$

مساوی می باشند



۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل

بیاورید. خیر، معتبر نیست، چون از حالت خاص استنتاج شده است

مسئله : در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع

اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن برابر است.

اثبات : مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.

می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای

\hat{A}_1 و \hat{B} و \hat{C} هر کدام 60° است، بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

صفحه ۴۲/۱

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را

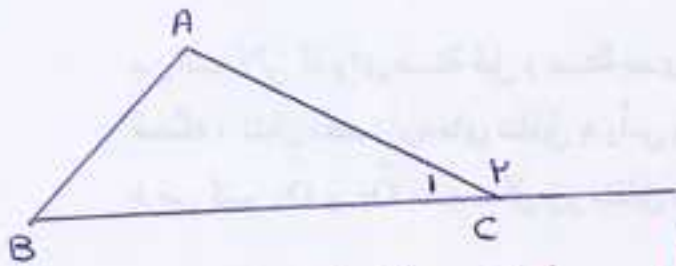
می توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون

آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که

محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های

زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

تمرین برای اثبات یک مسئله باید آن را در یک شکل دلخواه انجام دهیم و اثبات در یک شکل خاص مورد قبول نمی باشد

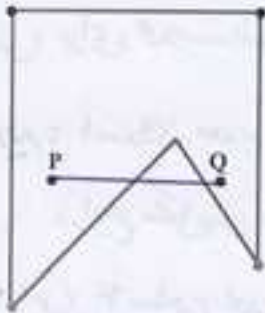


$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_2 &= 180 \\ \hat{C}_2 + \hat{C}_1 &= 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

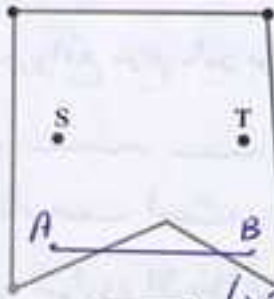
$$\Rightarrow A + B + \hat{C}_2 = \hat{C}_2 + \hat{C}_1$$

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_1$$

در اثبات های هندسی نباید از شکل خاص مگر بگیریم



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد. کاملاً درست است و یک مثال ناقص برای محدب بودن این چهار ضلعی است، چون تمام نقاط این پاره خط درون ۴ ضلعی نیست



مهديه : چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، زیرا این خاصیت را باید برای هر دو نقطه ای دلخواه بررسی کرد برای مثال تمام نقاط پاره خط AB درون ۴ ضلعی نمی باشند (مایک مثال یا چند مثال می توان شجر گیری کرد)



مریم : چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال ۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.} \\ \text{چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.} \end{array} \right. \Rightarrow \text{مستطیل ABCD است.}$

صفر ۴۳/۱

ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{array} \right. \Rightarrow \text{همه ضلع های ABCD، با هم برابر نیستند.}$

صفر ۴۳/۱

ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهار ضلعی ABCD ضلع ها برابر نیستند.} \end{array} \right. \Rightarrow \text{ABCD مربع نیست.}$

صفر ۴۳/۱

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط

صفر ۴۳/۱

عمود می شود.

راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

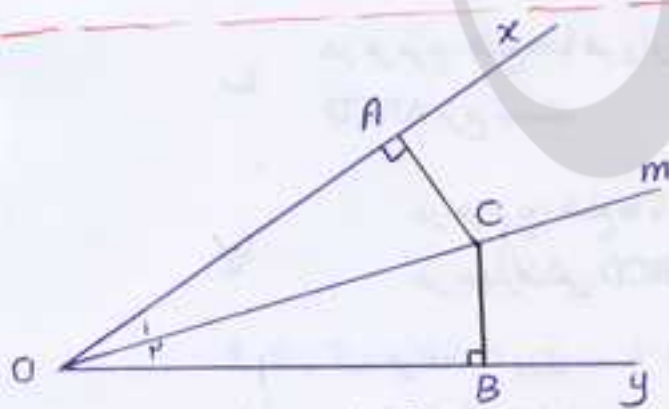
تمرین نرگس: برای اثبات محذب بودن باید وضعیت هر دو نقطه‌ی دلخواه را بررسی کنیم ولی یک مثال نقض برای محذب نبودن کافی است و در واقع نرگس پاره خط pq را به عنوان مثال نقض برای محذب نبودن آورده است

هدیه: استدلال هدیه نادرست است. زیرا این خاصیت باید برای هر دو نقطه‌ی دلخواه بررسی شود در این شکل می‌توان پاره خطی رسم کرد که نادرستی استدلال را نشان دهد (مثال: AB)
 هیرم: این ۴ ضلعی محذب است ولی استدلال هیرم ناقص است (درست نیست) در واقع هیرم باید برای هر دو نقطه‌ی دلخواه این خاصیت را بررسی کند

۳) نادرست است. زیرا هر متوازی الاضلاع لزوماً یک مستطیل نیست در صورتیکه هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است

ب) نادرست است. زیرا این ۴ ضلعی می‌تواند لوزی باشد. لوزی چهار ضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد و در آن یک لوزی لزوماً یک مربع نیست در صورتیکه تمام مربع‌ها لوزی می‌باشند

ج) درست است. مربع یک چهار ضلعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه‌ی مساوی دارد چون چهار ضلع این چهار ضلعی برابر نیست لذا می‌توان نتیجه گرفت $ABCD$ مربع نمی‌باشد



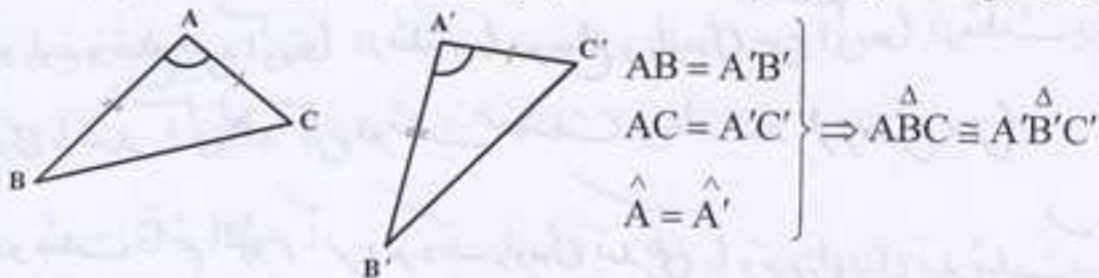
۴) زاویه‌ی دلخواه xOy را در نظر می‌گیریم و نیم‌ساز آن را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی C را به دلخواه روی آن در نظر می‌گیریم و از نقطه‌ی C دو عمود بر اضلاع Ox و Oy رسم می‌کنیم

$$\left. \begin{array}{l} \text{تقریب } OA \Rightarrow \vec{O_1} = \vec{O_2} \\ OC = OC \text{ وتر مشترک} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(و.ز)} \triangle OAC \cong \triangle OBC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AC = BC$$

چون نقطه‌ی C دلخواه است. بنا بر این نتیجه می‌گیریم برای هر نقطه‌ی دلخواه روی نیم‌ساز این خاصیت برقرار است پس هر نقطه روی نیم‌ساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می خواهیم این حالت ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم: مثلاً حالت همنهشتی (ض ض ض) را این گونه نمایش می دهیم:

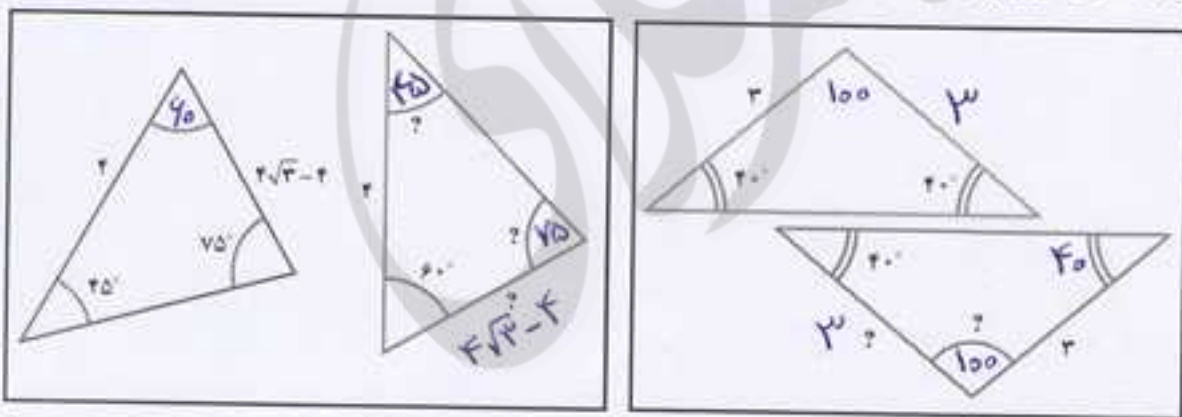


برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث های

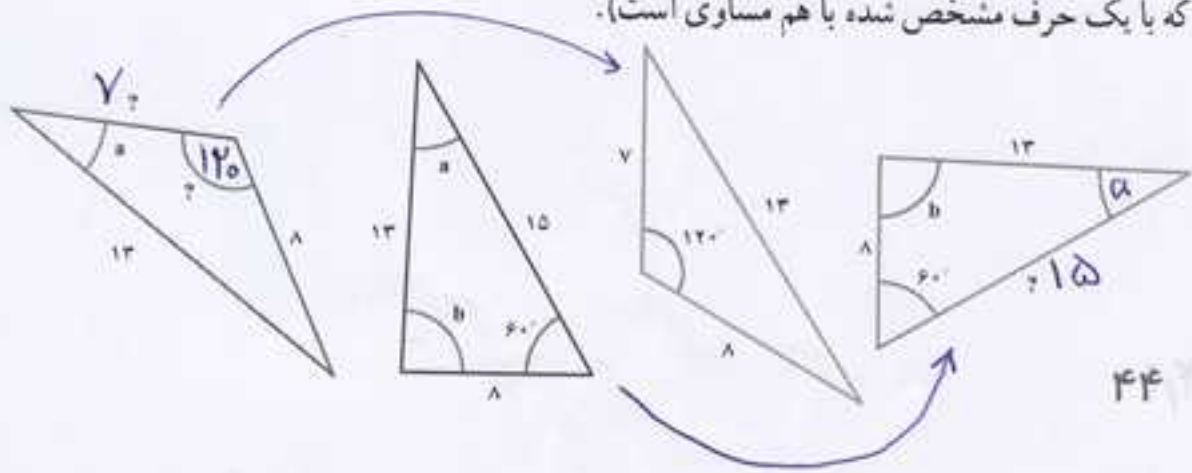
قائم الزاویه را به همین صورت بیان کنید. صفحه ۴۴/۱

فعالیت
 (ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز) و (ض ض ض) و (ض ض ض) قائمه (و ض ض)

۱- در شکل های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت اند. اندازه باره خط ها و زاویه های مجهول را روی شکل مشخص کنید:



۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت اند. ابتدا مثلث های همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



یادآوری ۱- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه آن دو مثلث باهم هم‌نهشت می‌باشند (ض ض ض)

۲- اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن دو ضلع از مثلث دیگری برابر باشند آن گاه آن دو مثلث باهم هم‌نهشت می‌باشند (ض ز ض)

۳- اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه آن دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند (ز ض ز)

۴- در دو مثلث قائم‌الزاویه اگر وتر و یک زاویه‌ی تند یکی با وتر و زاویه‌ی تند دیگری برابر باشند آن دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند (و ز)

۵- در دو مثلث قائم‌الزاویه اگر وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائم دیگری برابر باشند آن گاه آن دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند (و ض)



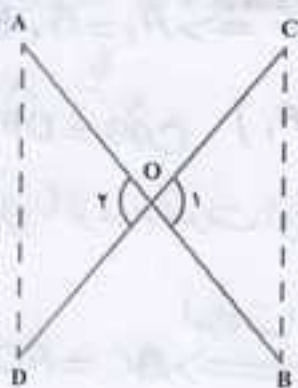
در دو مثلث قائم‌الزاویه اگر وتر و یک زاویه تند یکی با وتر و زاویه تند دیگری برابر باشند آن دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند (و ز)



فرض مسئله اطلاعاتی نسبت کم طرح سؤال به ما می دهد و ما بدون چون و چرا سادگی آن را
را می پذیریم، در واقع ما مسئله را برای حالتی حل می کنیم که فرض درست باشد



مثال: بار حمل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه جویی آن از وسط هم گذشته است. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که: $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است که: $AD=BC$. زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟)، پس مثلث های OBC و OAD همبند هستند و از آنجا درستی حکم به دست می آید، یعنی:



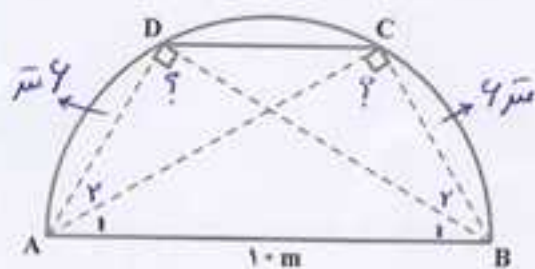
$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } OA = OB \\ \text{فرض } OC = OD \\ \text{متقابل به راس } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$

(فرض)

فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک بل فلزی به شکل نیم دایره هست که بچه ها برای بازی از پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای بل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) = 10 متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای



بل 6 متر فاصله دارد (BC=6) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای بل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

صبر ۴۵

فعالیت

$\hat{C} = \hat{D} = \frac{180}{2} = 90^\circ$ ①

من دانیم زاویه‌ی محض نصف کمان مقابل به آن می باشد بنابراین داریم

$\hat{C} = 90 \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow AC = 8$

$\hat{D} = 90 \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow BD = 8 \text{ cm}$

روشن دوم:

من دانیم کمان‌های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی اند بنابراین داریم

$(BC = AD = 4 \text{ cm}) \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ②

$\hat{C} \hat{A} \hat{B} = \hat{D} \hat{B} \hat{A}$ (زاویه‌ی محض رو به رو به کمان‌های BC و AD است)

از طرفی ما خود به نسبت اول (سؤال 1) داریم $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ بنابراین داریم

① $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$
② $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 =$
 $AB = AB = 10$ } $\xrightarrow{\text{(وز)}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AC = AD$

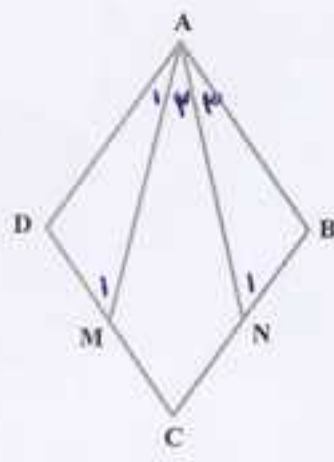


$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } CD = BC \Rightarrow \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow DM = BN \\ \text{فرض (خواص لوزی): } \hat{D} = \hat{B} \\ \text{فرض: } AD = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(من زین)}} \triangle ADM \cong \triangle ABN$$

سؤال ۲

- ۱- نشان دهید زاویه های \hat{D} و \hat{C} در شکل، قائمه است. طول های AC و BD را به کمک قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC = BD$ صفحه ۴۵/۱
- ۲- به کمک همنهستی مثلث های ACB و ADB، نشان دهید $AC = BD$. صفحه ۴۵/۱

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه های M و N وسط های اضلاع CD و CB هستند. می خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۱- با توجه به ویژگی های لوزی، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$\text{فرض } \begin{cases} AD = AB = CD = BC & , BN = \frac{BC}{2} \\ \hat{A} = \hat{C} & , \hat{B} = \hat{D} & , DM = \frac{CD}{2} \end{cases}$$
 حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی های قسمت اول ثابت کنید مثلث های ADM و ABN همنهستند. بالای صفحه
- ۳- حال با توجه به همنهستی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\triangle ADM \cong \triangle ABN \Rightarrow \begin{cases} AM = AN \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ یا } \hat{DAM} = \hat{BAN} \\ \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \text{ یا } \hat{AMD} = \hat{ANB} \end{cases}$$

کار در کلاس



می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع مانند شکل روبه رو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابر است. مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر چند دانش آموز را ببینید و با توجه به آنها به سوال ها پاسخ دهید.

$$\text{فرض } \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases} \quad \text{حکم } \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

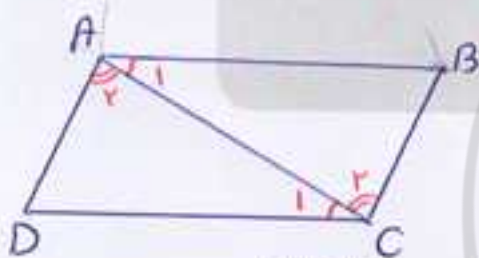
ششم: در تعریف متوازی الاضلاع، برابری ضلع های روبه رو را می دانستیم. علاوه بر آن با اندازه گیری هم می توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع های روبه رو با هم مساوی است. با چشم هم می توان دید!

- آیا می توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ **خیر، زیرا خط داریم**
- به تعریف متوازی الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده ایم؟ چرا؟ **خیر، زیرا اندازه گیری همواره ناخطی دارد (خطای انسانی، خطای ابزار)**

ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم نهشت بیایم و با اثبات هم نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر ها، دو مثلث ایجاد می کنیم.

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \text{ و مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (ض ز ا)} \xrightarrow{\text{اجزای متساوی}} \begin{cases} AB = CD \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AD = BC \end{cases}$$

با توجه به هم نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی های زیر را کامل کنید:

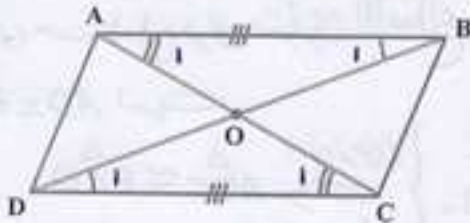
$$\triangle ABD \cong \triangle CBD \Rightarrow \begin{cases} AD = BC & \text{خرد شود دیدیم که } \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ بنابراین داریم:} \\ AB = DC & \text{و } \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \text{ بنابراین داریم:} \end{cases}$$

- چرا برای اثبات هم نهشتی مثلث های ایجاد شده، نمی توانیم از حالت های (ض ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ چون ما فقط یک ضلع برابر داریم **نیاز به دو ضلع برابر داریم**
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟ **بله**

$$\left. \begin{array}{l} (AB \parallel CD, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ (AD \parallel BC, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ AC = AC \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ADC \cong \triangle CBA \xrightarrow{\text{اجزای متساوی}} \begin{cases} AD = BC \\ \hat{B} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases}$$

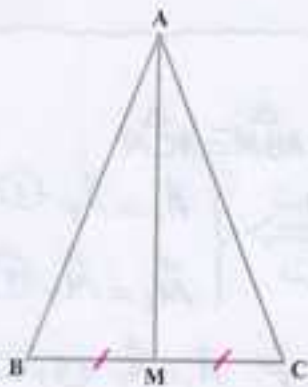
- از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم درباره زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.
- در هر متوازی‌الاضلاع **زاویه‌های** — روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین

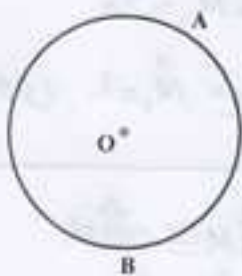


۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$. **صبر ۴۸/۱**

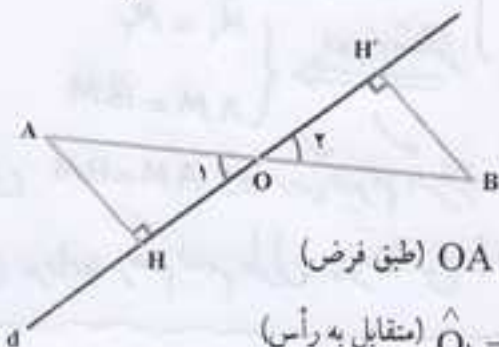
۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!) **صبر ۴۸/۱**



۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟ چرا AM نیمساز زاویه \hat{A} است؟ چرا AM بر BC عمود است؟ **صبر ۴۸/۱**



۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ **آری برابر است** درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های A، M و B وصل کنید.) **صبر ۴۸/۱**



۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره‌خط AM* AB گذشته و A و B از d به یک فاصله‌اند ($AH = BH'$) ثابت کنید $OH = OH'$. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی $OH = OH'$ بحث کنید: **صبر ۴۸/۱**

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \\ AH = BH' \text{ (فرض)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(فرض)} \\ \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH' \\ \Rightarrow OH = OH' \end{array}$$

۴۸ اثبات نادرست است، زیرا زاویه \hat{O}_1 بین OA و AH نیست و زاویه \hat{O}_2 هم بین OH' و OB نیست

تعمیر \perp

$(AB \parallel CD, AC \text{ متوازی}) \implies \vec{A}_1 = \vec{D}_1$
 $(AB \parallel CD, BD \text{ متوازی}) \implies \vec{B}_1 = \vec{C}_1$
 $(\text{خواص قبلی متوازی الاضلاع}) AB = DC$

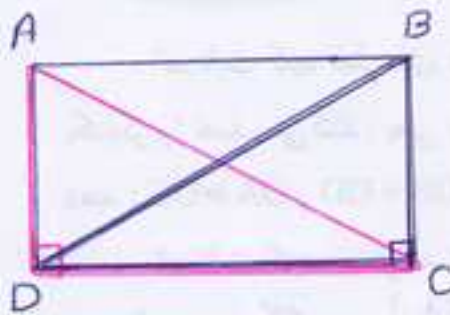
(مساوی) $\implies \triangle ADB \cong \triangle DOC \implies$
 (مساوی اجزای متناظر) $\left\{ \begin{array}{l} OA = OC \implies \text{O وسط AC است} \\ OB = OD \implies \text{O وسط BD است} \end{array} \right.$

نتیجه: بنابراین قطرهای یکدیگر را نصف می کنند

۲ چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع می باشد پس داریم

$AD = BC$ است
 فرض $AD = BC$
 $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 $DC = DC$ ضلع مشترک

(مساوی) $\implies \triangle ADC \cong \triangle BCD$
 (مساوی اجزای متناظر) $\implies AC = BD$



۳

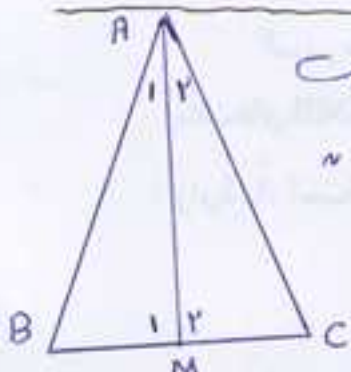
$ABC: AB = AC$ متساوی الساقین است
 $\hat{B} = \hat{C}$
 $AM: BM = CM$ میانه است

(مساوی) $\implies \triangle ABM \cong \triangle ACM$
 (مساوی اجزای متناظر) $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (1)} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (2)} \end{array} \right.$

از تساوی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نتیجه می گیریم که AM نیم ساز زاویه A است

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$ (میتوان رابطه را $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ نوشت)
 $\implies 2\hat{M}_1 = 180^\circ \implies \hat{M}_1 = 90^\circ$

از تساوی $\hat{M}_1 = 90^\circ$ نتیجه می گیریم $AM \perp BC$

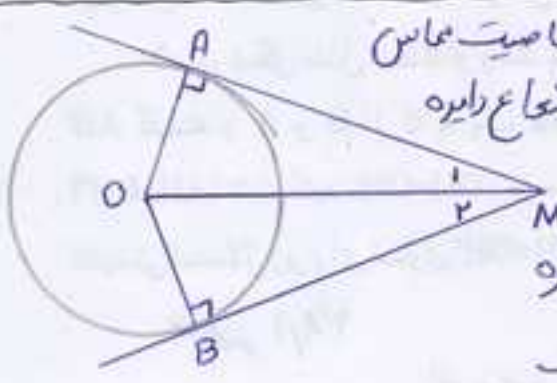


۴

$A = \hat{B} = 90^\circ$ خاصیت مماس
 $OA = OB$ شعاع دایره
 $OM = OM$

(مساوی) $\implies \triangle OAM \cong \triangle OBM$
 (مساوی اجزای متناظر) $\left\{ \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM = BM \end{array} \right.$

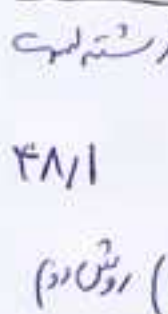
از تساوی $AM = BM$ نتیجه می گیریم اگر از نقطه A خارج دایره دو مماس برداریم رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است



۵

d از وسط AB گذرسته است $\implies OA = OB$
 $\vec{O}_1 = \vec{O}_2$ متقابل در رأس
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$

(مساوی) $\implies \triangle AHO \cong \triangle BHO \implies$
 (مساوی) $\implies \triangle AHO \cong \triangle BHO \implies OH = OH'$



درس چهارم: حل مسئله در هندسه

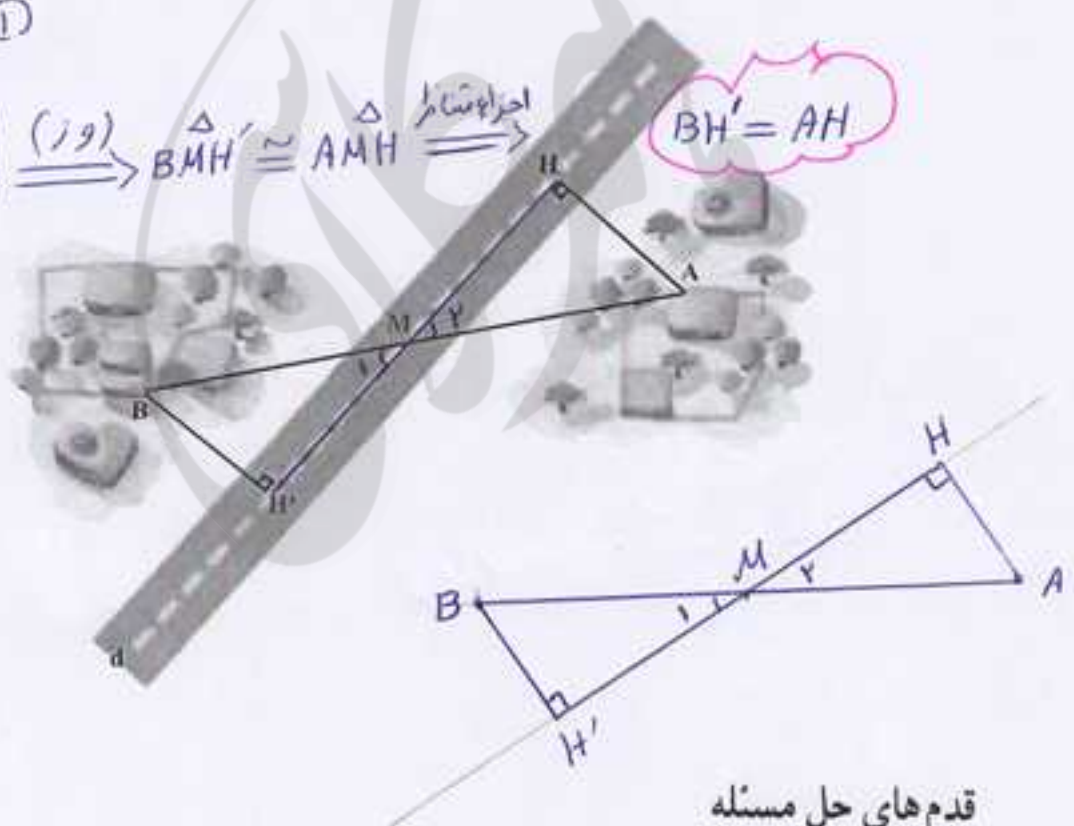
برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می توان مراحل را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می کنیم.

مثال: دو روستای A و B با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جاده آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جاده آسفالتی درست از وسط جاده خاکی عبور می کرد. اداره راه سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جاده آسفالتی با کوتاه ترین فاصله ممکن تا جاده اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جاده مستقیم، عمود بر این جاده اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه های ساخت جاده دیگر از روستای B، مهندسین پیش بینی کرده اند که فاصله روستای B از جاده نیز همین مقدار

است؛ یعنی $AH = BH'$. چون جاده های آسفالتی از وسط جاده های خاکی عبور می کنند پس داریم

$$BM = AM \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad BM = AM \\ M_1 = M_2 \text{ متقابل به هم} \\ \hat{H}' = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وز)}} \Delta BMH' \cong \Delta AMH \xrightarrow{\text{اجزای متساوی}} \Delta$$



قدم های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصله نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟ آری
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید:

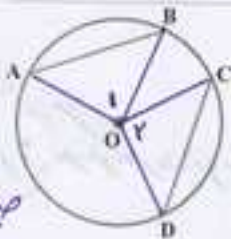
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمود و حکم این است که: $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های همبند است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟ با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (مقابل به‌مقابل)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \Rightarrow \triangle AMH \cong \triangle BMH' \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت

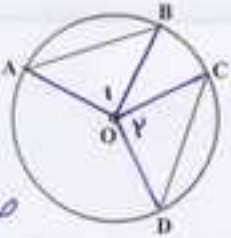


صفحه ۱۰۵

فرض: $AB = CD$

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.
۱- نشان دهید کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است.



صفحه ۱۰۵

۲- در شکل مقابل کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است. نشان

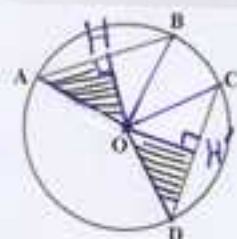
دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

فرض $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

حکم: $AB = CD$

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر

برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.



صفحه ۱۰۵

۳- از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود

شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره

از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

نکته: هرگز هر دایره از دو وتر مساوی آن دایره، به یک فاصله است

کار در طالس

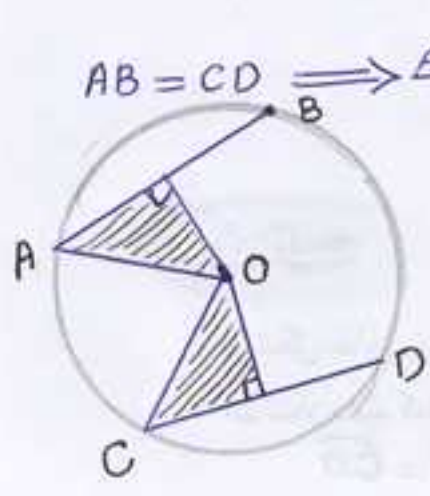
$$\left. \begin{array}{l} (صق فرض) AB = CD \\ (شعاع دایره) OA = OD \\ (شعاع دایره) OB = OC \end{array} \right\} \xRightarrow{(صق فرض)} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xRightarrow{اجزاء متساوی} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AB} \\ \hat{O}_2 = \widehat{CD} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

نتیجه: دو دایره زاویه مرکزی و کمان مقابل آن با هم برابر می باشند (از نظر دایره).
 نتیجه: کمان های نظیر وترهای مساوی از یک دایره با هم مساوی اند.

$$\left. \begin{array}{l} فرض \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ (شعاع دایره) OA = OD \\ (شعاع دایره) OB = OC \end{array} \right\} \xRightarrow{(صق فرض)} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$

نتیجه: وترهای نظیر کمان های مساوی از یک دایره با هم برابرند.

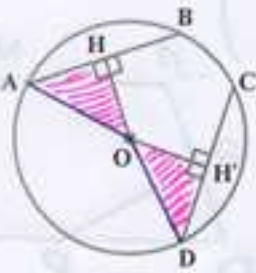


$$AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AH = DH'$$

$$\left. \begin{array}{l} (صق فرض) \triangle OAH \cong \triangle ODH' \\ OA = OD \text{ شعاع دایره} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xRightarrow{(صق فرض)}$$

$$\xRightarrow{اجزاء متساوی} OH = OH'$$

نتیجه: مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن به یک فاصله است.



۴- در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ($OH=OH'$). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD با هم برابر است:

$$OA = OD = \text{شعاع}$$

$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$$

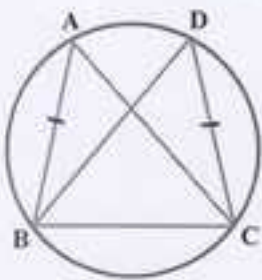
$$OH = OH' \text{ (فرض)}$$

(وضوح)

$$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH' \Rightarrow AH = DH' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2AH = 2DH' \Rightarrow AB = CD$$

کار در کلاس نکته: اگر دو وتر در یک دایره از مرکز به یک فاصله باشند آن دو وتر با هم مساوی اند.

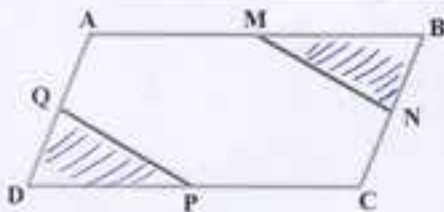


در شکل مقابل می‌دانیم $AB=CD$ ،
 ۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟ زیرا وترهای نظیر مکان‌های مساوی با هم
 ۲- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید: برابرند

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{CB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DCB}$$

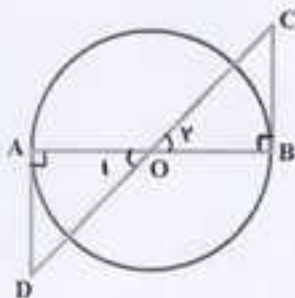
۲- چرا $AC=BD$ ؟ می‌دانیم وترهای نظیر مکان‌های مساوی با هم برابرند

تمرین



۱- در شکل مقابل متوازی‌الاضلاع ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید: $MN=PQ$

صفحه ۵۱/۱



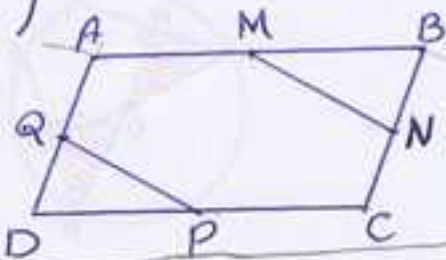
۲- در شکل مقابل مرکز دایره O است و BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که BC و AD برابرند.

فرض $AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{r} = \frac{BC}{r} \Rightarrow DQ = BN$

فرض $CD = AB \Rightarrow \frac{CD}{r} = \frac{AB}{r} \Rightarrow DP = BM$

خواص متواری الاضلاع: $\hat{D} = \hat{B}$

$\Rightarrow \triangle DQP \cong \triangle BNM$ $\xrightarrow[\text{متساوی اجزای متساظر}]{\text{تساوی اجزای متساظر}}$ $PQ = MN$



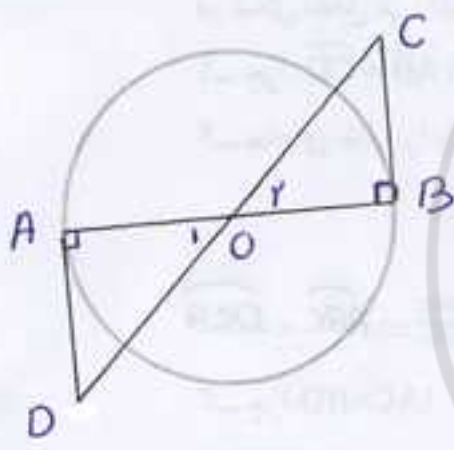
تساوی
تساوی

$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
 $OA = OB$ (شعاع دایره)
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (مقابل به راس)

$\xrightarrow{\text{(زمن ز)}} \triangle OAD \cong \triangle OBC$

$\xrightarrow[\text{متساظر}]{\text{تساوی اجزای متساظر}}$ $AD = BC$

نکته: هر دایره خط عمود بر وتر در نقطه میانی عمود بر آن، بر شعاع دایره عمود است



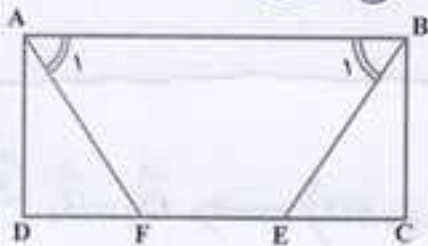


۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM=NC$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow AB = AC \\ \textcircled{1} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \text{فرض } BM = CN \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{(فرض فرض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACN \\ \xrightarrow{\text{تساوی اجزاء}} AM = AN \\ \text{مستطیر} \end{array}$$

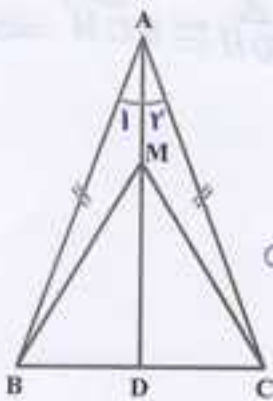
از تساوی AM, AN نتیجه می‌گیریم مثلث AMN متساوی الساقین است



۴- در مستطیل $ABCD$ ، پاره‌خط‌های AF و BE

طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید

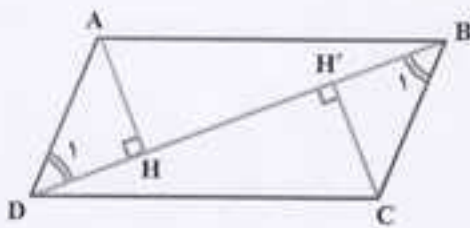
AF و BE مساوی‌اند. صفحه ۵۲



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر

نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ فرض } AB = AC \\ \text{AD نیمساز است} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{(فرض فرض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM \\ \xrightarrow{\text{تساوی اجزاء}} MB = MC \\ \text{مستطیر} \end{array}$$



۶- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع

است و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD

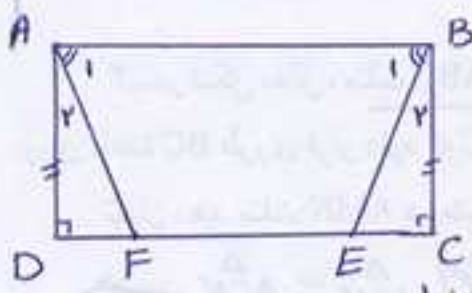
است. دلیل برابری دو زاویه B_1 و D_1 را توضیح دهید.

نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH' همنهشتند

و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید. سپس

جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قطر ————— بین آنها به یک فاصله‌اند.

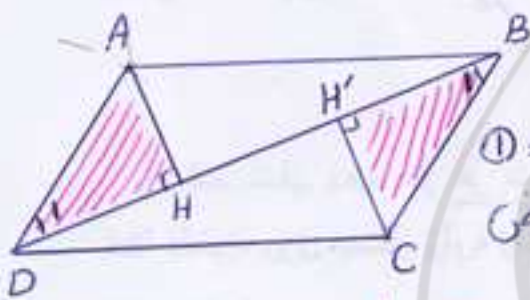


فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow 90 - \hat{A}_1 = 90 - \hat{B}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$ ①

① $\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$ } (رضی) $\triangle ADF \cong \triangle BCE$
 تعریف استیصال $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 مبنی فرض $AD = BC$

تساوی بین اجزای متناظر $\Rightarrow AF = BE$



$(AD \parallel BC, \text{میان } BD) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$ ① ۴

① $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$ } (رضی) $\triangle ADH \cong \triangle BCH' \Rightarrow$
 فرضی $AD = BC$
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$

تساوی اجزای متناظر $\Rightarrow AH = CH'$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

— در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم است؟ **تصویر**



— در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟ **تصویر**
تصویر - در اندازه‌های -
 عکس شماره‌ی (۲) تصویر کج شده‌ی شماره‌ی (۱) می‌باشد



— تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

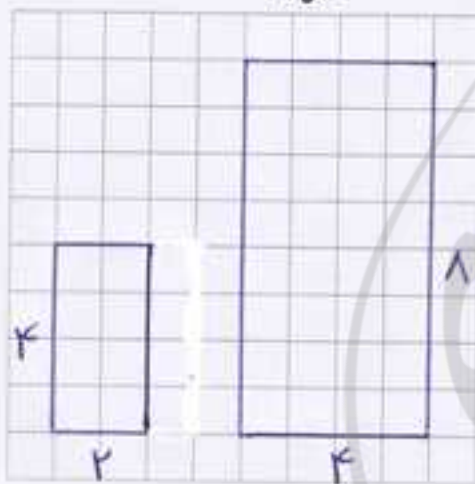
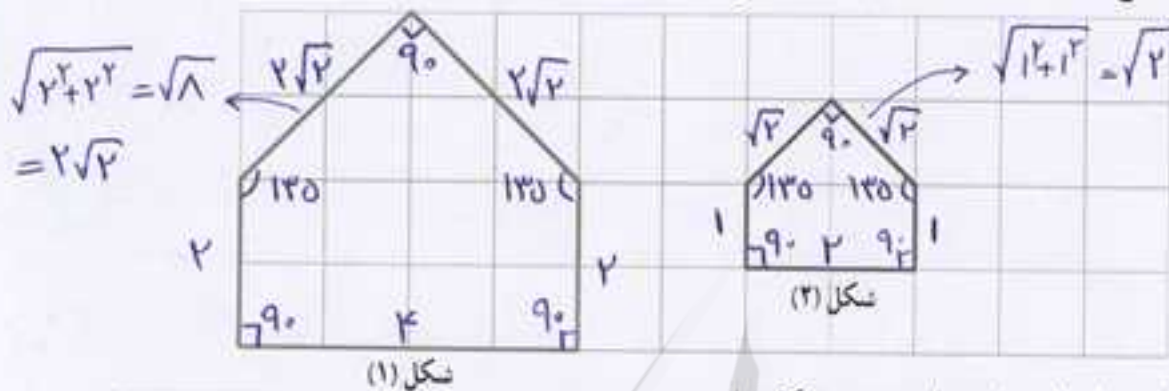
تصویر است **چپ** شبیه‌تر است



اصطلاح شکل سمت راست (۲) نصف ضلع‌های متناظرشان سمت چپ (۱) می‌باشند

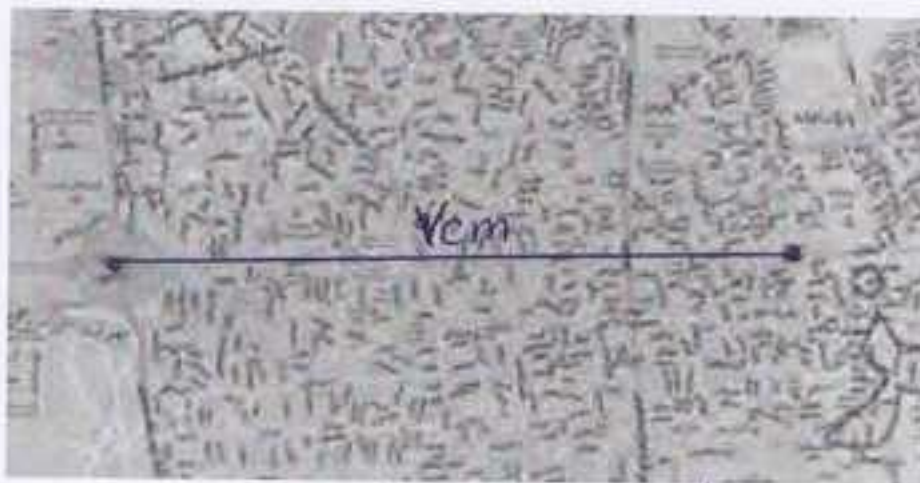
فعالیت

۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتیمتر است:



بالا → اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید:
 چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟
 بزرگ‌تر باشند → چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟
 اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های شکل (۲) است؟ دو برابر
 در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید
 و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید به طوری که اندازه ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتیمتر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتیمتر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید. فاصله در نقشه حدود ۷ سانتیمتر است



$$\begin{aligned} \sqrt{x} \times 100,000 &= \sqrt{500,000} && \text{سافتی متر} \\ \sqrt{500,000} \div 100 &= \sqrt{5000} && \text{متر} \\ \sqrt{5000} \div 1000 &= \sqrt{5} && \text{کیلومتر} \end{aligned}$$

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی با هم

متشابهند. ^۱ فرض کنیم دو مربع دلخواه به اضلاع a و b داریم چون همه زاویه‌ها برابر 90° است و نسبت اندازه‌های اضلاع آن‌ها برابر $\frac{a}{b}$ می‌باشد پس این دو مربع دلخواه متشابه می‌باشند

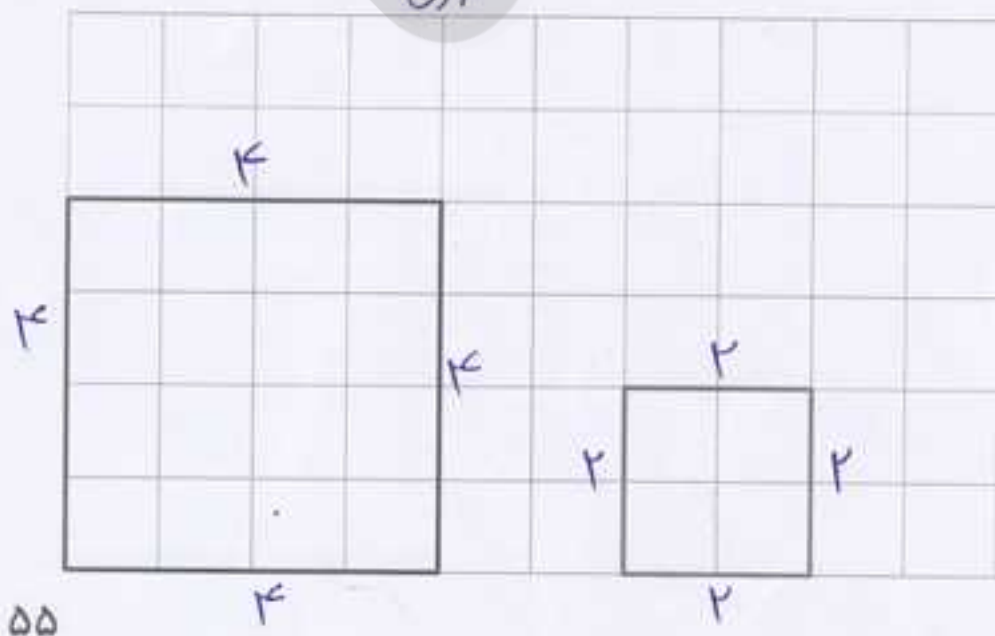
کار در کلاس

آری

۱- آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای

بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ ضلع‌های مربع بزرگ ^۲ برابر ضلع‌های مربع کوچک ^۱ است آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟

آری



۱۲. زیرا زاویه‌ها همگی برابر 90° است و نسبت اضلاع متناظر آنها برابر $\frac{1}{2}$ یا $\frac{2}{1}$ می‌باشد

۲- از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟ شماره ۱ را

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ **خیر**



مستطیل شماره ۱، ۲، ۳ متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع متناظر آن‌ها یکی

فعالیت $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{2}$ یا $\frac{2}{4} \neq \frac{2}{2}$ نسبت عرض ۲ بزرگ / عرض ۲ کوچک \neq طول ۴ بزرگ / طول ۲ کوچک

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همرنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{FE} &= \frac{9}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{FD} &= \frac{6}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{BC}{ED} &= \frac{10}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



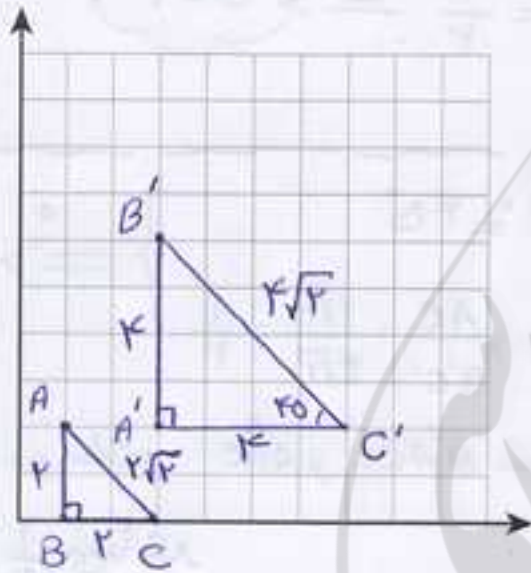
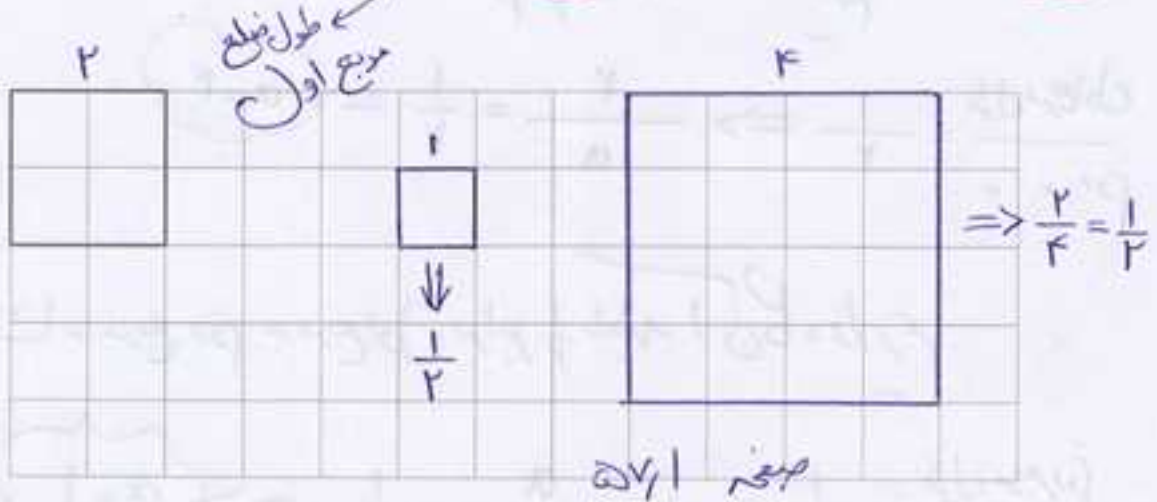
$$\frac{AB}{FE} = \frac{AC}{FD} = \frac{BC}{ED} = \frac{1}{2}$$

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

۱- با توجه به مربع صفحہ بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{4}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ دو پاسخ دارد می‌توانیم ضلع مربع دوم را دو برابر یا نصف کنیم در هر صورت نسبت تشابه دو مربع برابر $\frac{1}{4}$ است ۵۶

نسبت تشابه = $\frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow a=1$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{a} \Rightarrow a=4$



۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

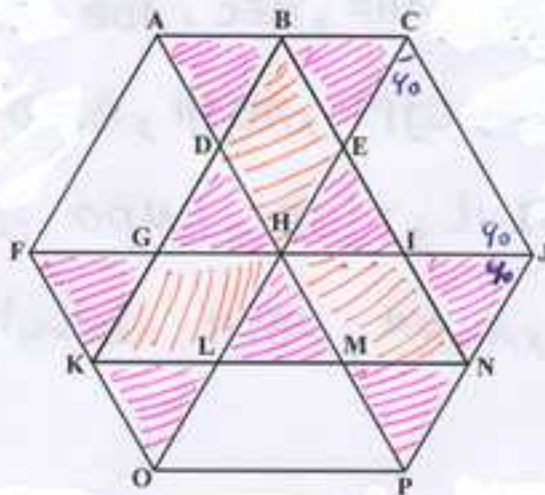
$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ مثلث ABC

$A' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $C' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ مثلث A'B'C'

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

تمرین

۱- چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید. *صورت اول*



کاربرد طلسم $\frac{1}{2}$ اگر نسبت متساویه مربع اول به دوم $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع اول}}{\text{طول مربع دوم}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

اگر نسبت متساویه مربع دوم به مربع اول برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع دوم}}{\text{طول مربع اول}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$\hat{A} = \hat{A}' = 45^\circ, \hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ, \hat{C} = \hat{C}' = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{AC'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{B'C'} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

پس دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle B'A'C'$ متساوی باشند و نسبت متساویه آنها برابر $\frac{1}{2}$ می باشد

تمرین در این تعداد زیاری مثلث و تعداد لوزی و ذوزنقه و متواری الاضلاع متساویه وجود دارد

۱- مثلث های متساویه مانند: $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle AHF$ و ...

۲- لوزی های متساویه مانند $BEHD$, $ACJH$ و $CJPH$ و ...

۳- ذوزنقه های متساویه مانند: $LMPO$ و $IJCE$ و $HINL$ و ...

۴- متواری الاضلاع های متساویه مانند: $ABNH$ و $ABNH$ و ...

۲- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بگو
 در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ نسبت تشابه برابر است

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ **خیر** صحیح ۵۸/۱

۴- در یک نقشه، مقیاس $1:200$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $3/5$ سانتیمتر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

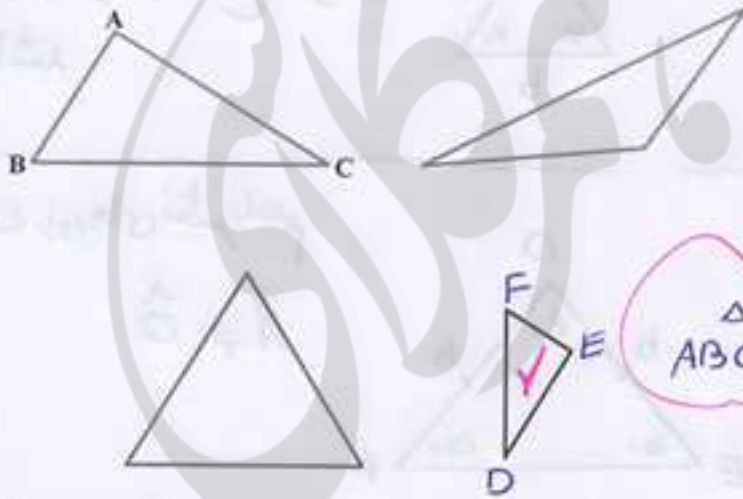
۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ **آری** صحیح ۵۸/۱

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ **خیر**

۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه

هستند (اندازه ضلع های مثلث ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟





در دلتاها نسبت اضلاع نظیر با هم برابر است ولیکن اندازه‌ی زاویه‌های نظیر لزوماً یکی نیست

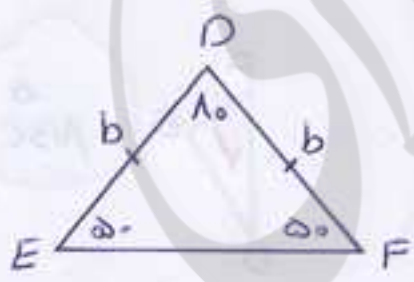
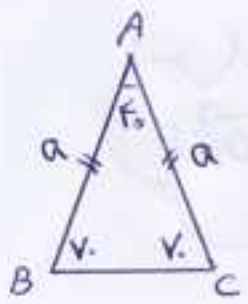
$$\frac{\text{مقدار واقعی}}{\text{مقدار نظری}} = \frac{1}{200} = \frac{3,5}{x} \Rightarrow x = 3,5 \times 200 = 700 \text{ cm}$$

۵ در دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلتاها به اضلاع a و b اندازه‌ی تمام زاویه‌ها



برابر ۶۰° است و نسبت اضلاع نظیر $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ می‌باشد لذا دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلتاها همیشه متساوی می‌باشند

۶ غیر زیر امکان است زاویه‌های نظیر با هم



$$\hat{A} \neq \hat{D}$$

برابر نباشد

$$\text{دو مثلث متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{x+7}{1}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9$$

$$\frac{6}{5} = \frac{x+7}{1} \Rightarrow 10 = 5x+35 \Rightarrow 45 = 9x \Rightarrow 5=x$$

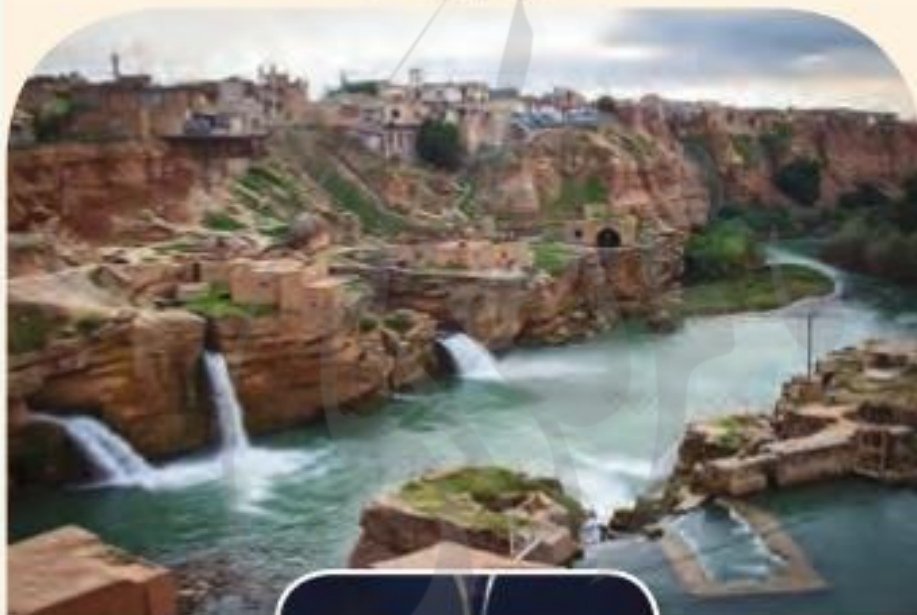
۵/۱

نویسنده: سعید جعفری صرعی



توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
 $۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $۳/۳ \times 10^{11}$
نمایش داد. هر گونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

درس اول: توان صحیح

در سال های گذشته با توان های طبیعی یک عدد آشنا شده اید؛ به طور مثال می دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می دانید که اگر a عددی غیر صفر باشد، $a^1=a$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر

باسخ این سؤال را می توان پیدا کرد:

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}

$16 \div 2 = 8$

$14 = 2^4$

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارد؟ هر عدد نصف عدد قبلی است

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه ای با عدد بالای آن دارد؟ با آن برابر است

ج) توان های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه ای دارد؟ در هر مرحله یک واحد از توان کم می شود

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید. پیشم

ه) به کمک جدول، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$2^{-2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \quad 2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

توضیح مهم ۹۰/۱

صفر ۹۰/۱

مثال:

الف) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

اگر n یک عدد صحیح منفی نباشد آن گاه $-n$ یک عدد طبیعی است

$$5^{-(-2)} = 5^2 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-(-7)} = \left(\frac{3}{5}\right)^7 \quad \text{مثال}$$

نکته: چرا n نمی تواند یک عدد گویای مثبت باشد

$$(-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(-5)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-5}} \notin \mathbb{R} \quad \text{مثال:}$$

$\sqrt{-5}$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad \frac{a}{b} \neq 0, \quad b \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \quad \text{مثال}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-7} \times \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^{10}$$

$$\frac{2^{-7} \times 3^4}{2^4 \times 3^{-1}} = \frac{\frac{1}{2^7} \times 3^4}{2^4 \times \frac{1}{3^1}} = \frac{3^4}{2^7} \times \frac{3^1}{2^4} = \frac{3^5}{2^{11}} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

کار در کلاس

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان دار با توان

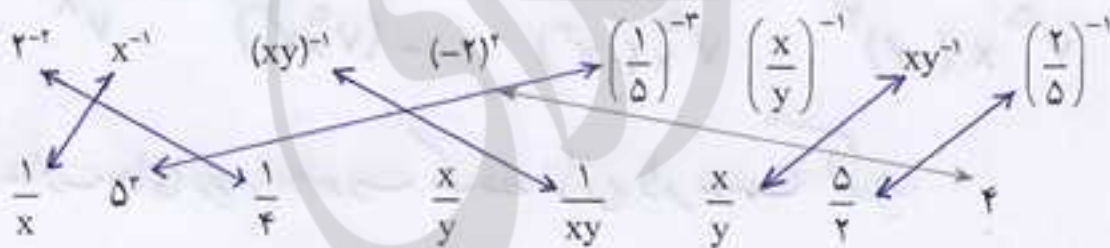
طبیعی بنویسید:

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج) $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = \frac{1}{36} = \left(-\frac{1}{6}\right)^2$ د) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{49}} = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آن گاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارات‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: ($x \neq 0, y \neq 0$)



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$ او) $1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$ ز) $\frac{(-3)^{-1}}{3} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$

ج) $-(-5)^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

ح) $-\frac{1}{3^{-2}} = -\frac{1}{\frac{1}{3^2}} = -3^2 = -9$

د) $-(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$

ط) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

ه) $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

ی) $2^{-2} - 2^{-1} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$

نکته: اگر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است و اگر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت است

$$(-a)^{2k} = a^{2k}, \quad (-a)^{2k+1} = -a^{2k+1} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

* در صورتی که $a=0$ باشد توان نباید صفر باشد
مثال:

$$(-1)^{100} = 1, \quad (-1)^{101} = -1$$

حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-5)^8 \times 5^{21} = 5^8 \times 5^{21} = 5^{29}$$

$$\frac{(-3)^{11} \times (-3)^5}{2^4 \times (-2)^{12}} = \frac{(-3)^{16}}{2^4 \times 2^{12}} = \frac{3^{16}}{2^{16}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{16}$$

$$\frac{(-7)^{13} \times 7^4}{7^5 \times (-7)^3} = \frac{-7^{13} \times 7^4}{7^5 \times (-7^3)} = \frac{-7^{17}}{-(7^5 \times 7^3)} = \frac{-7^{17}}{-7^8} = +\frac{7^{17}}{7^8} = 7^9$$

حاصل عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\text{الف) } 10^5 \div 2^{-5} = 10^5 \div \frac{1}{2^5} = 10^5 \times 2^5 = 2 \cdot 10^5$$

$$a^m \div b^{-m} = a^m \times b^m = (ab)^m$$

نتیجه

$$\text{ب) } \frac{5^1 \div 2^3}{2^{-3} \div 5^{-3}} = \frac{5^1 \times 2^{-3}}{2^{-3} \times 5^{-3}} = \frac{5^1}{5^3} = 5^{-2}$$

$$\text{ج) } \frac{7^{-2} \div 3^{-4}}{3^{-4} \times 7^6} = \frac{7^{-2} \times 3^4}{3^{-4} \times 7^6} = \frac{3^4 \times 3^4}{7^2 \times 7^6} = \frac{3^8}{7^8} = \left(\frac{3}{7}\right)^8$$

اگر m و n دو عدد طبیعی، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟ با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-2} \times 3^6 = \frac{1}{3^2} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^2 \times 5^{-7} = \dots$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشند و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه

زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-2} = 2^{3-5-2} = 2^{-4}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: $(b, x, y \neq 0)$

$$5^{-7} \times 5^{10} = 5^3$$

$$(-4)^{-1} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-1-1} = 4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{-2} = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 \quad (\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$$

$$b^{-2} \times b^{-7} = b^{-9} = \left(\frac{1}{b}\right)^9$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشند

مثال ۱: $(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = (-5)^1 = -5$

در واقع $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$

$$(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5 \times (-5))^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

اگر m و n متعلق به اعداد صحیح نباشند نمی‌توانیم از این دستور استفاده کنیم

نتیجه مهم

مثال ۲: $(-3)^{\frac{1}{2}} \times (-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{4}{2}} = (-3)^2 = 9$

در صورتی که $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-7)^{12} \times (-7)^4 \times (-7)^5 = (-7)^{12+4+5} = (-7)^{21}$$

$$(-7^3)^6 \times (-\frac{3}{10})^6 = (-\frac{3}{10})^{10} = (\frac{3}{10})^{10} = \frac{3^{10}}{10^{10}}$$

$$(-1\frac{4}{5})^7 \times (-\frac{9}{5})^7 \times (-1\frac{1}{8})^{12} = (-1\frac{1}{8})^{7+7+12} = (-1\frac{1}{8})^{26} = 1\frac{1}{8}^{26}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشند

(با استفاده از دستور بالا) $((-4)^2)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4$ ✗

$((-4)^2)^{\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ ✓

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; a^0 = 1$$

کار در کلاس

الف) $\frac{v^r}{v^0} = v^r = v^{-r} = \left(\frac{1}{v}\right)^r$ ب) $2^{-2} \times 5^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

ج) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2} \times 12^{-2} = \left(-\frac{2}{3} \times 12\right)^{-2} = (-8)^{-2} = \left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-2) \times (-1)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$
 $= \left(-\frac{1}{8}\right)^2$

د) $\frac{2^4 \times 5^{10}}{2^2 \times 5^8} = \frac{2^4}{2^2} \times \frac{5^{10}}{5^8} = 2^2 \times 5^2 = 10^2$

و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^{7} \cdot y^{-5} \cdot z^{-2} \quad x, y, z \neq 0$
 $= \frac{x^7}{y^5 z^2}$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

الف) $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \quad \checkmark \\ -6 \end{cases}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

ب) $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \quad \checkmark \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$3^{-1} \times 4^{-1} = \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12^1} = 12^{-1}$$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \quad \checkmark \\ 7^{-1} \end{cases}$

د) $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \checkmark \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه) $5^{-2} \begin{cases} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \quad \checkmark \end{cases}$

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = (3 \times 4)^{-1} = 12^{-1}$

ز) $(-2)^2 \begin{cases} 3^{-2} \\ -1 \quad \checkmark \end{cases}$

۶۳ $3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

حاصل عبارات های زیر را بدست آورید

$$[12^9 \div (\frac{4}{3})^9] \div 2^9 = (12 \times \frac{3}{4})^9 \div 2^9 = 18^9 \div 2^9 = 9^9$$

$$\frac{(8^7 \times 3^7) \div 24^2}{(2^3 \div 725^3) \times 3^3} = \frac{24^7 \div 24^2}{8^3 \times 3^3} = \frac{24^5}{24^3} = 24^2$$

$$4^7 \times 20^4 \times 15^7 \times 3^4 = (4^7 \times 15^7) \times (20^4 \times 3^4) = 40^7 \times 40^4 = 40^{11}$$

$$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^4} = \frac{17^{15} \times 15^{13}}{17^4 \times 15^{20}} = \frac{17^{15}}{17^4} \times \frac{15^{13}}{15^{20}} = 17^{11} \times 15^{-7} = \frac{17^{11}}{1} \times \frac{1}{15^7}$$

$$= \frac{17^{11}}{15^7} = (\frac{17}{15})^{11}$$

روش دوم

$$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^4} = \frac{17^{11} \times 15^{13}}{15^{16} \times 17^4} = \frac{17^{11}}{15^3} = (\frac{17}{15})^{11}$$

حاصل هر عبارت را بدست آورید

$$(0.05)^{-4} = \frac{1}{(0.05)^4} = \frac{1}{(\frac{5}{100})^4} = (\frac{1}{\frac{5}{100}})^4 = 20^4 = 160,000$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

توان منفی از اعداد کوچک مثبت اعداد بزرگ می سازد و از اعداد بزرگ مثبت اعدادی کوچک بین ۱ و صفر تولید می کند

نتیجه مهم:

اگر $2^a = 10$ باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید

$$2^{a+3} = 2^a \times 2^3 = 10 \times 8 = 80 \quad \text{ب) } 2^{a-1} = \frac{2^a}{2^1} = \frac{10}{2} = 5$$

$2^a = 10$

$$100 \text{ kg} = 100 \times 1000 \text{ g} = 10^2 \times 10^3 = 10^5 \text{ گرم}$$

$$10^5 \div 10^0 = 10^5 = 10^5 - (-24) = 10^{5+24} = 10^{29}$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 10^5 کیلوگرمی چند برابر

جرم یک اتم هیدروژن است؟ ما برابر جرم یک اتم هیدروژن نیست

۳- عددهای 16^2 و 8^4 و 2^{11} را با یکدیگر مقایسه کنید. صفحه ۴۴/۱

۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $3^{-1} \otimes 3^{-2}$
 $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$

ب) $2^0 \otimes 2^{-5}$
 $1 > \frac{1}{32}$

ج) $(0/5)^{-2} \otimes (0/6)^{-2}$
 $(\frac{5}{0})^{-2} = (\frac{1}{0})^{-2} = 2^2 = 4 \otimes (\frac{6}{0})^{-2} = (\frac{0}{6})^2 = \frac{25}{9}$

د) $5^{-1} \otimes 0$
 $\frac{1}{5} > 0$

ه) $(\frac{-8}{15}) \otimes 1$

و) $-5^{-2} \otimes (-5)^{-2}$
 عدد مثبت عدد منفی

۵- در هر یک از تساوی های زیر x چه عددی است؟

الف) $5^x \times 5^{-2} = 5^0 \Rightarrow x = 2$

ب) $5^x + 5^{-2} = 5^0 \quad x - (-3) = 4 \Rightarrow x = 1$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^x \times a^0 = a^x$ درست

ه) $(-3)^{-1} + (3^{-1})^{-1} = 4$ درست $1 + 3 = 4$

ب) $a^x \times a^0 = a^1$ درست

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$ نادرست

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$ درست (صفحه ۴۴/۱)

ز) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$ نادرست

د) $3^{-2} = -9$ نادرست

ح) $3^{-1} < 3^1$ درست

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید. صفحه ۴۴/۱

الف) $(\frac{1}{3})^{-1} \times 27^{-2} = 3^{10}$

ب) $(0/2)^{-2} \times 25^{-2}$

ج) $(\frac{15}{14})^{-2} \times (\frac{45}{28})^2$

د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-2} و 1^{-1} و $(-1)^{11}$ و $(-7)^2$ و $(\frac{1}{2})^{-2}$ و 2^2 و 5^{-2} و 2^{-2}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(-987)^1 < 10^0$ درست $(1/2)^2 < (1/0.2)^2$ نادرست $(\frac{5}{4})^2 < (0/7)^2$ نادرست $(\frac{3}{4})^2 > (-75)^2$ درست

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{8}{3})^{-2}$
 $-\frac{2^2 \times 2^{-2}}{3^2 \times 3^{-2}}$

ب) $\left[-(\frac{2}{3})^{-2} \right]^{-1} = \left[-(\frac{3}{2})^2 \right]^{-1} = \left[-\frac{9}{4} \right]^{-1} = -\frac{4}{9}$

$= \frac{(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{3}{8})^2}{-(2^2 \times 2^{-2})} = \frac{(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8})^2}{-2^{-2}} = \frac{(\frac{1}{4})^2}{-2^{-2}} = -2^2 \times (\frac{1}{4})^2 = -(2 \times \frac{1}{4})^2 = -\frac{1}{4}$

$= -(\frac{1}{4})^2 = -(\frac{1}{4})^2$

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}, 14^3 = (2^7)^3 = 2^{21} \Rightarrow 2^{11} < 8^4 = 14^3$$

۶- به طور کلی نمی توانیم اعداد کنیم
 است $(a^m)^n = (a^n)^m$
 زیرا: $((-3)^{\frac{1}{2}})^2 \neq ((-3)^2)^{\frac{1}{2}}$

طرف اول (سمت چپ) در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است
 $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$

زیرا عدد -3 در مجموعه اعداد حقیقی ریشه دوم ندارد

و سمت راست برابر 3 می شود
 $((-3)^2)^{\frac{1}{2}} = (+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$$(((-3)^{\frac{1}{2}})^2) = -3$$

حاصل سمت چپ برابر -3 می شود

در سالهای آینده علت این که حاصل برابر -3 می شود را می خوانید

۷- الف) $(\frac{1}{3})^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1 = 3$

ب) $(\frac{5}{2})^{-4} \times 25^{-2} = (\frac{2}{10})^{-4} \times (\frac{1}{25})^2 = (\frac{2}{5})^4 \times (\frac{1}{5})^2 = (5 \times \frac{1}{5})^4 = 1^4 = 1$

ج) $(\frac{15}{14})^{-4} \times (\frac{45}{28})^4 = (\frac{14}{15})^4 \times (\frac{45}{28})^4 = (\frac{14}{15} \times \frac{45}{28})^4 = (\frac{3}{2})^4$

د) $(-5^{-2})^{-1} = (-\frac{1}{5^2})^{-1} = (-\frac{1}{25})^{-1} = (-25)^1 = -25$

$$(-1)^{11} = -1 < -2^{-4} = -\frac{1}{16} < 5^{-3} = \frac{1}{125} < 2^{-3} = \frac{1}{8} < 1^{-90} = 1 < (-\frac{1}{4})^{-2} = 4 < 2^3 = 8 < (-7)^2 = 49$$

$(\frac{1}{987})^{10} < 1^0 \Rightarrow (\frac{1}{987})^{10} < 1$ ✓

$1,2 > 1,02 \Rightarrow (1,2)^5 > (1,02)^5$

$\frac{5}{4} > 0,7 \Rightarrow (\frac{5}{4})^2 > (0,7)^2$

$\frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow (\frac{3}{4})^2 > (0,75)^2$

۱ آیا تساوی $(-v^2)^3 = (-v^3)^2$ درست است؟

$$(-v^2)^3 = (-49)^3 = -117649$$

$$(-v^3)^2 = (-343)^2 = 117649$$

جواب: خیر زیرا

در واقع عدد $(-v^3)^2$ عددی مثبت و عدد $(-v^2)^3$ عددی منفی است

۲ اثر a عددی مثبت و m, n اعدادی صحیح باشند، $m > n$

الف) $0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$

ب) $a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$

ج) $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$

$$\dots < \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^1 < \left(\frac{1}{4}\right)^0 < \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^4 < \dots$$

نتیجه: هرچه قدر توان عدد $\frac{1}{4}$ بزرگ تر می شود حاصل کوچک تر و هرچه قدر توان آن کوچک تر می شود حاصل عددی بزرگ تر است.

۳ حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$[(14^3)^2]^3 = 14^{3 \times 2 \times 3} = 14^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$$

۴ حاصل عبارات $(5^2)^3$ و $5^{2 \times 3}$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6, \quad 5^{2 \times 3} = 5^6 \quad (\text{زیر عدد } 2^3 = 8 \text{ است})$$

$$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

$$5^{2^4} = 5^{2 \times 2 \times 2} = 5^8$$

$$a^m \neq (a^m)^n$$

نتیجه ی مهم

۵ - اعداد 2^{43} و 3^{42} را با هم مقایسه کنید

$$2^{43} = (2^3)^{21} = 8^{21}, \quad 3^{42} = (3^2)^{21} = 9^{21}$$

$$\Rightarrow 9^{21} > 8^{21} \Rightarrow 3^{42} > 2^{43}$$

۲- حاصل عبارات‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$1) \frac{\Lambda^{-11} \times (\frac{1}{2})^{-12}}{2^{-9} \times 4^5} = \frac{(2^3)^{-11} \times (\frac{1}{2})^{-12}}{2^{-9} \times (2^2)^5} = \frac{2^{-33} \times 2^{12}}{2^{-9} \times 2^{10}} = \frac{2^9 \times (2^2)^{12}}{2^{33} \times 2^{10}} = \frac{2^9 \times 2^{24}}{2^{43}} = \frac{2^{33}}{2^{43}} = 2^{-10} = (\frac{1}{2})^{10}$$

$$2) 27^{11} + 27^{11} + 27^{11} = 3 \times 27^{11} = 3 \times (3^3)^{11} = 3 \times 3^{33} = 3^{34}$$

$$3) 10 \times 2^{14} + 12 \times 2^{14} + 3 \times 2^{14} = (10+12+3) \times 2^{14} = 25 \times 2^{14} = 5 \times 5 \times 2^{14} = 5^2 \times 2^{14}$$

$$4) \frac{120^{11} \times \Lambda^5 \times (\frac{1}{2})^{14}}{20^5 \times 4^{-5} \times (\frac{1}{2})^{-12}} = \frac{(2^3 \times 3 \times 5)^{11} \times (2^2)^5 \times 2^{-14}}{(2^2 \times 5)^5 \times (2 \times 3)^{-5} \times 2^{12}} = \frac{2^{33} \times 3^{11} \times 5^{11} \times 2^{-14} \times 2^{-5}}{2^{10} \times 5^5 \times 2^{-5} \times 3^5 \times 2^{12}} = \frac{2^{33-14-5} \times 3^{11} \times 5^{11}}{2^{10-5+12} \times 5^5 \times 3^5} = \frac{2^{14} \times 3^{11} \times 5^{11}}{2^{17} \times 5^5 \times 3^5} = \frac{2^{14} \times 3^6 \times 5^6}{2^{17} \times 5^5 \times 3^5} = \frac{2^{14} \times 3 \times 5}{2^3 \times 5} = \frac{2^{11} \times 3}{2^3} = 2^8 \times 3 = 192$$

$$5) 2^{22} \times 3^{33} = 2^{2 \times 11} \times 3^{3 \times 11} = (2^2)^{11} \times (3^3)^{11} = 4^{11} \times 27^{11} = 108^{11}$$

$$6) 5^{12} \times 2^{18} = 5^{2 \times 6} \times 2^{3 \times 6} = (5^2)^6 \times (2^3)^6 = 25^6 \times 8^6 = 200^6$$

$$7) \frac{14^5 \times 125^7}{25^7 \times 32^4} = \frac{(2 \times 7)^5 \times (5^3)^7}{(5^2)^7 \times (2^5)^4} = \frac{2^{25} \times 7^5 \times 5^{21}}{5^{14} \times 2^{20}} = \frac{2^5 \times 7^5 \times 5^7}{5^{14}} = \frac{2^5 \times 7^5}{5^7} = \frac{2^5 \times 7^5}{5^7}$$

اگر عددی را در توانی از ۱۰ ضرب کنیم، اگر توان مثبت باشد به تعداد توان عدد ۱۰، همیز به سمت راست تغییر مکان می‌دهد و اگر آن را بر توانی از ۱۰ تقسیم کنیم (توان مثبت) به تعداد توان عدد ۱۰، همیز به سمت چپ تغییر مکان خواهد داد

درس دوم: نماد علمی

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های 10 یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های 10 خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان همیز چگونه تغییر می‌کند؟

تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در
10^5	10	10^6	100	10000	1000	10^7	10^2	10^5	10^5
15000000	$0/00015$	1500000	$0/15$	150000	$0/015$	150000000	$0/0015$	15000000	$0/00015$
200000000	$0/000002$	20000	$0/0002$	2000	$0/0002$	2000000000	$0/000002$	20000000	$0/0000002$
9300000	$0/00093$	93000	$0/093$	9300	$0/0093$	930000000	$0/00093$	93000000	$0/000093$

۲- سرعت نور $300,000,000$ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید $= 300,000,000 \times 360,000$ ثانیه $= 360,000$ ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد 10 نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300,000,000 = 3 \times 10^8$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 360,000 = 1080 \times 10^5 = 108 \times 10^7$$

$$360,000 = 36 \times 10^4$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

نماد علمی

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$170000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^3$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^4$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز $7/000000$ میلیمتر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای

کوچک مانند $7/000000$ را هم می توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:

$$7/000000 = 7 \times 10^{-6}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود 0.16 سانتیمتر است که با نماد علمی، آن را به صورت

$$1/6 \times 10^{-2}$$
 نمایش می دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن

$1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

$$0.0001275 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

$$0.0137 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$29000 = 2/9 \times 10^4$$

مثال:

کار در کلاس

۱- هر یک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245000 = 2,45 \times 10^5$$

$$150000000 = 1,5 \times 10^8$$

$$0.005 = 5 \times 10^{-3}$$

$$0.00061 = 6,1 \times 10^{-5}$$

$$1404 = 1,404 \times 10^3$$

$$0.1275 = 1,275 \times 10^{-1}$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$$5/2 \times 10^{-2} = 0.052$$

$$7/304 \times 10^{-3} = 0.0007304$$

$$2/28 \times 10^4 = 228000,000$$

$$9/4612 \times 10^1 = 9,461,200000$$

$$6/02 \times 10^{-2} = 0.0402$$

$$1/1 \times 10^2 = 1100$$

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$

ب) $\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-2} \times \frac{1}{8}}$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.000001 = 2$

$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$

$4/3 \times 10^2 = 4300$

$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$

$6/18 \times 10^2 = 6180000$

$8/2570 \times 10^2 = 82570$

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 6.95×10^5

۴- اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 5×10^{-7}

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^1$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟ $4/7$ صحیح

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید:

$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^1$

$\frac{12/5 \times 10^{-2}}{25 \times 10^{-11}}$

$4/7$ صحیح

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$2/7 \times 10^0 > 0.2$

$0.3 > 0.003 \times 10^0$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{30^{-5} \times 5^2}{90^{-5}} = \left(\frac{30}{90}\right)^{-5} \times 5^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \times 25 \quad \underline{\underline{1}}$$

$$= 3^5 \times 25 = 32 \times 25 = 100$$

$$\text{ب) } \frac{1^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{1}} = \frac{2^4 \times (2^2)^2}{1 \times 1^{-1}} = \frac{2^4 \times 2^4}{1^0} = \frac{2^8}{1} = 256$$

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{1,4 \times 10^9}{1,3 \times 10^7} = \frac{14 \times 10^8}{13 \times 10^6} = \frac{14}{13} \times 10^2 \approx 1,07 \times 10^2 = 107 \quad \underline{\underline{5}}$$

قطر خورشید 107 برابر زمین است

$$2 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^9 = 8 \times (10^{-2} \times 10^9) = 8 \times 10^7 \quad \underline{\underline{6}}$$

$$\frac{12,5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}} = \frac{125 \times 10^{-5}}{25 \times 10^{-19}} = 5 \times \frac{10^{19}}{10^5} = 5 \times 10^{14}$$

$$9,287 \times 10^8 = 42,87 \times 10^7 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 9,17 \times 10^7 \Rightarrow \text{میخ به زمین نزدیک تر است} \quad \underline{\underline{7}}$$

$$0,02 < 2,7 \times 10^{-2} < 2,7 \times 10^{-1} < 2,7 \times 10^0 < 2,7 \times 10^1 < 2,7 \times 10^2 < \dots \quad \underline{\underline{8}}$$

$$0,003 > 0,003 \times 10^0 > 0,003 \times 10^{-1} > 0,003 \times 10^{-2} > 0,003 \times 10^{-3} > \dots$$

$$1,5 \times 10^{-2} = 15 \times 10^{-3}, \quad 1,2 \times 10^4 = 1,200,000, \quad 5,35 \times 10^{-3} \quad \underline{\underline{9}}$$

$$3,7 \times 10^{-2} = 37 \times 10^{-3}$$

$$5,35 \times 10^{-3} < 15 \times 10^{-3} < 37 \times 10^{-3} < 1,200,000$$

$$\Rightarrow 5,35 \times 10^{-3} < 1,5 \times 10^{-2} < 3,7 \times 10^{-2} < 1,2 \times 10^4$$

فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید:

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(-\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad 4^2 = 16 \quad (-4)^2 = 16$$

مربع (توان دوم) عددها ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند. همان گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می‌دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

عدد	۳	-۳	۴	-۴	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\sqrt{4}$	$-\sqrt{4}$
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶		$\frac{4}{9}$		۵		$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند. همان طور که می‌دانید عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳	۴	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸	۲۷	-۲۷	۶۴	$\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{125}$	۱۲۵	$-\frac{8}{27}$	۰

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $2^3 = 8$. ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{8} = 2$. همچنین چون $(-2)^3 = -8$ ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲- است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{-8} = -2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر $4 \dots 4 \dots 4$ و ریشه سوم عدد $-\frac{1}{27}$ عدد $-\frac{1}{3}$ است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$(\sqrt[3]{8})^3 = 8 \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.

هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{4^2} = 4 \quad \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10} \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \quad \sqrt{8^2} = |8| = 8 \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \sqrt{(2-9)^2} = |2-9| = |1-7| = 7 \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها

حل شده است.

الف) x و y هر دو مثبت هستند ($x > 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$

ب) x مثبت و y منفی است ($x > 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$

ج) x منفی و y مثبت است ($x < 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$

د) x و y هر دو منفی هستند ($x < 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$

۱- حاصل را بدست آورید

$$\text{الف) } \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \underbrace{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} = 2-\sqrt{5}$$

$$\text{د) } \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) = -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

۲- حاصل را بدست آورید

$$۱) \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$$

$$۲) \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$۳) \sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$$

$$۴) \sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^6} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است:

فعالیت

با توجه به عدد‌های داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر

جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$2 \times 5 = 10$
۲۷	۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{3}{2}$	$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
-۸	-۲	۲۷	۳	-۲۱۶	-۶	$-2 \times 3 = -6$

به‌طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$. همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8+27}$$

خیر

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35} < \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{35} < 5$$

۷۰

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید:

$$\sqrt{4} \times \sqrt{16} = \sqrt[3]{44} = 4$$

$$3\sqrt{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt{-8} = 15 \times (-2) = -30$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sqrt{-54}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-54}{2}} = \sqrt{-27} = -3$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید:

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید:

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ صحیح یا غلط

$\otimes \sqrt{(-1)^2} = -1$	$\checkmark \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\checkmark \sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$	$\checkmark \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$\checkmark -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\checkmark \sqrt{1/44} = 1/2$	$\otimes (\sqrt{-1})^2 = 1$	$\checkmark \sqrt{-64} = -4$

\checkmark تعریف نشده

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید:

$\sqrt{125} \times \sqrt{36}$	$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$	$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$	$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$
$\rightarrow 30$	$\rightarrow 9$	$\rightarrow 3$	$\rightarrow -5$

$\sqrt{125} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30$, $\sqrt{-1} \times \sqrt{81} = (-1) \times 9 = -9$, $\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$
 $\checkmark \sqrt{-25} \times \sqrt{5} = \sqrt{-125} = -5$

$$\frac{49}{14} \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{11} \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \frac{1}{9}, -\frac{1}{9} \quad \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

$$15 \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \pm\sqrt{15}, 12 \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}, 144 \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$144 \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \pm\sqrt{144} = \pm 12, 18 \xrightarrow{\text{ریشه کی دو}} \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$214 \xrightarrow{\text{ریشه کی سو}} 4, \sqrt[3]{\text{ریشه کی سو}} 7, -5 \xrightarrow{\text{ریشه کی سو}} \sqrt[3]{-5} \quad \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$$-\frac{1}{214} \xrightarrow{\text{ریشه کی سو}} -\frac{1}{4}, 10 \xrightarrow{\text{ریشه کی سو}} \sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3, (\sqrt{-3})^2 = \text{تعریف ندره} \quad \underline{\underline{\frac{3}{3}}}$$

$$\sqrt{(-3)^2} \neq (\sqrt{-3})^2$$

توجه

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow a < 8$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید. معنی $\sqrt{2}/1$

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدر مطلق بنویسید.

۹- عبارت های زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$$\sqrt{150}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی های زیر درست است؟

$$(\sqrt{-2})^2 = -2$$

$$\sqrt{-4} = -\sqrt{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt{16} \times 3\sqrt{4} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{60}}{\sqrt{5}}$$

$$2\sqrt[3]{14} \times 3\sqrt[3]{4} = 4 \times \sqrt[3]{14 \times 4} = 4\sqrt[3]{44} = 4 \times (+4) = 24$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{8 \times 5}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 40}{5}} = \sqrt[3]{214} = 4$$

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{(-x)^2} = x \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2, \quad \sqrt{(-(-2))^2} = -2 \text{ باشد } x \geq 0 \text{ است } |x| = x \text{ در صورتی}$$

$$S = 94a^2 \Rightarrow \text{سکینوم} = 94a^2 \div 4 = 14a^2 \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\text{اندازه‌ی ضلع} = \sqrt{14a^2} = \sqrt{14}a \quad \text{بنی‌بندیم، مقدار } a \text{ مثبت است یا منفی}$$

$$V = (\text{اندازه‌ی ضلع})^3 = (\sqrt{14}a)^3 = 14\sqrt{14}a^3 \quad \alpha > 0 \Rightarrow V = 14\sqrt{14}a^3$$

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x \quad \Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) \quad \underline{\underline{1}}$$

$$y < 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| = -y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x + y$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5^2} = \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{5^2} = \sqrt{18} \times 5 = 5\sqrt{18} \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 3^2} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{1250^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = 5^2 = 25$$

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2}) = \sqrt[3]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \quad 10$$

$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{(-1) \times 4} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{4} = -1 \times \sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{در واقع}$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه پیتاگورس داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین مساحت این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اندازه ضلع مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ = محیط مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشند، می‌توان آنها

را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی

یکسان هستند و داریم: $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{4}\sqrt{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$3\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{2}$
$-2\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$2\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2}$	$\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{10}$	$\frac{14}{5}\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$	$5\sqrt{xy} - 5\sqrt{x}$	$7\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارات زیر را ساده کنید.
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

الف) $\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین:

ب) $\sqrt{50} + \sqrt{24} + \sqrt{81} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 3}$
 $= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

مثال ۱: حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دوروش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2}$
 $= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6}$

ب) $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$

مثال ۲: حاصل $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

$$(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3} = \sqrt{3} \div \sqrt{3} = 1$$

۱- حاصل را درست آورید

$$۱) \sqrt{۳} \times \sqrt{۲۷} = \sqrt{۳ \times ۲۷} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

$$۲) \sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{(-۲) \times ۴} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$$

$$۳) \sqrt{۳-\sqrt{۸}} \times \sqrt{۳+\sqrt{۸}} = \sqrt{(۳-\sqrt{۸})(۳+\sqrt{۸})} = \sqrt{۹ + \underbrace{۳\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۸} - \sqrt{۸} \times ۸}_{\text{صفر}}} \\ = \sqrt{۹-۸} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$۴) \sqrt{\sqrt{۲}} \times \sqrt{\sqrt{۸}} = \sqrt{\sqrt{۲} \times \sqrt{۸}} = \sqrt{\sqrt{۱۶}} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$۵) \sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}} \times \sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}} = \sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۵})(۲+\sqrt{۵})} = \sqrt[۳]{۴ + \underbrace{۲\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}}_0 - \sqrt{۲۵}} \\ = \sqrt[۳]{۴-۵} = \sqrt[۳]{-۱} = -۱$$

$$۶) \frac{\sqrt{۱۲} \times \sqrt{۱۵}}{\sqrt{۲۰}} = \frac{\sqrt{۱۲ \times ۱۵}}{\sqrt{۲۰}} = \sqrt{\frac{۱۸۰}{۲۰}} = \sqrt{۹} = ۳$$

۲- عبارت های زیر را ساده کنید

$$۱) ۵\sqrt{۱۱} + ۴\sqrt{۱۱} - ۳\sqrt{۱۱} = (۵+۴-۳)\sqrt{۱۱} = ۶\sqrt{۱۱}$$

$$۲) ۲\sqrt{۱۸} - ۳\sqrt{۳۲} + \sqrt{۱۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۹ \times ۲} - ۳\sqrt{۱۶ \times ۲} + \sqrt{۴ \times ۳} - \sqrt{۳} - \sqrt{۴ \times ۲} \\ = ۲ \times ۳\sqrt{۲} - ۳ \times ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} - ۱۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲} \\ = (۶-۱۲-۲)\sqrt{۲} + (۲-۱)\sqrt{۳} = -۸\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = \sqrt{۳} - ۸\sqrt{۲}$$

$$۳) (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^۲ - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + \sqrt{۲}) - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}) \\ = \sqrt{\frac{۹}{۳}} + \sqrt{۴} + \sqrt{۶} + \sqrt{\frac{۴}{۳}} - (\sqrt{\frac{۹}{۳}} - \sqrt{۴} - \sqrt{۶} + \sqrt{\frac{۴}{۳}}) \\ = ۵ + ۲\sqrt{۶} - (۵ - ۲\sqrt{۶}) = ۵ + ۲\sqrt{۶} - ۵ + ۲\sqrt{۶} = ۴\sqrt{۶}$$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. صفحه ۷۵/۱

$$۱) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$۴) \sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$$

$$۲) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$۳) ۵\sqrt{2} + ۳\sqrt{54} - ۴\sqrt{128}$$

$$۵) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

گویا کردن مخرج کسرها: وقتی مخرج کسرها را گویا کنیم کار با آن‌ها آسان‌تر شود

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و با آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

فعالیت

نوضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \quad \text{ب) } \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{25}}{\sqrt{5^3}} = \frac{2\sqrt{25}}{5}$$

$$\text{ج) } \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \times \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} \quad \text{د) } \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ه) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad \text{و) } \frac{5}{\sqrt{z^2}} \times \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{5\sqrt{z}}{\sqrt{z^3}} = \frac{5\sqrt{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

$$1) \sqrt{9A} - \sqrt{50} + \sqrt{12A} = \sqrt{V^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{A^2 \times 2} = V\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + A\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$2) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{2^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$$

$$3) 5\sqrt{2} + 3\sqrt{52} - 4\sqrt{128} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{4^2 \times 3} - 4\sqrt{2^2 \times 4} = 5\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{3} - 4 \times 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2} = -3\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

$$4) \sqrt{4 + \frac{1}{11} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{424 + 1 + 44}{11}} = \sqrt{\frac{471}{11}} = \frac{19}{9}$$

$$5) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2^2} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{3^2} = 4\sqrt{6} - 3 = 3 + 2\sqrt{6}$$

مخرج کسره‌های زیر را لویا کنید

$$1) \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{25} - \sqrt{15} + \sqrt{15} - \sqrt{9}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$2) \frac{5}{\sqrt{2} + 1} = \frac{5}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = 5\sqrt{2} - 5$$

$$3) \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{25}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} = 3 - \sqrt{5}$$

$$4) \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{\sqrt{121} + \sqrt{55} - \sqrt{55} - \sqrt{25}} = \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{11 - 5} = \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{6}$$

$$5) \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{6} = \frac{2(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{3}$$

کار در کلاس

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$ ب) $\frac{2}{\sqrt{22}} = \frac{1}{\sqrt{22}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 11} = \frac{\sqrt{2}}{22}$

ج) $\frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{36}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$ د) $\frac{5}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{9x^3}}{\sqrt{9x^3}} = \frac{5\sqrt{9x^3}}{\sqrt{2 \times 9x^3}} = \frac{5\sqrt{9x^3}}{3x}$ ($x \neq 0$)

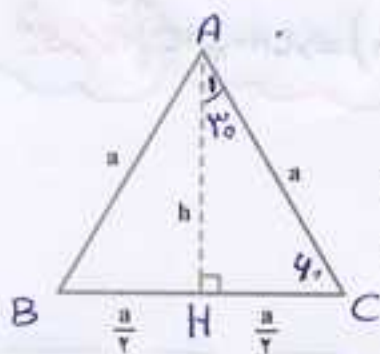
تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$ ج) $\sqrt{27^2}$ هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ د) $\sqrt{\frac{-27}{64}}$ و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$



۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

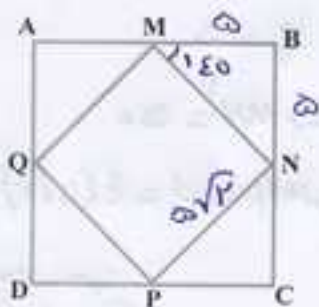
۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتیمتر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب a بنویسید.



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 مترمربع باشد، محیط مربع

$MNPQ$ چقدر است؟

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{18} = 2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{9 \times 2} = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{27 \times 27} = \sqrt[3]{(27^2)^3} = \sqrt[3]{(27^2)^3} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{48}} = \sqrt[3]{\frac{(-3)^3}{4^3}} = \sqrt[3]{(-\frac{3}{4})^3} = -\frac{3}{4}$

هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{2} - \sqrt{50} - \sqrt{10} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{2} - \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} - \sqrt{10} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - \sqrt{10}$

و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 2 \times 4\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$2\sqrt{x^2} - x = 2|x| - x \stackrel{x < 0}{=} -2x - x = -3x$

مساحة = $4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ ، محيط = $2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 9\sqrt{5} = 9 \times 5 = 45$

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (\frac{a}{f})^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{f} = \frac{fa^2 - a^2}{f} = \frac{2a^2}{f}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{2a^2}{f} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}a}{f}$ ($\hat{H} = 90^\circ, A_1 = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{1}{2}AC$)

($\hat{H} = 90^\circ, \hat{C} = 45^\circ$) $\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$

$ABCD$ متساوي الساقين $= 100 \Rightarrow AB = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow BM = AM = \frac{10}{2} = 5$

$\triangle BMN$: $\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow MN^2 = BM^2 + BN^2 \Rightarrow MN^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow MN^2 = 50$

$\Rightarrow MN = \sqrt{50} \Rightarrow MN = \sqrt{25 \times 2} \Rightarrow MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow$ محيط $MNPQ = 4(5\sqrt{2}) = 20\sqrt{2}$

($\hat{B} = 90^\circ, \hat{M}_1 = \hat{N}_1 = 45^\circ$) $\Rightarrow MN = \sqrt{2} BM$

نتيجه صحيح



عبارت‌های جبری

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

استفاده از شکل‌های هندسی برای اثبات تساوی‌های جبری سابقه‌ای دیرینه دارد. ریاضی‌دانان دوره اسلامی - ایرانی از پیشگامان این کار بوده‌اند.

فعالیت

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم.
عبارت‌های زیر همگی یک جمله‌ای هستند.

$$7, x, 5x^{10}, -\sqrt{3}a^2x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{7}$$

و عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارت‌های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله‌ای‌های مشابه گفته می‌شود؛ به عنوان مثال یک جمله‌ای‌های $4x^2y$ و $\frac{5}{3}x^2y$ و $-2x^2y$ مشابه‌اند اما یک جمله‌ای‌های $3x^2$ و $3x$ مشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

$$1) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$2) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2 = \frac{4}{9}x^4y^2$$

$$3) (-3x^2)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 = 9x^4 \times \frac{1}{9}x^4 = x^8$$

$$4) \left(\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{5}a^2c^5\right) = -\frac{1}{5}a^5b^2c^5$$

$$5) 2(5xy^2)^2(-2x^5y^2) = (2 \times 25 \times x^2 \times y^4)(-2x^5y^2) = -100x^7y^6$$

$$6) (2x^2y)(2x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) = 4x^4y^3 - 5x^3y^3 = x^3y^3$$

در یک جمله‌ای $5a^2x^2y$ ، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر a ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x ، ۲ و درجه نسبت به y ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با $2+2=4$ تعریف می‌کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}ax^2y^4$	a, x, y	۲	۴	۲+۴=۶
$5x^2y^2z^3$	x, y, z	۲	۲	۲+۲=۴
$-12x^3u$	x, u	۳	۰	۳+۰=۳
$\frac{2}{5}$	—	۰	۰	۰

یک جمله‌ای‌های $2x^2y^2$ و $-5x^2y^4$ را که مشابه نیستند، یک جمله‌ای‌های غیرمشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی یک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند یک جمله‌ای یا جمع جبری چند یک جمله‌ای غیرمشابه باشد؛ مانند:

$$2x^2 - 4x + 1, x^2 - 2x, \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{4}axy^2 - axy, 2x^2$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر یا بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۲ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه یک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۲ است. معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۲- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف) $2x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 2x^2 - 2x + 5$

ب) $-2bxy^2 + ax^2y - 2bx^2y^3$

ج) $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 + 2x^2y - 2 = 2x^2y + \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 - 2$

$= -2bx^2y^3 + ax^2y - 2bxy^2$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2 - 2ax + x^2 - [2a^2 + 5ax - (2a^2 - 1ax)] =$

$$-5a^2 - 2ax + x^2 - [2a^2 + 5ax - 2a^2 + 1ax] = -5a^2 - 2ax + x^2 - 2a^2 - 4ax + 2a^2 + 1ax = x^2 - 14ax - 4a^2$$

$$5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x$$

ب) $(4x+5x^4)(x^2-x+1) = 4x^3 - 4x^2 + 4x + 5x^6 - 5x^5 + 5x^4 =$

ج) $(x+x^2)(x^2+x^3+1) = x^4 + x^5 + x^6 + x^3 + x^2 + x =$

د) $(x^2-2x+1)(x^2+x^3-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 - x^5 + 4x - 2 =$

فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید :

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-2	4	-12	4-12+9=1	$(-2+3)^2=1$
0	0	0	9	9
5	25	30	25+30+9	64
$\frac{2}{2}$	$\frac{9}{4}$	$4 \times \frac{3}{2} = 6$	$\frac{9}{4} + 6 + 9 = \frac{41}{4}$	$(\frac{2}{2} + 3)^2 = \frac{41}{4}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ برابرند
حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ دو ستون آخر با هم برابرند.

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشد، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ یک اتحاد است.

برابری $3x-2 = x+1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

$$3 \times 2 - 2 = 2 + 1$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید. نتیجه

همان طور که می‌دانید به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

$$\text{ب) } (5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$$

$$\text{ج) } (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

۳- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

۱- جمله اول سمت راست برابری یعنی $25x^2$ چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟ مربع $5x$ می‌باشد.

۲- جمله دوم سمت راست برابری یعنی $20x$ چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟ دو برابر حاصلضرب $5x$ و 2 است.

۳- جمله سوم سمت راست برابری یعنی 4 چه رابطه‌ای با 2 دارد؟ مربع 2 .

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن

به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

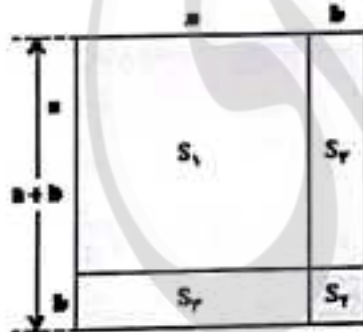
$$(5x+2)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$$

\swarrow جمله اول \downarrow جمله دوم \swarrow مربع دو جمله اول \searrow دو برابر حاصلضرب دو جمله

برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مقابل را نشان دهید.



$$\text{مساحت کل شکل} = (a+b)^2 = s_1 + 2s_2 + s_4$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$

ب) $(2x-5x)^2 = (2x-5x)(2x-5x) = (-2x)(-2x) = 4x^2$

ج) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده

در سمت چپ آنها را بیان کنید.

ن
عملیات جبری

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

کار در کلاس

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 2x + 1$

ب) $(4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

ج) $(x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

د) $(2xy - \frac{1}{2}x^2)^2 = 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{4}x^4$

ه) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = 2 + 6\sqrt{6} + 27$

و) $(5 - 2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف) $(4a + 3b)^2 = 4a^2 + 24ab + 9b^2$

مربع جمله اول مربع جمله دوم مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول جمله‌ها

مربع جمله اول = $4a^2 = (2a)^2 \Rightarrow$ جمله اول = $2a$

مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها = $2(2a)(3b) = 12ab$

$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

در نتیجه داریم :

الف) $(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$

ب) $(xy - \frac{1}{2})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

ج) $(x^2 - \frac{1}{x})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

د) $(2x - \frac{1}{2})^2 = 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها مطالعه کرده‌اید.

حاصل ضرب
 $a(b+c) = ab+ac$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای $ab+ac$ را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac=a(b+c) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{(م.م.ب) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک} \end{array}$$

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف) $8x^2+12x=2x \cdot 2x+2x \cdot 3$
 $= 2x(2x+3)$

(م.م.ب) = $2x$

(با توجه به خاصیت بخش‌پذیری)

$7a^3x^2 - 7a^3x^3 = 7a^3(x^2 - x^3)$

ج) $7x^3 - 14x^2 + 21x = 7x^2 \cdot x - 7x^2 \cdot 2x + 7x^2 \cdot 3 = 7x^2(x - 2x + 3)$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y =$

$5xy(x - 2xy + 3x)$

کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای $a^2+2ab+b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^2$ بنویسیم در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

مربع کامل $2(x)$ (3) مربع کامل

ب) $x^2-4x+4=(x-2)^2=(x-2)(x-2)$

ج) $n^2-10n^2+25=(n^2-5)^2=(n^2-5)(n^2-5)$

د) $8ax^2+24axy+18ay^2=2a(4x^2+12xy+9y^2)=2a(2x+3y)^2=2a(2x+3y)(2x+3y)$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \text{(م.م.ب)} = 2a$$

□ سوال

① $2am^x(-1m^x) - \frac{1}{x}m^x(-1m^x) = -200m^x + 2m^x = -198m^x$

② $\underline{V}a^x - \underline{K}b^x + \underline{a}c^x - \underline{a}^x + \underline{9}b^x + \underline{11}c^x = 4a^x + ab^x + 14c^x$

③ $x^{2m} - 2x^m + 1$

④ $x - [y - x - y + 1] = x + x - 1 = 2x - 1$

$h^2 = 9m^2n^2 - m^2n^2 = 8m^2n^2$

$h = mn\sqrt{8}$
ارزش دوزن

□ سوال

① $\underline{e} = 2m^2n + 2m^2n + am^2n + 2m^2n + 2m^2n + 2m^2n = 11m^2n$

$\hookrightarrow \underline{a} = 2m^2n \times 2m^2n + \frac{mn\sqrt{8}(2m^2n + am^2n)}{2} = 4m^4n^2 + 2m^3n\sqrt{8}$

②

ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس ضلع مثلث را محاسبه میکنیم

$25x^2y^2 = 9x^2y^2 + (\text{ضلع})^2$

$(\text{ضلع مثلث})^2 = 25x^2y^2 - 9x^2y^2 = 16x^2y^2 \rightarrow \text{ضلع مثلث} = 4xy$

$\underline{e} = 2xy + 2x \times 4xy + 4xy + 2xy + 2xy = 20xy$

$\underline{a} = 2xy \times 4xy + 2xy \times 4xy \times \frac{1}{2} = 8x^2y^2 + 4x^2y^2 = 12x^2y^2$

□ سوال

۱) $25y^2 - 20xy + 9x^2$

۲) $9a^2 + 4d + a^2$

۳) $25x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{1}{9}$

۴) $(2, v + 3, c)^2 = 4^2 = 16$

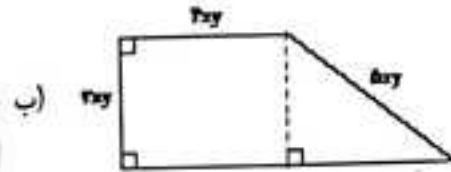
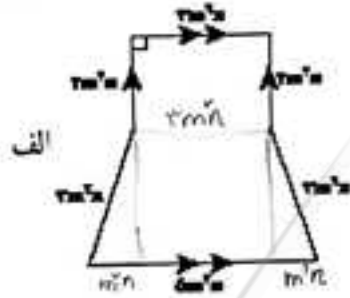
طرف اول = $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$ طرف دوم

طرف اول = $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ طرف دوم

۱- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^2 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^2$ ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$
 ج) $(x^m - 1)(x^m - 1)$ د) $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- طرف دیگر عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(5y - 3x)^2 =$ ب) $(-3a^2 - a)^2 =$
 ج) $(8x - \frac{1}{3})^2 =$ د) $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله ای، درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ ب) $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 2x + 4)$ ب) $2a^2b - 12ab^2 + a^2b^2 = ab(2a - 12b + ab)$
 ج) $a(x+1) + b(x+1) = (x+1)(a+b)$ د) $a^2 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2$
 هـ) $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2$ و) $25x^2 + 20x^2 + 4x^2 = x^2(25 + 20 + 4)$

۶- با تبدیل b به $-b$ در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\frac{(a+(-b))^2}{(a-b)^2} = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ارزش $= 9m^2n^2 - m^2n^2 = 8m^2n^2$
 ارزش $= \sqrt{8} mn$

در صفحه قبل پاسخ داده شده

فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را به دو روش انجام داده ایم؛ آنها را کامل کنید.

روش اول در عمیق ترین بودیم در این امانت ۵۰

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

روش دوم:

$$((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

۲- با استفاده از ضرب عبارات جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید. مربع جمله اول منهای مربع جمله دوم اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد به کمک شکل های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ را

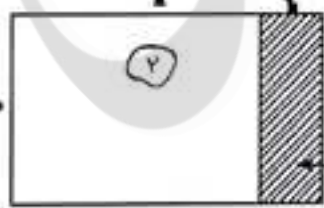
تفاوت ها مشهور معروفه از شکل ۱

۱- رابدها مستقیم و به سمت راست آن

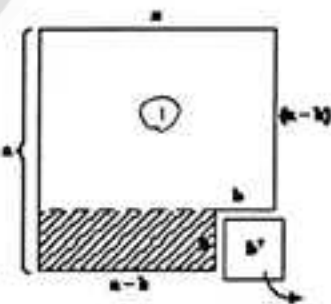
۲- اضافه می کنیم تا شکل ۲ حاصل شود

۳- مساحت شکل ۲ را بدست می آوریم

که مساحت هر دو برابر است.



$$s_2 = (a-b)(a+b)$$



$$s_1 = a^2 - b^2$$

کار در کلاس

۱- تساوی های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

۱) $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$

۲) $(t + \frac{1}{t})(t - \frac{1}{t}) = t^2 - \frac{1}{t^2}$

۲) $(2a+5)(2a-5) = 4a^2 - 25$

۴) $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

$$۱) (1-x)(x+1) = (1-x)(1+x) = 1-x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = (-2z-y)(-2z+y) = 4z^2 - y^2$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) = (t-7y)(t+7y) = t^2 - 49y^2$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) = (-4y-2z)(-4y+2z) = 16y^2 - 4z^2$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] = x^2 - (2y-5)^2 = x^2 - (4y^2 - 20y + 25) =$$

$$x^2 - 4y^2 + 20y - 25$$

فعالیت

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = (\frac{2}{1}y + \frac{1}{2}z)(\frac{2}{1}y - \frac{1}{2}z)$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - \frac{y}{2}][\frac{y}{2} + (2x+1)]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)] \\ = (1-3a-z)(1+3a+z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)] \\ = (-x-3)(5x+5)$$

$$۶) x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \\ = (x+y)(x+y)(x-y)$$

فقط کافیست

کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

$$A = 2m \quad , \quad B = 7 - 3y \Rightarrow (2m - (7 - 3y))(2m + (7 - 3y))$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟
 ۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند.

به کمک اتحادها، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$497 \times 503 = (500 - 3) \times (500 + 3) = 500^2 - 9 = 250000 - 9 = 249991$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$$

فعالیت

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است. از ضرب دو عبارت
 بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

$$\text{الف) } (x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

حاصل ضرب غیر مشترکها 2×5 و حاصل جمع غیر مشترکها $2+5$

$$\text{ب) } (x+9)(x-4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + 5x - 36$$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + \underline{a \cdot b}$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به

حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$\text{الف) } x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

$$\text{ب) } x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$\text{ج) } y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$$

$$\text{د) } y^2 - y - 6 = (y+2)(y-3)$$

$$\text{ه) } y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$$

۲- تجزیه عبارت $x^2 + 10x - 24$ را چهار نفر از دانش آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به

چهار صورت زیر انجام داده اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است: چرا؟

الف) جواب نفر اول نادرست حاصل جمع $10x$ منفی شود.

ب) جواب نفر سوم درست $(x+12)(x-2)$

ج) جواب نفر دوم نادرست حاصل ضرب 24 منفی نشود.

د) حاصل جمع $10x$ منفی نشود جواب نفر چهارم نادرست $(x-12)(x+2)$

تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x) = \frac{1}{16} - x^2$ ب) $(5x+4)(5x+3) = 25x^2 + 35x + 12$ ج) $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) = z^2 - 3$

د) $(3x+y-z)(3x+y+z) = (3x+y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$ ه) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$ و) $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

۲- در قسمت های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

الف) $(xy-z)(xy+z) = x^2y^2 - z^2$ ج) $(x+a)(x-b) = x^2 - bx + ax - ab$

ب) $(\frac{1}{4}y + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{16}y^2 - 5$ د) $(x^2 + \sqrt{5})(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - 5$

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

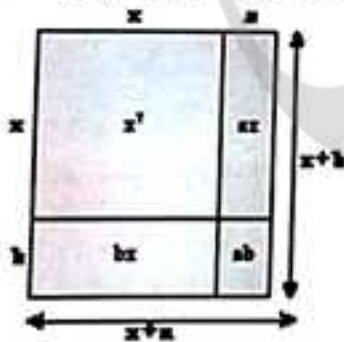
الف) $a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$ ب) $x^2 - 12x + 36 = (x-4)(x-9)$ ج) $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$ د) $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ ه) $ax^2 - a$

ز) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)(x-6) = (x-6)^2$ ح) $(x+y)^2 - 9 = (x+y-3)(x+y+3)$ ط) $bx^2 - 5bx - 50b = b(x^2 - 5x - 50) = b(x-10)(x+5)$ ی) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4) = (x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحادی به دست می آید؟ اگر a و b قرینه باشند،

کدام اتحاد به دست می آید؟ در یادگیر

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبه رو، اتحاد جمله مشترک را به دست آورید.



۸۹

$$S = (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

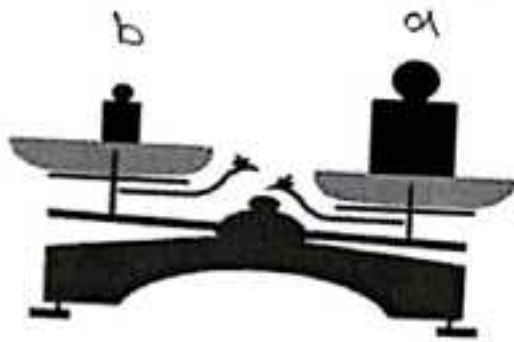
$$= x^2 + x(a+b) + ab$$

$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=b} (n+a)(n+a) = (n+a)^2$

$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=-b} (n+a)(n-a) = n^2 - a^2$

۱۴

فعالیت



روی کفه‌های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه a از وزنه b سنگین‌تر است. - با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای $>$ ، $<$ ، $=$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.

$a \square b$, $a \square b$, $b \square a$



در شکل بالا چنانچه وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد به طوری که $a=b+p$ ، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟ کفه‌ای که وزنه b در آن قرار دارد.

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست به طوری که $a = b + p$.

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x = y + 4 \Rightarrow x > y$

ج) $a - 2 = b + 3 \Rightarrow a > b$

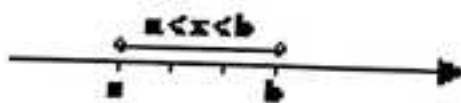
ب) $m + 1 = n + 3 \Rightarrow m > n$

د) $2m = 3n \quad (m, n > 0) \Rightarrow m > n$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت‌های « a بزرگ‌تر از b » یا « a کوچک‌تر از b » یا « a برابر با b » را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ ، در این حالت می‌نویسیم $a \geq 0$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر یا برابر با 0 است؛ مانند $2 \geq 0$ یا $0 \geq 0$ یا $\frac{1}{3} \geq 0$. چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشد به طوری که a از b کمتر نباشد در این صورت $a > b$ یا $a = b$.

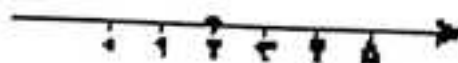
در این حالت می‌نویسیم $a \geq b$.

برای سه عدد حقیقی a و b و x به طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد ($a < b$).



می‌نویسیم $a < x < b$.

مانند: $1 < 2 < 5$

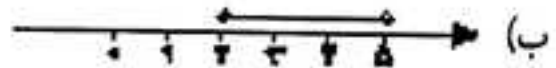


۱- مناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

$$-3 \leq x \leq 5$$



$$2 \leq x < 5$$



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a+b > 0$ آنگاه، a و b هر دو مثبت هستند. \times

ب) اگر $ab > 0$ آنگاه، a و b هم علامت هستند. \checkmark

ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ آنگاه، a و b و c منفی هستند. \times

د) اگر $a'b < 0$ آنگاه، b منفی است. \checkmark

۳- عبارات‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ‌تر است. $3x - 1 > 7$

• ۸ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگ‌تر است. $8 > -(2x + 3)$

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3 - 7 < 1 - 7 \rightarrow -10 < -6$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-100} -3 - 100 < -2 - 100 \rightarrow -103 < -102$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری

همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a > b$ آنگاه $a + c > b + c$.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$

$$-7 > -9 \quad \text{علامت صحیح است}$$

$$\begin{aligned} & \times \quad -7 > -9 \xrightarrow{\times} \\ & -7 \times 0 > -9 \times 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -7 < -9 \xrightarrow{\times(-1)} \quad 7 < 9 \\ & (-7)(-1) < (-9)(-1) \end{aligned}$$

خاصیت ۲: اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر $a > b$ و $c > 0$ آنگاه $ac > bc$.

خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری $a > b$ را در عدد منفی c ($c < 0$) ضرب کنیم، در این صورت داریم $ac < bc$.

۳- نابرابری $2x+1 > 7$ را در نظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌گوییم. در جدول زیر اندازه‌های داده شده را به جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ ↓ $-1 > 7$ نادرست	$2 \times 2 + 1 > 7$ $5 > 7$ نادرست	$2 \times 3 + 1 > 7$ $7 > 7$ نادرست	$2 \times 4 + 1 > 7$ $9 > 7$ درست	$2 \times 7 + 1 > 7$ $15 > 7$ درست

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ جزو مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

$$2x+1-1 > 7-1 \rightarrow 2x > 6$$

- دو طرف نامعادله را با -1 جمع کنید.

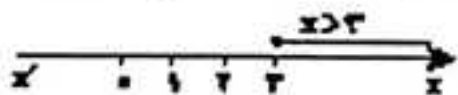
$$-\text{ دو طرف نامعادله حاصل را در } \frac{1}{2} \text{ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر } 2 \text{ تقسیم کنید. } \rightarrow x > 3$$

- با توجه به نابرابری $x > 3$ متوجه می‌شویم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه

جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$$

مقابل نمایش داد.



$$2x+1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} 2x > 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x > 3$$

$\frac{ac}{b} < 0$

الف $\left\{ \begin{array}{l} \text{مثال} \rightarrow a > 0, c < 0 \rightarrow \frac{ac}{b} < 0 \\ \text{مساوي} \rightarrow a < 0, c > 0 \rightarrow \frac{ac}{b} < 0 \end{array} \right.$

$\frac{a}{bc} > 0$

ب $\left\{ \begin{array}{l} \text{مثال} \rightarrow a > 0, b < 0, c < 0 \\ \text{مساوي} \rightarrow a < 0, b < 0, c > 0 \\ \text{مساوي} \rightarrow a < 0, b > 0, c < 0 \\ \text{مثال} \rightarrow a > 0, b > 0, c > 0 \end{array} \right.$

ج. $ab > 0$

ج $\left\{ \begin{array}{l} \text{مثال} \rightarrow a > 0, b > 0 \\ \text{مساوي} \rightarrow a < 0, b < 0 \end{array} \right.$

د $\left\{ \begin{array}{l} \text{مثال} \rightarrow b > 0, c > 0 \\ \text{مساوي} \rightarrow b < 0, c < 0 \end{array} \right.$

الف $2x - 4 + 2 < 0 - x \rightarrow 2x - 1 < -x \rightarrow 2x < -x \rightarrow x < 0$

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

ب $x - 2x \geq 10 - 2x \rightarrow -2x + 10 \geq 10 - 2x \rightarrow 10 \geq 10 \rightarrow x \geq \frac{10}{1}$

$\Rightarrow x \geq \frac{10}{1}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{10}{1}\}$

ج $\frac{3x - 4}{x} > \frac{3}{x} \xrightarrow{x^2} 3 - 4x > 3 \rightarrow 3 - 4x > 3 \rightarrow -4x > 0 \rightarrow x < 0$

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

د $\frac{-1 - 9}{x} < \frac{1 + 9}{x} \xrightarrow{x^2} -10 < 10 \rightarrow -10 < 10 \rightarrow -10 < 10$

$-10 < 10 \rightarrow 10 > -10 \rightarrow 10 > -10$

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -10\}$

$$\frac{1}{3}x + \frac{14}{3} - \frac{x}{4} \leq \frac{12}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{x}{4}$$

$$\frac{5x}{12} + \frac{14}{3} \leq \frac{-2x}{4} + \frac{12}{2} \xrightarrow{-\frac{14}{3} + \frac{2x}{4}} \frac{5x}{12} + \frac{14}{3} - \frac{14}{3} + \frac{2x}{4} \leq \frac{-2x}{4} + \frac{12}{2} - \frac{14}{3} + \frac{2x}{4}$$

$$\frac{9x}{12} \leq \frac{-19}{4} \xrightarrow{\times \frac{12}{9}} \frac{9x}{12} \times \frac{12}{9} \leq \frac{-19}{4} \times \frac{12}{9} \rightarrow x \leq \frac{-38}{9}$$

کار در کلاس

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-38}{9}\}$$

مجموعه جواب نامعادله های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $2x + 7 \geq 15 \xrightarrow{+(-7)}$ $2x + 7 - 7 \geq 15 - 7 \rightarrow 2x \geq 8 \wedge \frac{x}{2} \rightarrow x \geq 4$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ب) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6}$ $2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)}$ $2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$
 $\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3}$ $x < 2$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

$2x - 3 \geq 2x + 1 \xrightarrow{+3-2x}$ $2(x-1) \geq 2x+1$
 $2x - 3 + 3 - 2x \geq 2x + 3 - 2x + 1$
 $x \geq 4$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

د) $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$ دریا

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای < یا > را جایگزین کنید.

الف) $a - b = 1$ در این صورت $a \square b$. ج) اگر $2(p-1) = 2q - 3$ در این صورت $p \square q$ \star روش حل

ب) اگر $u - v = -2$ در این صورت $u \square v$. د) اگر $\frac{a-b}{2} = -3$ در این صورت $a \square b$.

۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری های زیر برقرار باشد:

در صفحه قبلی

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$ ب) $\frac{a}{bc} > 0$ ج) $ab > 0$ د) $\frac{a^2}{bc} > 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3) + 5 < 5 - x$ ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$ در صفحه قبلی

ب) $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$ د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر $a' > b'$ آیا همواره می توان نتیجه گرفت، $a > b$ ؟ نه حیدر

۵- اگر $a, b > 0$ و $a' > b'$ نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید). در صفحه بعد

۶- عبارات های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می شود.
 ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر ۶ واحد است.

$$\frac{a}{2} + 4b \leq 6$$

۷- دو نفر با وزن های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده اند که ۲۵۰۰ کیلوکالری دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازه سه برابر وزن خود کیلوکالری نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

$$3 \times 65 + 3 \times 85 = 450 \quad \text{مقدار مورد نیاز هر روز}$$

$$45 \cdot x \leq 4500$$

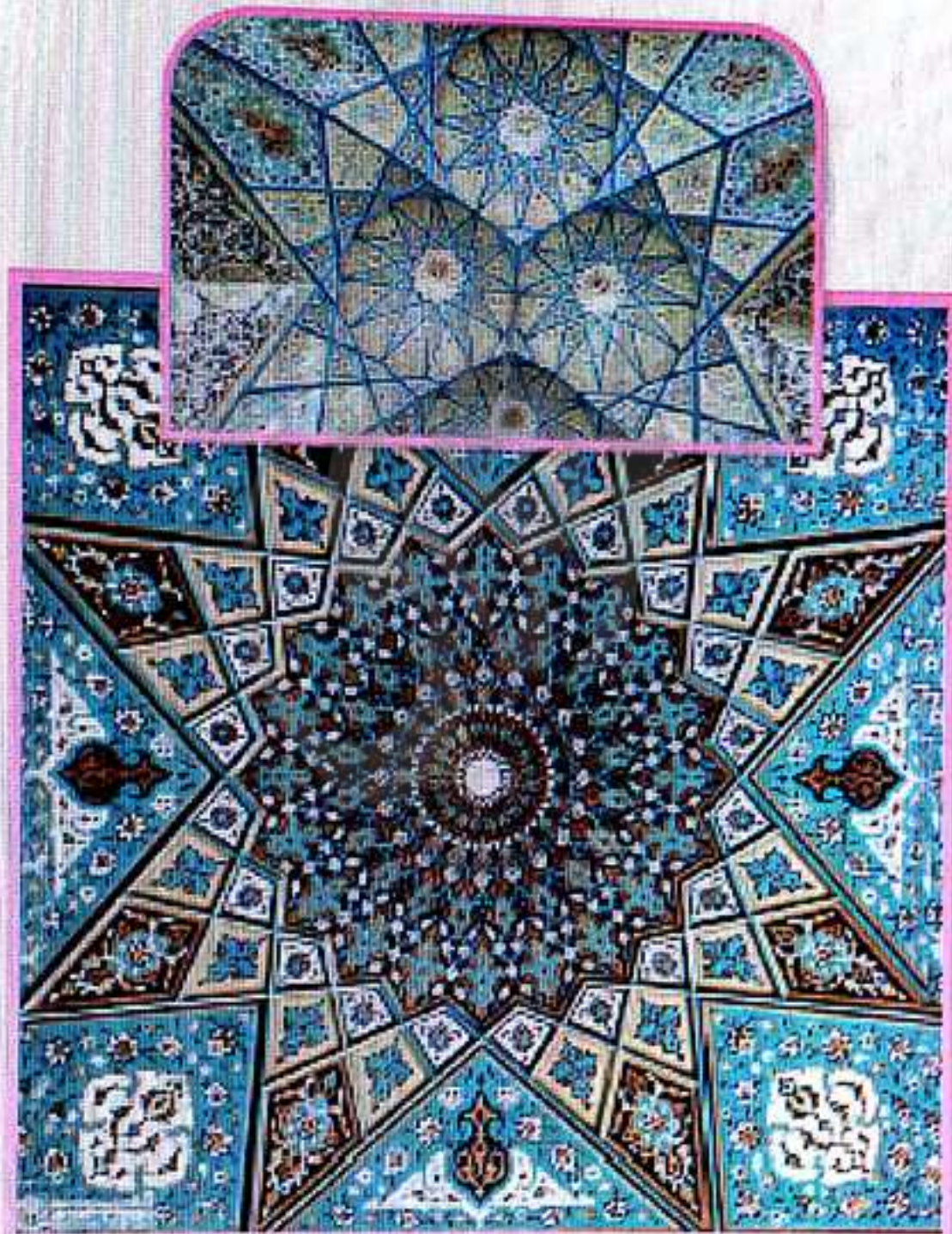
$$x \leq 10$$

۵

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b > 0 \\ a^r > b^r \end{array} \right. \rightarrow a^r - b^r > 0 \rightarrow (a-b)(a+b) > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-b > 0 \rightarrow a > b \\ a+b > 0 \rightarrow a > -b \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-b) > 0, a+b > 0 \\ (a-b) < 0, a+b < 0 \end{array} \right. \rightarrow$ مورد قبول نیست چون $a, b > 0$ هستند

کاربرد هندسه و خطها در فرش بافی، کاشی کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیر قابل انکار، و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان شده است.



بخشی از سقف مسجد و درای حرم مطهر «بیدالشهدا» امام حسین (ع)

درس اول: معادله خط

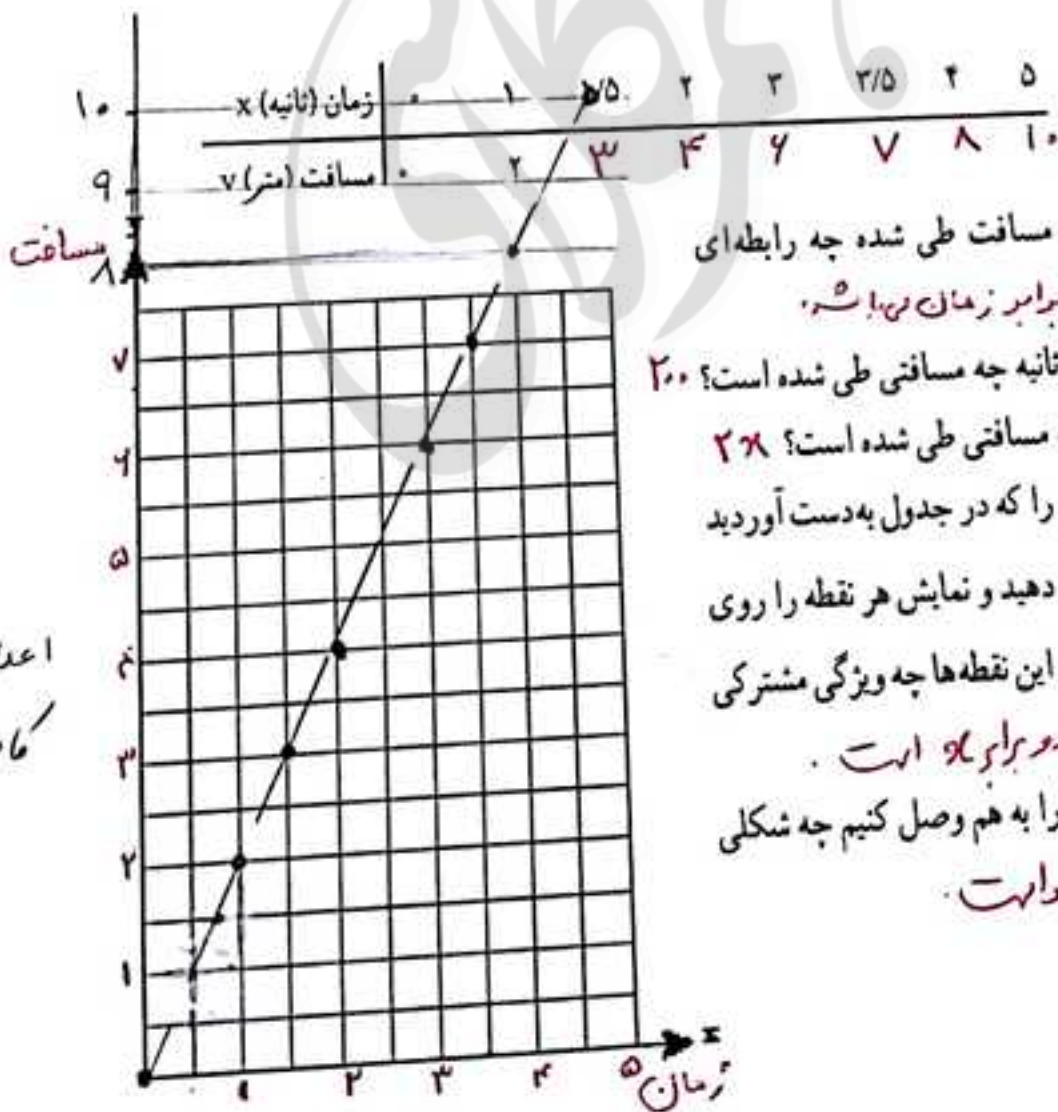


وقتی دوچرخه سواری در حال حرکت است، بین زمان و مسافت طی شده رابطه وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه‌ای دیده می‌شود. در الگوی عددی زیر نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه‌ای هست که به صورت $n \rightarrow 2n$ نمایش داده شده است:

1	2	3	4	...	n
↓	↓	↓	↓		↓
2	4	6	8	...	2n

فعالیت

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می‌کند. جدول زیر را کامل کنید.



بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه‌ای هست؟ مسافت در برابر زمان برابر است.

پس از 100 ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ 200

اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟ 2x

زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید

به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی نمودار مشخص کنید؛ این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟

در تمام نقاط دو برابر است.

اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم چه شکلی به دست می‌آید؟ خط راست.

خط راست.

اعداد محورها
کافی نیست

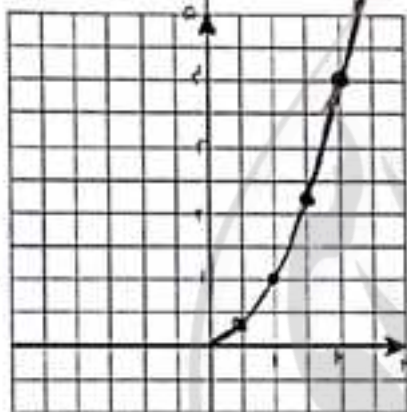
کاردر کلاس

برای

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ **چیز را بر x است.**

ضلع (x)	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	x	$y = 4x$
محیط (y)	۴	۸	۱۲	۱۶	۴۰۰	$4x$	

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای **مساحت را معجزه x است** هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع x (سانتی‌متر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۰/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$[0]$	$[1/5]$ $[1/25]$	$[1]$ $[1]$	$[1/5]$ $[1/25]$	$[2]$ $[4]$	$[2/5]$ $[4/25]$	$[3]$ $[9]$

*
مورد های مشخصات
متناسب با اعداد
جدول نموده

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ **خیر**

فعالیت

۱- معادله $y = -x + 10$ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. **در هر نقطه برابر با x به اضافه ۱۰**

$$5 \neq -2 + 10$$

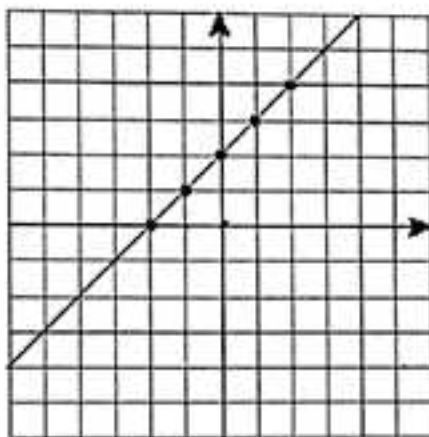
آیا تساوی برای $x=2$ و $y=5$ برقرار است؟ **خیر**

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

چون **بازای** بعضی از مقادیر x تساوی برقرار است.

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل

کنید.



x (طول نقطه)	0	1	-1	2	-2
y (عرض نقطه)	3	2	4	1	5
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

عرض با طول برابر ۲ برابر است.

$$y = x + 2$$

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید.

۲- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$2x - 4y = 7$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله

سمت چپ. سه راست.

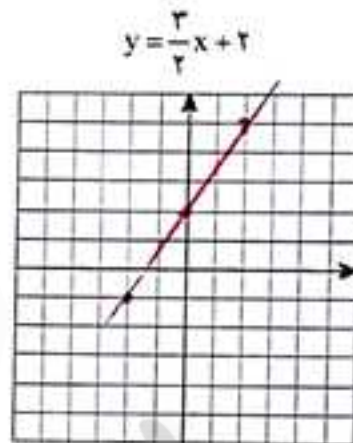
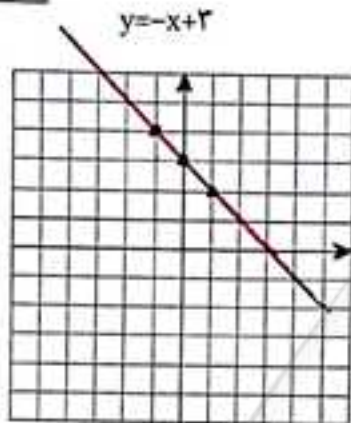
هر معادله به صورت کلی $y = ax + b$ معادله یک خط است؛ زیرا در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می‌آید؛ به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا بیشمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.

به عنوان مثال $x + 2$ معادله یک خط است که در آن $a = 1$ و $b = 2$ فرض شده است و نمودار آن را در بالا ملاحظه کردید.

کار هر کلاس

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

x	۰	۱	-۱
y	۳	۲	۴
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$



x	۰	۲	-۲
y	۲	۵	-۱
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

۲- آیا خط $y = 2x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟ بله چون برای $x = 0$ $y = 0$ می‌شود.

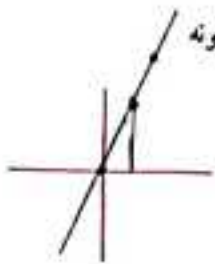
۳- اگر در معادله $y = ax$ به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، به‌شمار معادله خطی مانند $y = 2x$ ، $y = -x$ ، $y = 2x$ و ... به‌دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بله.

$y = ax$ صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه

با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.



$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $y = 2x$



الف) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $y = -x$

ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $y = \frac{1}{3}x$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به‌دست آورید.

۹۹ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟

کار در کلاس

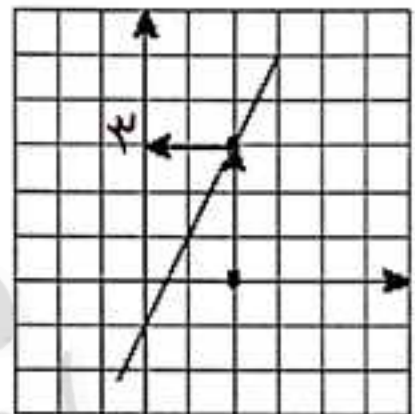
۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط $y=2x-1$ پیدا کنید.

با استفاده از معادله خط

$$y = 2x - 1$$

$$y = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

با استفاده از نمودار خط



$$-3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ پیدا کنید.

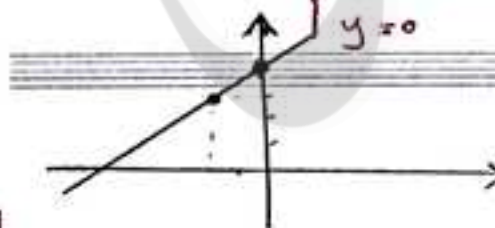
$$-\frac{1}{2}x = -3 - 2 = -5 \rightarrow$$

$$x = 10$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \times 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

۳- مختصات محل برخورد خط $y=5x+1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$\begin{cases} 0 = 5x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \\ y = 0 \end{cases}$$



تمرین

x	0	-2
y	4	2

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۱- خط به معادله $y = \frac{1}{2}x + 4$ را رسم کنید.

$$-1 \neq \frac{1}{2} \times 2 + 4 = 5$$

الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است. خیر

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

$$y = \frac{1}{2}x(-1) + 4$$

$$y = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

۲- طول یک فنر ۱۰ سانتیمتر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه $y = 0.8x + 10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟
 ۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟
 با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معنا است. *یعنی زمان تولد را از محور x قرار دهید. بعد از مدتی قد انسان دیگر ثابت می‌ماند و افزایش ندارد.*



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است: معادله خط را حدس بزنید. *تست با درج **
 $y = 2x - 1$
 الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $y = 3x + 1$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.
 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله $y = -\frac{2}{5}x + 4$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.
 $y = -\frac{2}{5}x + 4 = 5$

۷- خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ را رسم کنید.

آیا نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط پیدا کنید.

نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.

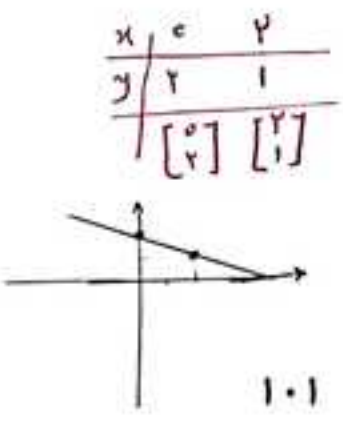
محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$3 = -\frac{1}{2}x(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x(-1) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$-2 = -\frac{1}{2}x + 2 \rightarrow \frac{1}{2}x = 2 + 2 = 4 \rightarrow x = 8$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

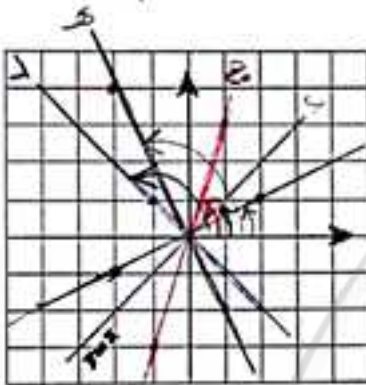


درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

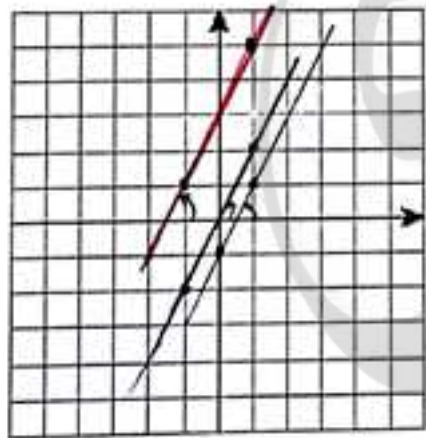
فعالیت

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف) $y = \frac{1}{4}x$ ب) $y = x$ ج) $y = 2x$ د) $y = -x$ ه) $y = -2x$



در ضریب x یا زاویه α با محور x ها در رسم می‌کنند در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور x طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟ ضریب x مثبت است. خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور x می‌سازد؟ زاویه α باز



۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$

در معادله این خط‌ها ضریب x برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور x ها با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی هستند؟ چون شیب‌ها برابر هستند بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ در همان عدد ثابت محور عرض‌ها را قطع کرده

فاصله خطوط زیاد شود

در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویه خط با محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

به عنوان مثال در خط به معادله $y = -2x + 2$ ، عرض از مبدأ ۲ و شیب خط، -۲ است.

۱- در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض را از مبدأ خط مشخص کنید
 عرض از مبدأ: $y = 2x - 2$ (شیب 2)
 عرض از مبدأ: $y = -\frac{2}{3}x$ (شیب $-\frac{2}{3}$)
 عرض از مبدأ: $y = -2x + 1$ (شیب -2)

۲- معادله خطی بنویسید که:

الف) شیب آن -2 و عرض از مبدأ آن -1 باشد.
 $y = -2x - 1$

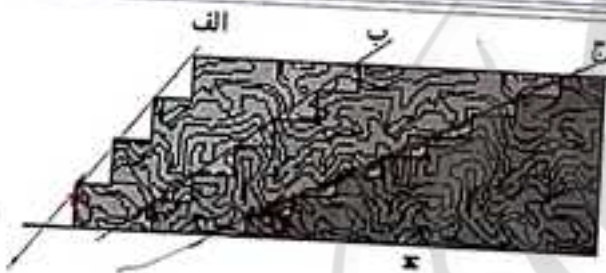
ب) شیب آن $\frac{1}{4}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 2 قطع کند.
 $y = \frac{1}{4}x + 2$

ج) با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد و از نقطه $(0, 4)$ بگذرد.
 $y = 2x + 4$

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن 2 باشد و از نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ بگذرد.

$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 1 = 2 \times \frac{1}{2} + b \rightarrow b = 0$ معادله خط $y = 2x$

فعالیت



۱- در این تصویر، سه نوع راه پله می‌بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است.

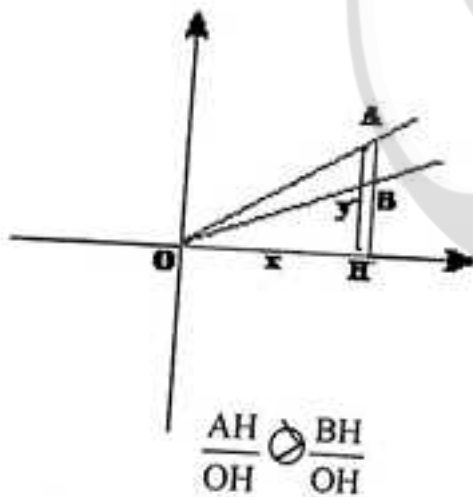
کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ الف کدام یک، تعداد پله بیشتری دارد؟ ج بالا رفتن از کدام یک راحت‌تر است؟ ح

۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ OA

نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است.

کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟



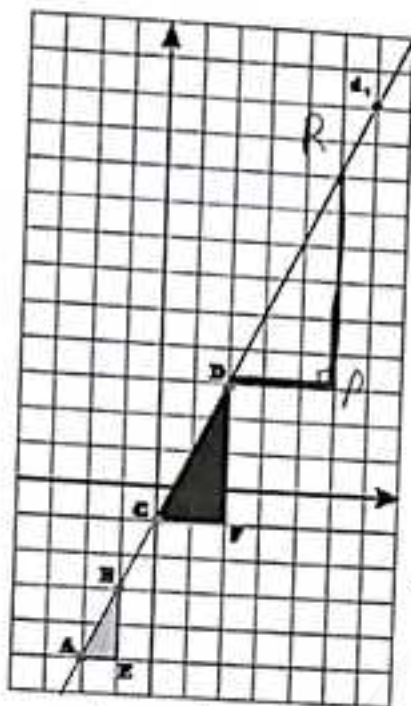
$\frac{AH}{OH} > \frac{BH}{OH}$

۱۰۳

چون نقطه A بالا تر از نقطه B است.

AH بیشتر است مقدار شیب آن خط هم بیشتر است.

BH کمتر است مقدار شیب آن هم کمتر است.



۳- روی خط d_1 به معادله $y = 2x - 1$ دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثل قائم الزاویه ایجاد شده، شیب خط را به دست آورده ایم.

$$d_1 \text{ شیب خط} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثل رسم شده، شیب خط را پیدا کنید. $\frac{FD}{CF} = \frac{2}{1} = 2$

دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثل قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$$\frac{PR}{DP} = \frac{2}{1} = 2$$

۴- خط d_2 با محور طول، زاویه بزرگ تراز 90° می سازد؛ پس شیب خط، منفی می شود. با توجه به مثل های رسم شده مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

$$d_2 \text{ شیب خط} = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$-\frac{FD}{FC} = -\frac{3}{1} = -3$$

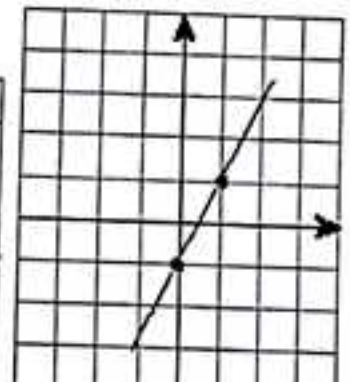
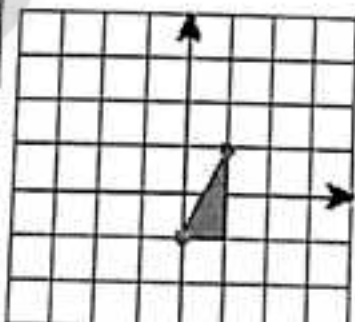
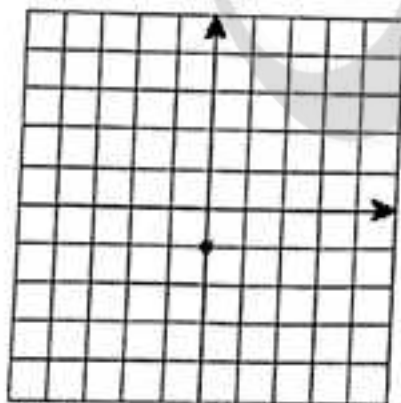
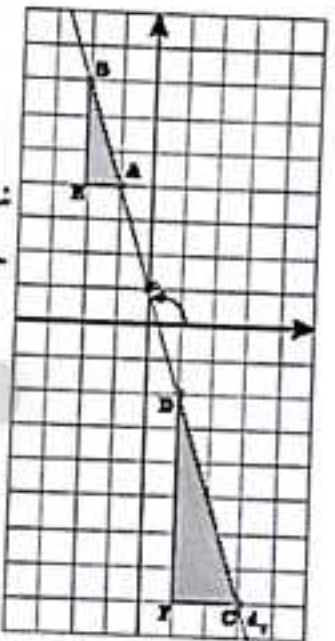
خط d_2 محور عرض ها را در نقطه $[1, 0]$ قطع کرده است یا عرض

$$y = -3x + 1$$

از مبدأ آن ۱ است. معادله خط d_2 را بنویسید.

۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط

$y = 2x - 1$ با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید. لطفاً رسم می باشد.



(۱) خط از این نقطه می گذرد. (۲) با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود. (۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می شود.

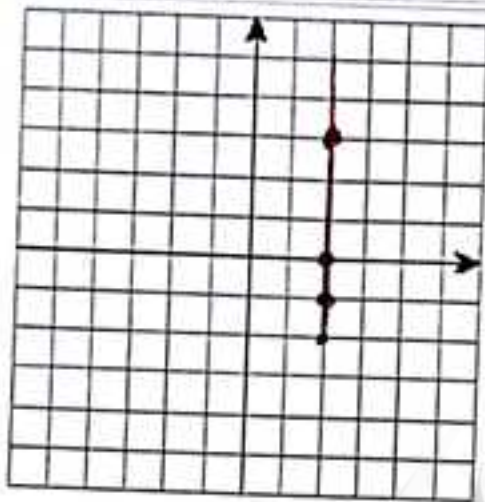
۱۰۴

۱) عرض از مبدأ مشخص می کند

۲) شیب خط مشخص می شود و نقطه برست می آید.

۳- دو نقطه برست آمده را بهم وصل و امتداد می دهیم تا خط برست آید.

فعالیت



۱- نقطه های $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آنها را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با: $\frac{2}{x}$ خواهد بود.

یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
تمام نقطه ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می گیرد و معادله آن به صورت $x=2$ است.

۲- صورت کلی معادله های خطی به صورت $ax+by=c$ است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می گذرد؟ خط دوم همچون عرض

از مبدأ آن صفر است. $a=2, b=3, c=4 \rightarrow 2x + 3y = 4$

$a=-1, b=2, c=0 \rightarrow -x + 2y = 0$

ب) با توجه به خط های داده شده، مقدارهای a, b و c را پیدا کنید.

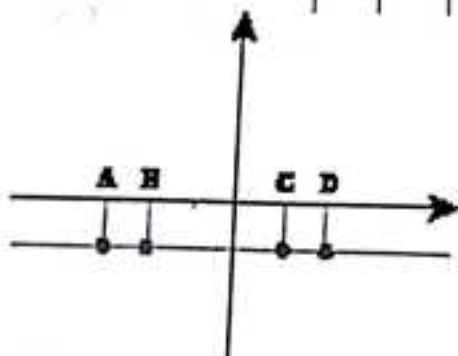
$-2x + 2y = 2 \rightarrow a=-2, b=2, c=2$

$y - 2x = 1$ یا $2x - y = -1 \leftarrow y = 2x + 1 \rightarrow a=2, b=-1, c=1$ یا $a=-2, b=1, c=+1$

ج) برای خط $x=2$ مقدارهای a, b, c را بنویسید.

$ax + by = c \rightarrow x = 2$
| | |
 $a=1, b=0, c=2$

۳- مختصات نقطه های مشخص شده را روی خط



$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

این نقطه ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ در این عرض نوبت هستند
معادله خط رسم شده را بنویسید. $y = -1$

در فرم کلی معادله های خطی به جای a, b, c چه عدد هایی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده به دست آید؟

$$ax + by = c$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 صغیر 1 -1

۴- مانند نمونه برای خط های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.



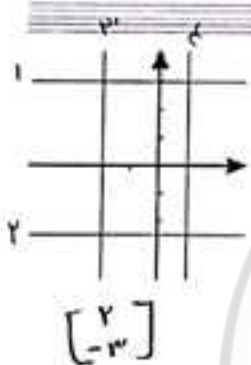
عرض از مبدأ شیب

$$2y - 2x = 8 \rightarrow 2y = 2x + 8 \rightarrow y = \frac{2}{2}x + \frac{8}{2} \rightarrow y = x + 4$$

$$2x - 2y = 6 \rightarrow -2y = -2x + 6 \rightarrow y = \frac{-2}{-2}x + \frac{6}{-2} \rightarrow y = x - 3$$

$$x + 2y - 9 = 0 \rightarrow 2y = -x + 9 \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4.5$$

کار در کلاس



۱- معادله های خط های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هر کدام بنویسید.

$1 \rightarrow y = 3$
 $2 \rightarrow y = -3$
 $3 \rightarrow x = 1$

۲- از برخورد دو خط $x=1$ و $y=-3$ کدام نقطه به دست می آید؟

۳- معادله خطی بنویسید که موازی محور x ها باشد و از نقطه $(1, 2)$ بگذرد.

$$y = 2$$

تمرین

۱- خط های به معادله $x=-2$ و $y=2$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه

بین این دو خط چند درجه است؟ 90° درجه

۲- معادله محور طول ها و محور عرض ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه ای است؟

۳- شیب و عرض از مبدأ خط های زیر را پیدا و سپس آن خط ها را رسم کنید.

$$y = 0 \rightarrow \text{محور طول}$$

$$x = 0 \rightarrow \text{محور عرض}$$

$$2y - 2x = 6 \rightarrow y = \frac{2}{-2}x + \frac{6}{-2} \rightarrow y = -x - 3$$

$$2x - 2y = 8$$

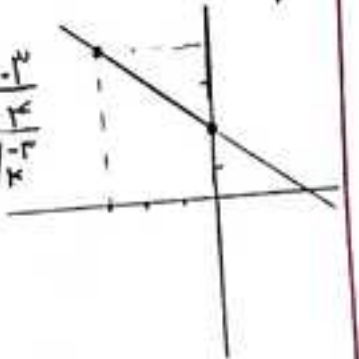
$$-2y = -2x + 8 \rightarrow y = \frac{-2}{-2}x + \frac{8}{-2} \rightarrow y = x - 4$$

$$2x - y = 3$$

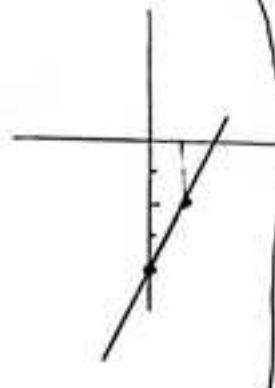
$$1.6 \rightarrow -y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 3$$

x	0	-2
y	3	1
	1.6	1.6



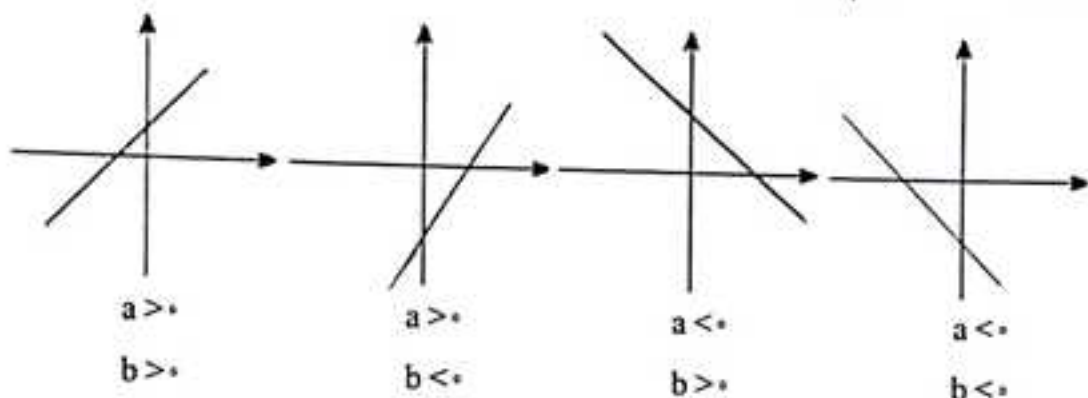
x	0	1
y	-4	-2
	1.6	1.6



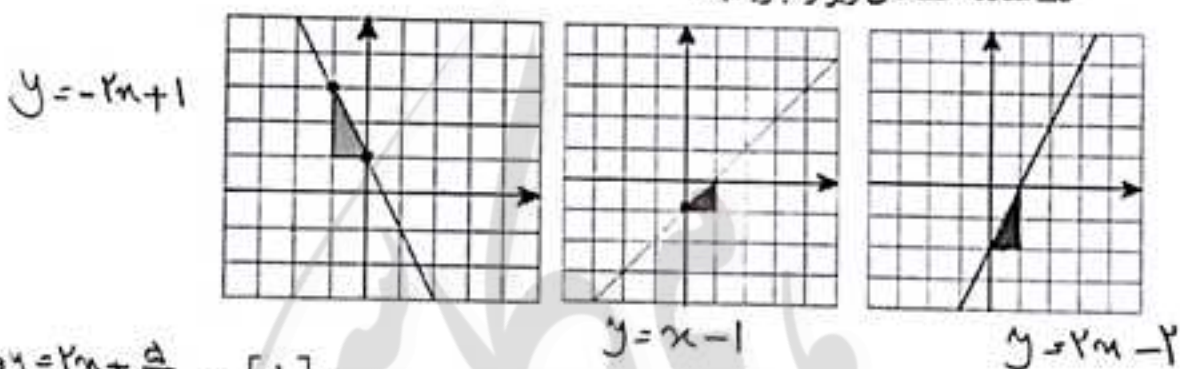
x	0	1
y	-3	-1
	1.6	1.6



سوال ۲- خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط‌های زیر را بنویسید.



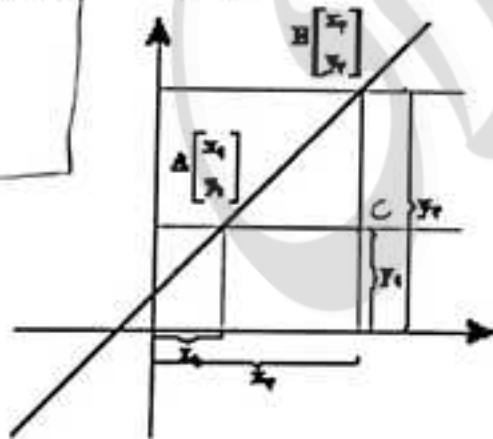
$$2y = 4x + 6 \rightarrow y = 2x + \frac{3}{1}$$

$$y = 2x + b \xrightarrow{|-1} -1 = 2x + b$$

$$b = -1 - 2 = -3$$

$$y = 2x - 3$$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.
 ۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\text{شیب} = \frac{2 - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

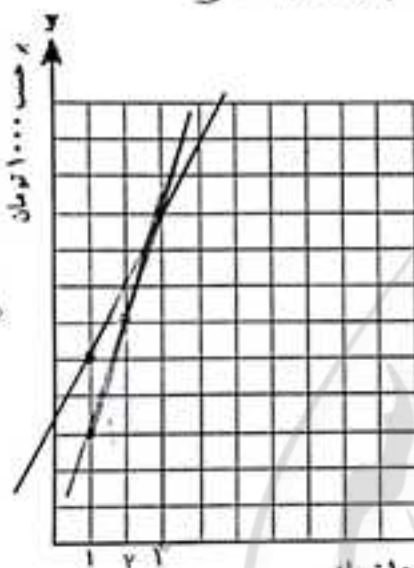
$$1.7 \quad y = -3x + b$$

$$\xrightarrow{|2} 2 = -3 \times 3 + b \rightarrow 2 + 9 = b \rightarrow b = 11$$

فعالیت

۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه کلی x ساعت استفاده از اینترنت را با y نشان دهید و رابطه ای بین y و x بنویسید.

$$y = 2000x + 3000$$



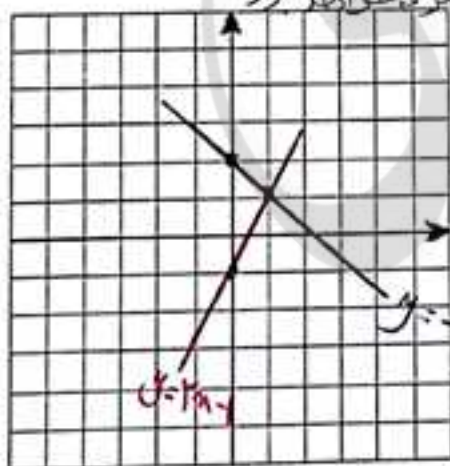
یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه ای بین هزینه اشتراک (y) و x ساعت استفاده از اینترنت را در این حالت بنویسید.

$$y = 3000x$$

دو خط به معادله های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چقدر و بزرگی ای دارد؟ برای $1/5$ ساعت استفاده، کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟

برای استفاده ۳ ساعت اینترنت هزینه کل ۱۰۰۰ تومان نوع اول است و ۹ پس از ۳ ساعت ۳ بعد از آن به صرفه خواهد بود

۲- معادله $y = 2x - 1$ چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید. بسیار معادله $y = -x + 2$ چند جواب دارد؟ بسیار نمودار آن را رسم کنید. توضیح دهید چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می کنید.



محل برخورد دو خط جواب

مشترک برای دو معادله است

* واحد (۱) محور y است
یعنی ۱۰۰۰ تومان

کار در کلاس

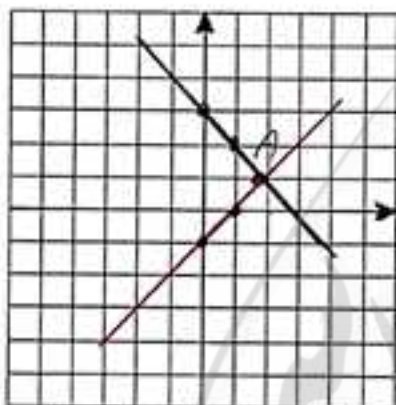
با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

$$\begin{array}{l|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

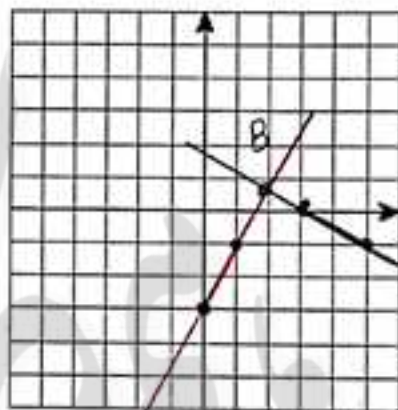
$$\begin{cases} x-y=1 \rightarrow y=x-1 \\ x+y=2 \rightarrow y=-x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=3 \rightarrow y=2x-3 \\ x+2y=2 \rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & 3 & 2 \end{array}$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

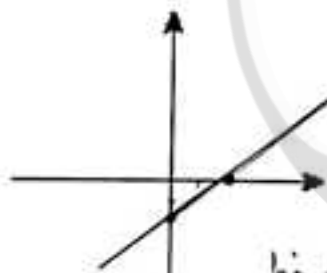


$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & -3 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x & 5 & 3 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x & 0 & 2 \\ \hline y & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}$$



۱- خط $2x-3y=4$ را رسم کنید. خط به معادله $4x-6y=8$ که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است را رسم کنید. الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ خیر

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله ظاهراً در یک عدد ضرب کنیم دو خط برهم منطبق خواهند بود و خط

ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بی‌شمار جواب خواهد داشت؟ نه آری.

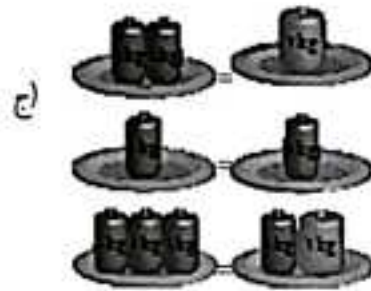
دارد؟ چرا؟ بله. چون دو خط برهم منطبق شده و بی‌شمار جواب دارد. لطف منکر خواهند داشت.

فعالیت

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید :

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 2 + 5 &= 5 \\ 7 &= 7 \end{aligned} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{aligned} x &= x \\ 2x &= 2x \\ 3x &= 3x \end{aligned} \quad \text{ب)}$$



از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، باز یک تساوی خواهیم داشت.

۳- با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های

زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

با جمع کردن یکی از مجهولات حذف می‌شوند

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \text{ و } x + y = 3$$

$$2 + y = 3 \rightarrow y = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \text{ و } x + 2y = 4$$

$$2 + 2y = 4$$

$$2y = 2 \rightarrow y = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ جواب دستگاه}$$

با ضرب عدد در طرفین تساوی یکی از ضرایب متضاد می‌شود و با جمع طرفین یکی از مجهولات حذف می‌شود و مانند قسمت الف حل می‌شود.

یکی از راه‌های حل کردن دستگاه معادله‌های خطی، حذف کردن x یا y است تا به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ نام این روش، حذفی است.

کاردرکلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

در معادله اول طرف دوم مشخص نیست

$$\begin{cases} x - y = \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 10y = -2 \\ 2x + 9y = 21 \end{cases}$$

$$19y = 19$$

$$y = \frac{19}{19} = 1$$

$$2x - 5 \times 1 = 1$$

$$2x = 1 + 5 = 6$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 2y = -15 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases}$$

$$-x = -15 \rightarrow x = 15$$

$$3 \times 15 + 2y = 50$$

$$2y = 50 - 45 = 5$$

$$y = \frac{5}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 15 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ ج)}$$

۱- دستگاه معادله های خطی زیر را به روش دیگری نیز می توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{1} \Big| \frac{3}{3}$$

راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ بنابراین مقدار y را از معادله

پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید؛ نام این روش، جایگزینی است.

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \rightarrow 2x - x + 2 = 5 \rightarrow x = 5 - 2 = 3$$

نقشه با کلاس

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتیمتر کمتر است. اگر محیط مستطیل

۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده

است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۱:

طول مستطیل و x : عرض مستطیل $2x - 3$

روش جایگزینی حل مسئله

$$محیط = 2(x + 2x - 3) = 24$$

$$3x - 3 = 12 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5 \text{ و } طول = 2 \times 5 - 3 = 7$$

روش ۲:

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

با نوشتن دو معادله خطی و حل دستگاه های

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$$

معادله های خطی به روش حذفی محاسبه

$$\begin{array}{r} -y - 2y = 3 - 24 \\ -3y = -21 \rightarrow y = 7 \end{array}$$

$$y = 2x - 3 \rightarrow 7 = 2x - 3 \rightarrow 2x = 7 + 3 \rightarrow x = 5$$

روش ۳: x : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$y = 2x - 3$$

طول را بر حسب عرض نوشته و سپس

$$2(x + y) = 24 \rightarrow 2(x + 2x - 3) = 24$$

جایگزینی کرده و به روش جایگزینی حل کرده است.

بین روش های اول و سوم چه شباهتی هست؟

هر دو از روش جایگزینی استفاده کرده

پاسخ ص ۱۱۲

سوال ۵

دو مستقیم موازی در ۶۰٪

$$-۲x \begin{cases} x+y=۲۰ \\ ۴x+۲y=۵۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۲x-۲y=-۴۰ \\ ۴x+۲y=۵۶ \\ \hline ۲x=۱۶ \\ x=۸ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y &= ۲۰ \\ y &= ۲۰-۸=۱۲ \end{aligned}$$

$$-۲x \begin{cases} ۲x-۳y=۷ \\ ۴x-۴y=۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۴x+۶y=۱۴ \\ ۴x-۴y=۵ \\ \hline ۲y=۹ \\ y=۴.۵ \end{cases}$$

سوال ۶ معادله جواب ندارد.

$$۲x-۳y=۷$$

x	-1	۲
y	-۳	-1
	-۳	۲
		-1

$$۴x-۴y=۵$$

x	۰	۵/۴
y	-۵/۴	۰
	-۵/۴	۰
		۵/۴



دو خط باهم موازیند و محل برخورد ندارند

$$۲x-۳y=۷ \rightarrow -۳y=-۲x+۷ \rightarrow y = \frac{-۲}{-۳}x + \frac{۷}{-۳} \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۷}{۳}$$

$$۴x-۴y=۵ \rightarrow -۴y=-۴x+۵ \rightarrow y = \frac{-۴}{-۴}x + \frac{۵}{-۴} \Rightarrow y = \frac{۴}{۴}x - \frac{۵}{۴}$$

$$y = \frac{۴}{۴}x - \frac{۵}{۴}$$

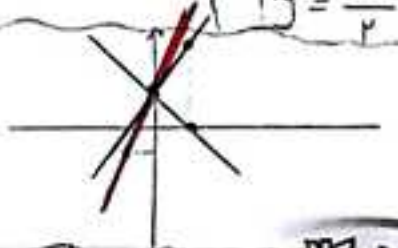
تیب خطها برابرند پس خطوط موازیند و همگامند و موازی هستند

در نتیجه معادله جواب ندارد

دومی $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ $x + y = 4$
 $y = 4 - x$
 $x = 2$

سوال ۱) $\begin{cases} 3x - 7y - 2 = 0 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{2} \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow \frac{9}{2} + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - \frac{9}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases}$

$y = 1x + 1$ $\begin{array}{c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$
 $y = 2x + 1$ $\begin{array}{c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 1 & -1 \end{array}$
 $y = -x + 1$ $\begin{array}{c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 1 & -1 \end{array}$



سوال ۴
 هر سه خط یک جواب مشترک دارند

کار در کلاس

$2x - 7y = 15 \rightarrow 2(2y + 7) - 7y = 15 \rightarrow 4y + 14 - 7y = 15 \rightarrow -3y = 15 - 14 - 1 \rightarrow -3y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{3}$
 $\begin{cases} x - 2y = 7 \rightarrow x = 2y + 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 7 \\ x = 2(2y + 7) + 7 \end{cases}$
 $x = 7$

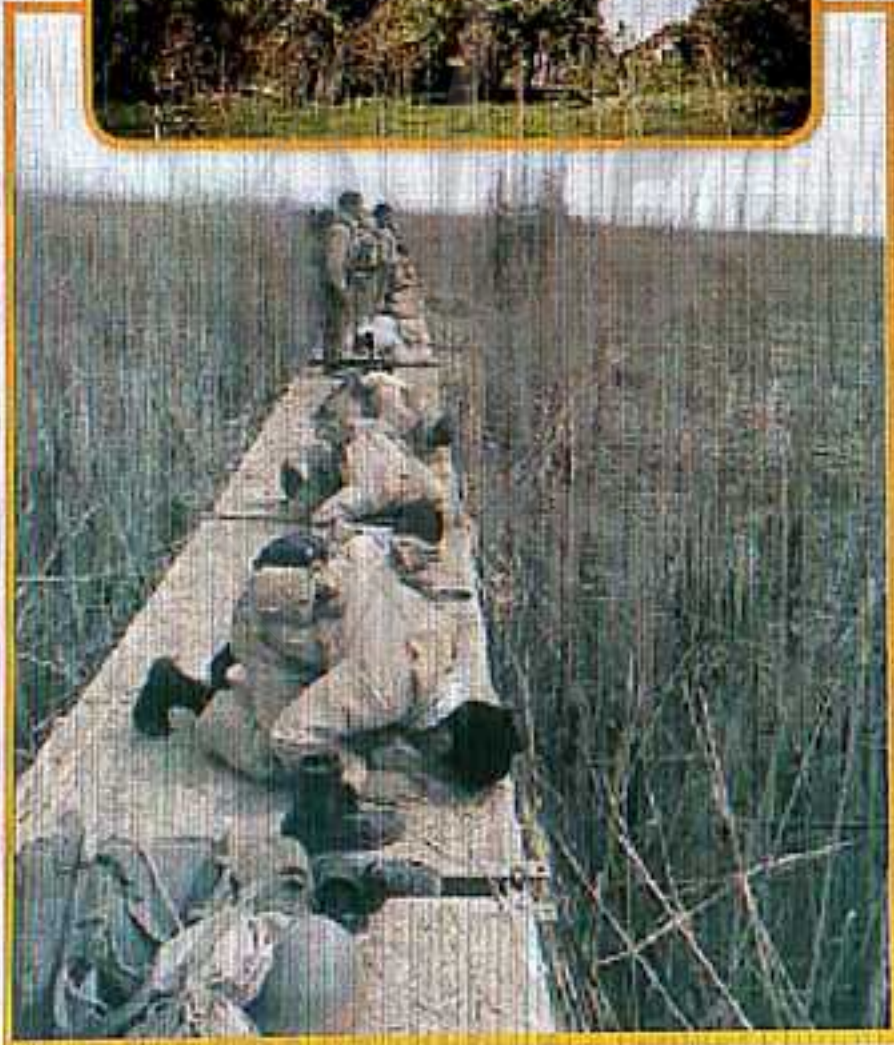
$2x - y = 6 \rightarrow y = 2x - 6$
 $2x + \frac{1}{3}y = 8 \rightarrow 2x + \frac{1}{3}(2x - 6) = 8 \rightarrow 2x + \frac{2x}{3} - 2 = 8 \rightarrow \frac{8x}{3} = 10 \rightarrow x = \frac{15}{4}$
 $2x = 10 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$
 $5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5}$
 $x = \frac{1}{5}$

۱- دستگاه های زیر را حل کنید.
 $\begin{cases} x - 1 & y - 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{cases} \rightarrow 2x - 3 - 2y + 2 = 1 \rightarrow 2x - 2y = 2$
 $x + y = 4$
 $\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y = -6 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

دو عدد توان از بار یا بارهای مختلف در صورتی با هم برابر می شوند که توان آن برابر صغری باشد. پس $x + y - 1 = 0$ و $2x - 7y - 2 = 0$ عنوان نمود
 ۲- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x - y = 1$ و $x + y = 1$ بگذرد و شیب آن $\frac{2}{3}$ باشد. $b = \frac{2}{3}$
 ۳- در معادله $y = ax + 1$ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهید، معادله خط های زیادی به دست می آید. به ازای $a = 1$ و $a = 2$ و $a = -1$ این خط ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارد؟
 ۴- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. باهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه $\frac{1}{3}$ می گذرانند.
 ۵- چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)
 ۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.
 $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$

آیا این دستگاه جواب دارد؟
 شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی آید.
 ۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.
 $\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ 2x = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 22 \end{cases}$
 سن علی ۲۲
 سن پدر ۴۸



پل همان نقش اساسی در زندگی انسانان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول همایی به دست می آید که باینک عبارت گویا بیان می شوند. مثلاً در مورد پل همایی تا بر پیاده بار محاسباتی از دستور $\frac{150}{L} = 2$ به دست می آید که در آن L طول بارگذاری شده بر حسب متر است.

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتیمتر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{2}{3}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+4$ است و نسبت عرض به طول را می‌توان با $\frac{x}{x+4}$ نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{عرض} \quad \text{طول} = 12$$

عبارت $\frac{x}{x+4}$ را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ به‌طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت v_2 بازگشته است از رابطه $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد a و b	$\frac{v^2}{2k} = 222$	محاسبه جرم یک جسم با سرعت v و انرژی جنبشی k
---------------------------	--------------------------------	------------------------	---

با توجه به تعریف بالا عبارات‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^2-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad x^2+2x-7$$

اما عبارات‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

چون چندجمله‌ای نیستند

کدام یک از عبارات های زیر گویا است؟

$$\frac{\sqrt{y}}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3+x}}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y+1}}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید:

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{-2+5}{-2-3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$	$\frac{7+5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$	$\frac{\frac{1}{2}+5}{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{11}{5}$	$\frac{0+5}{0-3} = -\frac{5}{3}$	$\frac{-1+5}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$	$\frac{-5+5}{-5-3} = \frac{0}{-8} = 0$

فضا کافیست

به ازای $x=3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید $\frac{0}{8}$ به عنوان عدد تعریف نمی شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل: چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی:

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا:

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مفادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2}$ ب) $\frac{y+x}{x}$ ج) $\frac{2b+1}{2b-1}$ $2b-1=0 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$ ه) $\frac{x}{x^2-1}$ و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$ $a^2-5a+6=0$
 $(a-2)(a-3)=0$
 $a=2$ یا $a=3$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{9}{12}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{18}{24}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و } C \text{ چند جمله‌ای هستند})$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^2}{6 \cdot y^2} = \frac{3}{1 \cdot y^2}$

ب) $\frac{4x^2y^3}{10y^2x^2y^3} = \frac{2}{5}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

۱۱۶

از تجزیه صورت و مخرج استفاده شده

دو عبارت مشترک بهم ساده شده اند

از ب.م.م. صورت و مخرج استفاده شده

نویسید
دانشنامه

$$ج) \frac{y^2 - 9}{3y + 9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$$

$$د) \frac{ab^2}{2a^2b^2} = \frac{2b^2 \cancel{a}^2}{2a^2 \cancel{b}^2} = \frac{1}{a} \quad ه) \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

فضا کلاس

کار در کلاس

۱- عبارات های گویای زیر را ساده کنید:

$$\frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)} = -(m+4) \quad الف) \frac{m^2 - 16}{4-m}$$

$$ب) \frac{6m+18}{7m+21} = \frac{6(m+3)}{7(m+3)} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{(a+2)(a-7)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1} \quad ج) \frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$$

$$د) \frac{x^2 - y^2}{y-x} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{-(x-y)(x^2 + y^2)} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2 + y^2)}{-(x-y)(x^2 + y^2)}$$

۲- عبارات $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده: کدام درست و کدام نادرست است؟

$$\text{الف) نادرست} \quad \frac{a+ax}{x} = a+x$$

$$\text{ب) درست} \quad \frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$$

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مفادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

$$2ab^2 = 0 \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \quad الف) \frac{5x}{3ab^2}$$

$$ب) \frac{2y}{y(2y-6)} \quad \begin{cases} y=0 \\ 2y-6=0 \\ y=3 \end{cases}$$

$$ج) \frac{2p}{p^2 - p - 12} \quad \begin{cases} p^2 - p - 12 = 0 \\ (p-4)(p+3) = 0 \\ p=4 \quad \vee \quad p=-3 \end{cases}$$

$$د) \frac{2x+5}{x} \quad x=0$$

$$ه) \frac{x^2-1}{x+5} \quad \begin{cases} x+5=0 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$و) \frac{a+3}{2a+1} \quad 2a+1=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید:

$$\frac{-(m-3)}{(m-2)(m-2)} = \frac{-1}{m-2} \quad الف) \frac{3-x}{x^2 - 5x + 6}$$

$$ب) \frac{4x^2 + 8x}{12x + 24}$$

$$ج) \frac{24x^2}{12x^2 - 6x}$$

$$د) \frac{y^2 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y}$$

$$ه) \frac{1-t^2}{t^2 + 1}$$

$$و) \frac{16x^2 - 9y^2}{8x - 6y}$$

$$ب) \frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{x}{3}$$

$$ج) \frac{24x^2}{4x(2x-1)} = \frac{6x}{2x-1}$$

$$د) \frac{y(y^2 - 2y - 3)}{y(y+1)} = \frac{y^2 - 2y - 3}{y+1} = \frac{(y+1)(y-3)}{y+1} = y-3$$

$$ه) \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)} = 1-t^2$$

$$و) \frac{(4x-3y)(4x+3y)}{2(4x-3y)} = \frac{4x+3y}{2}$$

$$ز) \frac{6a^2b^2}{2ab^4} = \frac{3a}{b^2} \quad ح) \frac{-2a-1}{a^2+2a-1} = \frac{-2(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{-2}{a-1}$$

۳- عبارتهایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{2y+3}{2y-3} \quad \checkmark \text{ ب) } \frac{2y-3}{3-2y} = \frac{-(3-2y)}{3-2y} = -1$$

$$\checkmark \text{ ج) } \frac{2y+3}{3+2y} = \frac{3+2y}{3+2y} = 1 \quad \checkmark \text{ د) } \frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$$

مسئله خرد - هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

- ۱ → ۹
- ۲ → ۷
- ۳ → ۱۰
- ۴ → ۶
- ۵ → ۸

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a-5}$	۳) $\frac{a-2}{a-5}$	۴) $\frac{a+2}{a+5}$	۵) $\frac{2-a}{a+5}$
۶) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۷) $\frac{-a-2}{5-a}$	۸) $\frac{a-2}{-a-5}$	۹) $\frac{2-a}{-a-5}$	۱۰) $\frac{-a+2}{-a+5}$

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف) صورت و مخرج در $Z+1$ ضرب
 $\frac{1-z}{z} = \frac{(1-z)(Z+1)}{z^2+z}$

ب) $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6} = \frac{3x(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

ج) $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (\boxed{3y+2})$

د) $\frac{(x-5)(\boxed{(x-2)(x+1)})}{(x-2)(x-5)} = x+1$

۶- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$ ب) $\frac{zx+y}{t}$ ج) $\frac{1}{t}xz(x+y)$ ✓

د) $zx \frac{x+y}{t}$ ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$ و) $\frac{zx}{t} + y$

عصا کاغذی

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{(a+2)(a-2)(a+2)}{(a+2)(a-2)(a+2)}$$

الف) $\frac{a^2 - a - 6}{a+2} \times \frac{a+2}{a^2 - 4} = \frac{a-3}{a-2}$

ب) $\frac{a^2 b + ab^2}{a} \times \frac{2ab}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b) \times 2ab}{a(a+b)(a+b)} = \frac{2ab^2}{(a+b)}$

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x+2} \times \frac{x+5}{x+1}$$

ج) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x+2} + \frac{x+1}{x+5} = \frac{x+5}{1}$

د) $\frac{2x^2}{2xy} + \frac{yx}{y^2} = \frac{2x}{2y} + \frac{yx}{y^2} = \frac{x}{y} + \frac{yx}{y^2} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y} = \frac{2x}{y}$

جمع و تفریق عبارت های گویا

جمع و تفریق عبارت های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویا است: در مورد عددهای گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

به طریق مشابه می توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

مثالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

الف) $\frac{2x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2x+7+2x-3}{x+2} = \frac{4x+4}{x+2}$

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

ب) $\frac{2x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2x+7-(2x-3)}{x+2} = \frac{2x+7-2x+3}{x+2} = \frac{10}{x+2}$

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ج) $\frac{a^2-20}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-20+(a-2)(a+2)}{a^2-4} =$

$$\frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

$$= \frac{a^2-20+a^2-4a+4}{a^2-4} = \frac{2a^2-4a-16}{a^2-4} = \frac{2(a^2-2a-8)}{a^2-4}$$

$$= \frac{2(a-4)(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{2(a-4)}{a-2}$$

د) $\frac{a+1}{a} - \frac{2a+2}{a(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2)-(2a+2)}{a(a+2)} = \frac{a^2+a+2-2a-2}{a(a+2)} = \frac{a^2-a}{a(a+2)}$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$= \frac{a^2}{a(a+2)} = \frac{a}{a+2}$$

$$\text{الف)} \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2 - y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$$

$$\text{ج)} \frac{2m^2 - 14 - (m+4)(m-2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{2m^2 - 14 - m^2 - 2m + 8}{(m-2)(m+2)} = \frac{m^2 - 2m - 6}{(m-2)(m+2)} = \frac{(m-4)(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{m-4}{m-2}$$

$$\text{د)} \frac{\sqrt{x+21} + x^2 - 2x}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{x^2 + 21x + 21}{(x-2)(x+1)(x+3)} \quad *$$

کار در کلاس

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. اصلاً فضای کافی برای پاسخ نداد.

$$\text{الف)} \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$$

$$\text{ب)} \frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\text{ج)} \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)(m-2)}{(x+2)(m-2)} = \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} = \frac{2(x^2 - 8)}{x^2 - 4} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = 2$$

$$\text{د)} \frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2 - 2xy + 3xy + 3y}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2 + xy + 3y}{3xy(x-y)^2}$$

ساده کردن عبارت های مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسره های مرکب می توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیر صفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

صورت و مخرج در عبارتی مناسب و غیر صفر ضرب شود
ابتدا صورت و مخرج را مخرج مشترک گرفت
سپس ساده شود.

$$\text{الف)} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{ب)} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} \cdot \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$ب) \frac{-x^2 - y^2}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2 + y^2} = \frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -1$$

به مخرج مشترک ضرب
ابتدا مخرج مشترک سری کرده ام از صورت و مخرج پس بدین صورت ساده شدن

الف) $\frac{\frac{r-r}{a-a+1}}{\frac{r-r}{a+1-a}} = \frac{a(a+1) \left(\frac{r-r}{a-a+1} \right)}{a(a+1) \left(\frac{r-r}{a+1-a} \right)} = \frac{r(a+1) - ra}{ra - r(a+1)} = \frac{ra + r - ra}{ra - ra - r} = \frac{r-a}{-a-r} = \frac{a-r}{a+r}$

ب) $\frac{\frac{r-r}{a-a+1}}{\frac{r-r}{a+1-a}} = \frac{r(a+1) - ra}{a(a+1)} \div \frac{ra - r(a+1)}{a(a+1)} = \frac{ra + r - ra}{a(a+1)} \times \frac{a(a+1)}{ra - ra - r} = \frac{-a+r}{-a-r}$

$a \neq 0$ و $a \neq -1$

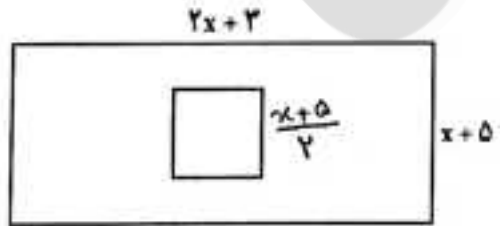
کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{\frac{n-n^2}{1+\frac{m^2}{n^2-m^2}}}{\frac{n(n-m)-n^2}{n^2-m^2+m^2}} = \frac{\frac{n(n-m)-n^2}{n-m}}{\frac{n^2-m^2+m^2}{n^2-m^2}} = \frac{n^2-mn-n^2}{n-m} \div \frac{n^2}{n^2-m^2} = \frac{-mn}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2} = \frac{-m(n+m)}{n}$

ب) $\frac{\frac{y-x}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x+y}{x+y} + \frac{y}{x-y}} = \frac{\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{xy - y^2 - x^2 - xy}{(x+y)(x-y)} \div \frac{x^2 - xy + xy + y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{-x^2 - y^2}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{-x^2 - y^2}{(x+y)(x-y)}$

فعالیت



طول ضلع مربع در داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{5}{26}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می آید.

طول ضلع مربع = $\frac{x+5}{2}$ مساحت مربع = $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2$

علامت پرانتز باید شامل مخرج هم باشد. ۱۲۲

$$\text{مساحت مستطیل} = (2x+3)(x+5) \quad \text{و} \quad \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{(x+5)^2}{(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{26} \Rightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{5}{26} \Rightarrow 26(x+5) = 5(2x+3) \Rightarrow 26x+130 = 10x+15 \Rightarrow 16x = -115 \Rightarrow x = -\frac{115}{16}$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{230}{16} \Rightarrow x = -\frac{115}{8}$$

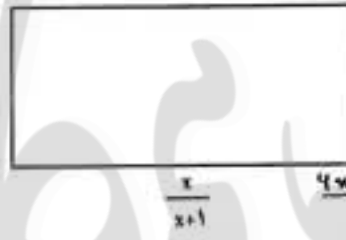
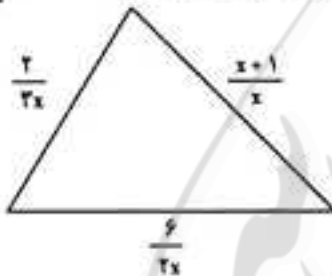
$$\text{طول} = 2x + 3 = -\frac{230}{8} + 3 = -\frac{115}{4} + 3 = -\frac{107}{4}$$

$$\text{عرض} = 5 + 5 - 10 = 0$$

$$\frac{2(x^2 + 5x + 3)}{(x+2)(x+1)}$$

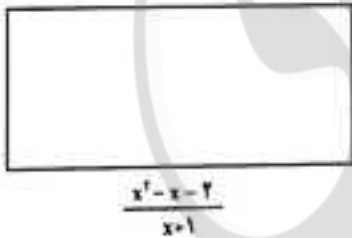
کار در کلاس

$$\frac{x+1}{x} + \frac{2}{3x} + \frac{4}{x^2} = \frac{2x^2 + 2x + 9}{3x^2} = \frac{2x+1}{3x}$$



$$\frac{2}{3x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{3x(x+1)} = \frac{2}{3(x+1)}$$

۲- مساحت مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.



$$(x-2) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x+1} \right) = \frac{(x-2)(x+1)(x-2)}{x+1} = (x-2)^2$$

تمرین

$$\frac{(a-4)(a+5)}{(a+5)} \times \frac{a+2}{(a-4)(a-4)} = \frac{a+2}{a-4}$$

الف) $\frac{a^2 - 16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2 - 8a + 16}$

ب) $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2y - 8xy} + \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18}$

ج) $\frac{(m-2)(m-2)}{2my(m-2)} \times \frac{12m}{(m-2)(m+3)} = \frac{2(m+3)}{my(m+3)}$

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

ب) $\frac{m^2 - 29}{m+1} + \frac{7-m}{m^2 - 1} = \frac{(m-7)(m+7)}{(m+1)} \times \frac{(m-1)(m+1)}{-(m-7)}$

د) $\frac{1-c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1-7c+c^2} = \frac{(1-c)(1+c)}{b(1-c)(1-c)} = \frac{1+c}{b(1-c)}$

الف) $\frac{x(x^2-y^2)-y(x-y)^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{x(x-y)(x+y)-y(x-y)^2}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)} = \frac{(x-y)[x(x+y)-y(x-y)]}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)}$

$= \frac{1}{x+y}$ ع) $\frac{(a^2-b^2)(a+b)-(a^2-b^2)}{a^2-b^2} = \frac{a^3+a^2b-b^2a-b^3-a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b-b^2a}{a^2-b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید. $\frac{vy-9u}{xy(a-b)}$

الف) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^2-y^2}$ ب) $\frac{x+v}{ax-bx} + \frac{y+q}{by-ay} = \frac{x+v}{x(a-b)} - \frac{y+q}{y(a-b)} = \frac{xy+vy-xy-9q}{xy(a-b)}$

ج) $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$ د) $\frac{r+x^2-rx}{r+x} - r-x = \frac{x^2-2rx+r^2-r^2-2m-2m-\alpha^2}{r+x} = \frac{-2m}{r+x}$

۳- فقط یکی از عبارات‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^2+5}{a^2}$ و $\frac{a^2+3}{3}$ و $\frac{a^2+b^2}{a^2}$ و $\sqrt{\frac{a^2-5a}{a}} = \frac{a(a-5)}{a} = a-5$

۴- از میان عبارات‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$ ب) $\frac{3-x}{3-y}$ ج) $\frac{3x}{3y}$ ✓ د) $\frac{x^2}{y^2}$ ه) $\frac{a^2x}{a^2y}$ ✓

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارات‌های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+3}{x+5}$ ب) $\sqrt{\frac{x-3}{x+5}}$ ج) $\frac{x-3}{x+5}$ د) $-\frac{3-x}{x+5}$

۶- کدام یک از عبارات‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$ ب) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

$\frac{A^2-B^2}{C^2} = \frac{(A-B)(A+B)}{C^2} = \frac{(a^2-b^2-a^2-b^2)(a^2-b^2+a^2+b^2)}{(2ab)^2} = \frac{-2b^2 \times 2a^2}{4a^2b^2} = -1$

عرض = x
طول = $2m-1$

$$\frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{2(m+2m-1)}{x(2m-1)} = \frac{2(3m-1)}{x(2m-1)}$$

سوال 9 ←

۸- کدام یک از تساوی های زیر درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح

کنید. (هذه عبارت های جبری تعریف شده فرض می شود.)

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab} \rightarrow \frac{a^2-b^2}{ba}$ ب) $\frac{x^{12}}{x^{20}} = x^8 \rightarrow x^{-8} = \frac{1}{x^8}$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5} \rightarrow \frac{a-v+b}{5}$ د) $\frac{a-b}{b-a} = 1 \rightarrow \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$

ه) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b} \rightarrow \frac{-1}{b-a}$ و) $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$

ز) $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{1+d} \rightarrow \frac{a+b}{1+d}$ ح) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

الف 10

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این

مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید. با $\frac{1}{x}$

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\frac{-\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \div \frac{\alpha-\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)}$$

$$\frac{-\alpha}{\alpha+1} \times \frac{\alpha+1}{\alpha-\alpha^2-\alpha} = \frac{-\alpha}{-\alpha^2} = \frac{a-a^2}{a^2-1} \text{ الف) } \frac{a-a^2}{a^2-1} = \frac{a}{a+1} - a$$

ب) $\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y} = \frac{x+y-2x+2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{-x+3y}{(x-y)(x+y)}$ $\times \frac{(x-y)^2}{x^2-9y^2} = \frac{-(x-y)}{(x+y)(x+3y)(x+2y)}$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

ج) $\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x+1}$

$$= \frac{2x^2-2m+x+1-2x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{-x+3}{(x+1)^2(x-1)}$$

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ نبود. $\frac{x-2}{2x} \times \frac{2x}{a+7}$
ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ نبود. $\frac{a}{a+7} + \frac{-2}{a+7}$

۱۲- طول مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

$$\lambda = x^2 - 9$$

مساحت مستطیل x^2-9 است.
 $\frac{x^2-x-12}{x-4} = \frac{(x-4)(x+3)}{-(x-4)} = x+3$

طول مستطیل = $\frac{\text{مساحت}}{\text{عرض}} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3$

۱۲۵

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

- برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال $\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y}$ و $\frac{-18a^2xz^2}{27x^6z} = \frac{-2a^2z}{3x^4}$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیر صفر باشند، داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^2 - 18x + 2$ بر 6 به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^2 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^2}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^2 - 3x + \frac{1}{3}$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؛ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) $\frac{7a^2 + 5a^2 - 18a}{4a^2} = \frac{7a^2}{4a^2} + \frac{5a^2}{4a^2} - \frac{18a}{4a^2} = \frac{1}{4}a^2 + \frac{5}{4}a - \frac{9}{2a}$

ب) $\frac{14x^2yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^2yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}$
 $= \frac{7x}{y} - \frac{3}{xy^2z} + \frac{3z}{2}$

ج) $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2} =$
 $= \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \frac{3}{y}$

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-21a^2b^3c}{28ab^2} = -\frac{3ac}{2b}$

ب) $\frac{24x^2y - 2z + 3xyz}{x^2z} = \frac{24x^2y}{z} - \frac{2}{x^2} + \frac{3y}{x}$

۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای
 اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم: $\frac{26}{8} \left[\frac{3}{2} \right]$ ← مقسوم
 ← مقسوم علیه
 ← خارج قسمت
 ← باقیمانده
 ???

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقی مانده می‌نامیم. رابطه‌های تقسیم بالا به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3 \times 8 + 2 = 26 \\ 2 < 8 \end{cases}$$

مثال: چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله‌ای $x - 5$ تقسیم کنید.

چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را مقسوم و $x - 5$ را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان‌های نزولی متغیر موجود (در اینجا x) مرتب کرد. در مثال ما چندجمله‌ای‌های مورد نظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم؛ یعنی: $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad \quad 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ را به دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = 3x - 15$$

برای آسان‌تر شدن، می‌توانیم پس از محاسبه حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ ، در کادر بالا علامت عبارت حاصل را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم؛ یعنی:

داخل کادر

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline + 3x - 15 \end{array}$$

اکنون دوباره $2x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم؛ یعنی اولین جمله عبارت $2x - 15$ را بر اولین جمله $x - 5$ تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که این چند جمله‌ای‌ها نیز باید بر حسب توان‌های تری مرتب شده باشند؛ داریم: $\frac{2x}{x} = 2$
این تقسیم‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که با باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ \pm 2x^2 \pm 10x \quad \quad 2x + 3 \\ \hline - 17x - 15 \\ \pm 17x \pm 85 \\ \hline - 100 \end{array}$$

وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را بر و حل را کامل کنید.

الف)
$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\ \pm 4x^2 \quad \quad \pm 8x \quad \quad \boxed{4x} - 2 \\ \hline - 3x^2 + 9x + 7 \\ \pm 3x^2 \pm \boxed{6} \\ \hline 9x + 1 \end{array}$$

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4x$$

درجه چند جمله‌ای را باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه کمتر شده

باقیمانده این تقسیم چیست؟
 $9x + 1$

ب)
$$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 24 \quad | \quad x - 8 \\ + x^2 - 8x \quad \quad \boxed{x} + \boxed{3} \\ \hline 3x - 24 \\ + 3x - 24 \\ \hline - 48 \end{array}$$

باقیمانده صفر است

$$\frac{2x}{x} = 2$$

$$\frac{3x}{x} = 3$$

۵

$$\begin{array}{r} 2m^5 + 5m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 \\ \underline{-2m^5 + 4m^4} \\ -m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 \\ \underline{+2m^4 - 2m^3} \\ 2m^2 - 2m + 1 \\ \underline{-2m^2 + 2m} \\ 1 \end{array}$$

۸

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-2x^4 + 4x^3} \\ 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \\ 2x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ 2x + 1 \\ \underline{-2x + 2} \\ -1 \end{array}$$

۷

$$\begin{array}{r} 3y^2 - 10y - 2 \quad | \quad 3y - 2 \\ \underline{-3y^2 + 6y} \\ -4y - 2 \\ \underline{+4y + 8} \\ -10 \end{array}$$

سوال ۲

$$\begin{array}{r} 2m^4 - 2m^3 + m^2 + 5 \quad | \quad -m + 1 \\ \underline{-2m^4 + 2m^3} \\ 4m^3 + m^2 + 5 \\ \underline{-4m^3 + 4m^2} \\ 5m^2 + 5 \\ \underline{-5m^2 + 5m} \\ 5m + 5 \\ \underline{-5m + 5} \\ 10 \end{array}$$

رابطه $(-m+1)(-2m^3 - 2m^2 - m - 2m - 2) + 10$

سوال ۳ $x(m+5) = x^2 + 5m$

عوض = $\frac{صورت}{مخرج$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 10x^2 + 2m \quad | \quad x^2 + 5m \\ \underline{-2x^2 + 10x^2} \\ 10x^2 + 2m \\ \underline{-10x^2 + 20x} \\ 2m + 20x \end{array}$$

عوض $2m + 20x$

$$\begin{array}{r} x^2 + m^2 + 5 \\ \underline{-x^2 + m^2} \\ 2m^2 + 5 \\ \underline{-2m^2 + 4m} \\ 4m + 5 \\ \underline{-4m + 4} \\ 1 \end{array}$$

سوال ۴ شرط تجزیه پذیری باقیمانده باید برابر صفر باشد

$$\begin{array}{r} 20x^2 + 22x^2 - 10x + a \quad | \quad 5x + 3 \\ \underline{-20x^2 + 10x} \\ 12x^2 - 10x + a \\ \underline{-12x^2 + 36x} \\ -46x + a \\ \underline{+46x - 18} \\ a - 18 \end{array}$$

اگر $a + 18 = 0$ خواهد بود $a = -18$

الف

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 19x^2 + 14x - 4 \quad | \quad -x + 2 \\ -4x^2 - 14x^2 \\ \hline -18x^2 + 14x - 4 \\ +18x^2 + 28x \\ \hline 42x - 4 \\ -42x + 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 8x - 12 \quad | \quad x + 2 \\ -x^2 + 4x - 21 \\ \hline 4x + 8x - 12 \\ -4x + 8 \\ \hline 16x - 12 \\ -16x + 32 \\ \hline 20 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r} 1 \cdot x^3 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\ 1 \cdot x^3 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad 2x^2 - 3 \\ +1 \cdot x^3 - 15x^2 \\ \hline 12x^2 + 2x - 19 \\ +12x^2 - 18 \\ \hline 2x - 1 \end{array}$$

رابطه های تقسیم:

$$(5x^2 + 9)(2x^2 - 3) + 2x - 1 = 10x^4 - 3x^3 + 2x - 19$$

و درجه چند جمله ای $2x - 1$ از درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

کار در کلاس

تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف $6x^2 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad 2 - x$

ب $-x^2 - 12 + 8x \quad | \quad x + 6$

تمرین

۱- تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف $\frac{-2x^2y^2z^2}{18xz^2} = \frac{-x^2y^2z^2}{9}$

ب $\frac{2a^2y - a^2y^2 + 15xy}{-5y^2} = -\frac{2a^2}{5y} + \frac{a^2}{5} - \frac{3x}{y}$

ج $(x^2 - 27) \div (x - 2)$

د $(2y^2 - 10y - 24) \div (2y - 4)$

ه $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

تقسیم نشان دهید. $-3x^2 + 4x^3 + x^2 + 5 \quad | \quad 1 - x$ درصفحه قبل

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^2 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x + 4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله ای $20x^2 + 22x^3 - 10x + a$ بر $4x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید. درصفحه قبل

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارات زیر به دست آورید.

$x + 3$ و $x - 3$ و $2x - 2$ و $2x + 2$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x + 3 \\ -2x^2 + 6x \\ \hline -15x + 9 \\ +15x + 45 \\ \hline 54 \end{array}$$

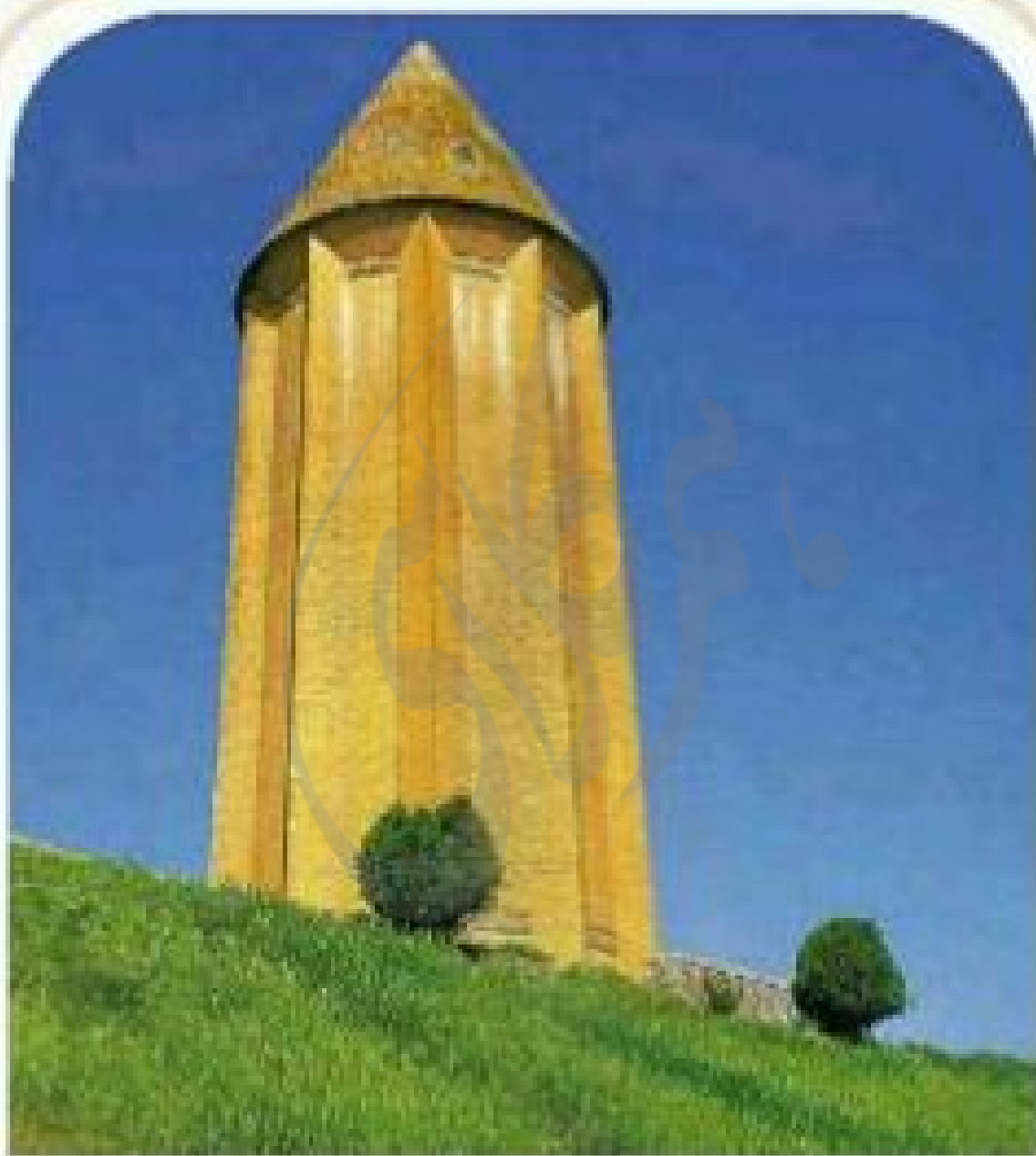
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x - 3 \\ -2x^2 + 6x \\ \hline -15x + 9 \\ +15x - 45 \\ \hline -36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x - 2 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline -5x + 9 \\ +5x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x + 2 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline -13x + 9 \\ +13x + 27 \\ \hline 36 \end{array}$$



حجم و مساحت



کنبد دایوس پدای تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر کنبد گوروس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج نماد آجری جهان به شعاع میزاید. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۳۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بنده استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شط‌ها در این فصل با اجزای استوانه مخروط به منشور ابتدا می‌شوند.

در سال های قبل با انواع حجم های هندسی آشنا شدید. این حجم ها به سه دسته تقسیم می شد: مشوری، کروی و هرمی.



کره زمین و توپ بسکتبال نمونه هایی از حجم های کروی است. چند نمونه دیگر از حجم های کروی را نام ببرید. پرتقال - هندوانه - گلدان - گلدوز

فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می گوئیم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.



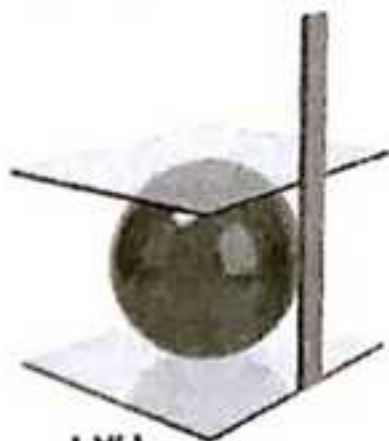
فاصله آن نقاط از

کره مجموعه نقاطی از فضا است که مرکز شعاع کره ثابت شعاع کره می گوئیم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

• یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

• مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.





• مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توب کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن معاس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

$$2R = \text{عصره} : \text{ارتفاع استوانه}$$

$$R = \text{شعاع} : \text{شعاع قاعده استوانه} \quad \text{حجم استوانه} = \pi R^2 \times h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

• توب را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را ببرد تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده بر از آب می‌شود.



الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ $\frac{2}{3}$ برابر
 ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ $\frac{4}{3}$ برابر یا $\frac{2}{3}$
 ج) بنابراین حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.
 د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

حجم کره‌ای به شعاع R از دستور $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

$$R = 5, h = 10$$

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.

$$\text{الف) } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$\text{ب) } V = Sh = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$\text{ج) } V_{\text{فضای بین کره و استوانه}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.

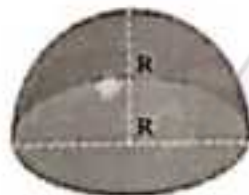
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \times 10^3 = \frac{2000}{3}\pi$$



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ فرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حد امکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ بله در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. در بعضی ها تا حد جزئی می شود.



۲- ثابت می شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: $2\pi R^2$
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: $4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با: $S=4\pi R^2$

کار در کلاس



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع 10 سانتیمتر را پیدا کنید. $2\pi R^2 = 2\pi \times 10^2 = 400\pi$

۲- می خواهیم یک نیم کره جوی توپر به شعاع 10 سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت

رنگ شده را پیدا کنید. $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 300\pi$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره جوی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت نیم کره جوی توپر برابر مساحت دایره هر یک 100π ولی در مساحت عرق چین

۳ برابر مساحت دایره محاسب می شود.

ع) $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^6)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^{12} = 1,72384 \times 10^{14} \pi$ کیلومتر مربع

$S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^6)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^{12} = 1,72384 \times 10^{14} \pi$ متر مربع

$\frac{1,72384 \times 10^{14} \pi}{1,72384 \times 10^{14} \pi} = \frac{1,72384}{1,72384 \times 10^{14} \pi} = 10^{-14} = 1,72 \times 10^{-3}$

$1,72 \times 10^{-3} \times 10^4 = 1,72 \times 10^{-1}$

تمرین

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
 ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.
 در بالا (د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۲۸/۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

ارتفاع $h = 1,73 = 1,73 \text{ m}$

$V = \pi \times 7^2 \times 1,73 = 70,72 \pi$

$V = \frac{4}{3} \pi \times 7^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \pi \times 49 \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 49 \times \pi}{9} = 21,78 \pi$

$V = 70,72 \pi + 21,78 \pi = 92,5 \pi$

حجم کیسول



۲- یک کیسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کیسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد. حجم کیسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.
 $R = 30 \text{ m}$
 $h = 1 \text{ m}$
 اگر بخواهیم سطح کل این کیسول را رنگ کنیم. چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد. در بالا



۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۲ سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم. آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

ارتفاع آب $\Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \pi \times 12^3}{\pi \times 12^2} = \frac{4}{3} \times 12 = 16$

شعاع آب $= \pi \times 12^2 \times \pi$

مسئله ۲ قسمت ب

مساحت نیم کره $= 2\pi R^2 \times \frac{1}{2} = 2\pi \times 7^2 = 98\pi$

مساحت جانبی استوانه $= 2\pi R \times h = 2\pi \times 7 \times 1,73 = 24,02\pi$

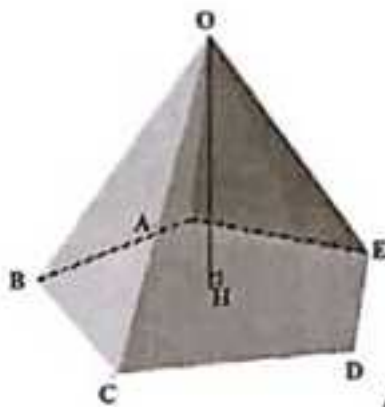
مساحت کلاهک استوانه $= \pi R^2 = \pi \times 7^2 = 49\pi$

مساحت کل $= 98\pi + 24,02\pi + 49\pi = 171,02\pi$

نیاز به رنگ $= 171,02\pi \times 100 = 17102\pi$ گرم $\rightarrow 17102\pi \times 10^{-3} = 17,102\pi$ کیلوگرم



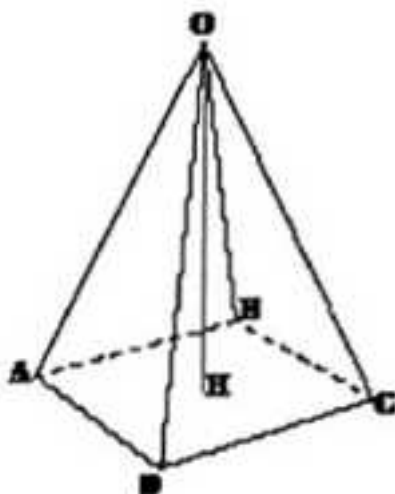
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. سه نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید. چپادری، عشتار، پالت سیر
پاستوریزه سوس، کوه‌ها، درختان کاج -



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: ... تعداد وجه‌ها: ... شکل وجه‌ها: ... شکل قاعده: ... نام قاعده: ABCDE.

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده ABCDE عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت OABCDE خوانده می‌شود.

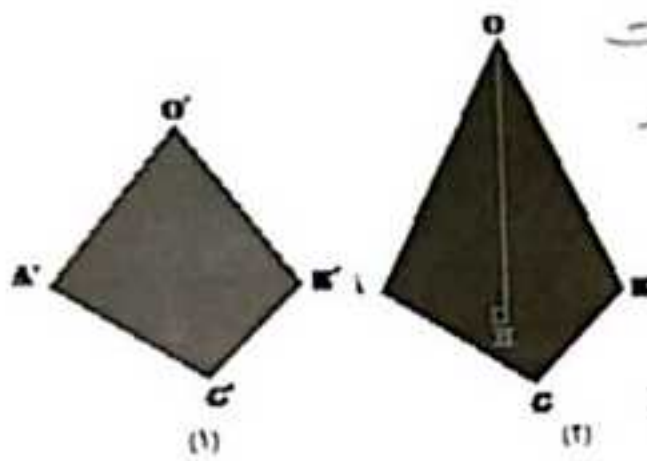
فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس: ... ارتفاع: OH... شکل قاعده: ... وجه‌های جانبی: ... تعداد وجه‌ها: ...

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در



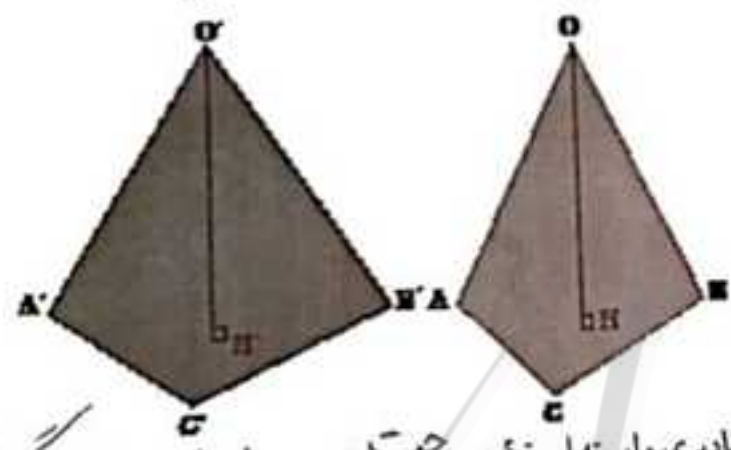
نسبت
 شکل های (۱) و (۲) مثلث های قاعده هم نه

شکل

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل های (۳) و (۴) ارتفاع ها برابر است

علاوه
 ✗

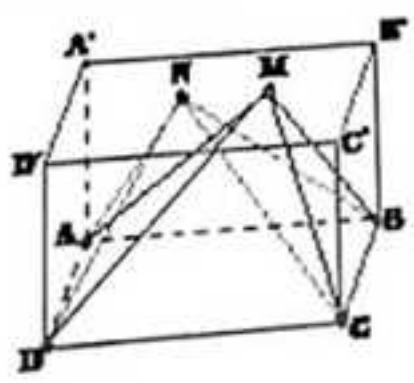


$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ هم مساحت قاعده و ارتفاع بستگی دارند.
 ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث - به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم
 د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های آنها چه می توانید بگویید؟ حجم ها برابر می شوند.

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

۱۳۶

- چون دارای قاعده و ارتفاع برابر می باشند.

بسیار هم نزدیک به هم نقطه های M و N می توان هم هم های متفاوت داشت.

شماره ۱۰

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو فاعده ABC و DEF را ملاحظه می‌کنید. نقطه C را به نقطه‌های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می‌کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می‌دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم‌های برابر دارند و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



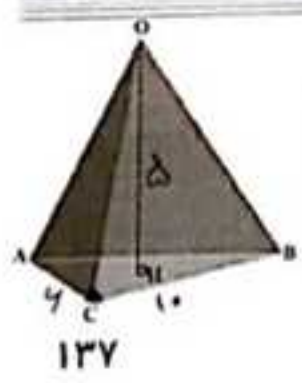
قطعه‌ها را به واسطه قطر مسطح‌ها جدا کنید.

- ۱- چهار ضلعی $ABED$ ، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت دارند؟ بتواند دو مثلث هرم به هم برود.
- ۲- چرا هرم‌های $CBED$ و $CBAD$ دارای حجم‌های برابر است؟ چون تا به هم وصل می‌شوند و مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت دارند.
- ۳- چرا هرم‌های $CDEF$ و $DABC$ دارای حجم‌های برابر است؟ چون تا به هم وصل می‌شوند و مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت دارند.
- ۴- با توجه به پاسخ سؤالات ۱ و ۲ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ این هرم‌های $CBED$ ، $CBAD$ و $CDEF$ دارای حجم‌های برابرند.

حجم هر هرم با مساحت فاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}(\pi R^2)h$$

کار در کلاس



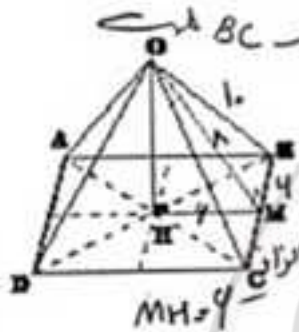
در شکل مقابل هرم $OABC$ دارای فاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 10\text{cm}$ و زاویه $\angle ACB = 90^\circ$ و ارتفاع OH هرم مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 20 \times 9 = 60 \text{ cm}^3$$

فعالیت

در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.



$$\begin{aligned} OH^2 &= OM^2 - MH^2 \\ OH^2 &= 49 - 4 \times 4 = 28 \\ OH &= \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

۱- باره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC

۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ تمام الزامات

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس $OM^2 = OB^2 - MB^2$ در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. $OM = 8 \text{ cm}$

۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ تمام الزامات

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را

به دست آورید. $OH = 2\sqrt{7}$

۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و جالب تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره - مخروط



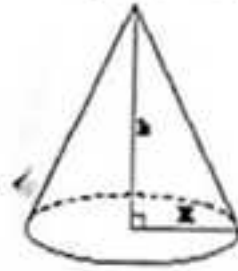
مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.



از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} S_b = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



کاربرد کالس

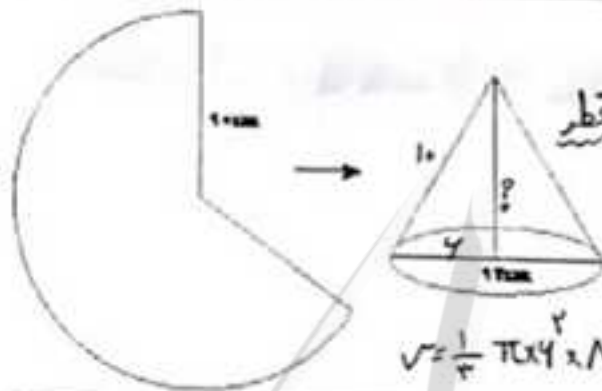
علی با قسمتی از دایره به شعاع ۱۰ cm، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ cm ساخته است. حجم مخروط را به دست آورید.

* باسی

$$h^2 = 10^2 - 4^2$$

$$h^2 = 100 - 16 = 84$$

$$h = \sqrt{84}$$



$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times \sqrt{84} = 94 \pi \text{ cm}^3$$

تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۲ cm باشد و وجه های جانبی آن مثلث های متساوی الساقینی به ساق های ۸ cm باشد. درج مس

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12$$

$$V = 48 \pi$$

طرف مخروطی



۳- طرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۲ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب بر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶ cm است، خالی می کنیم. آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

$$V = sh = 4 \pi h$$

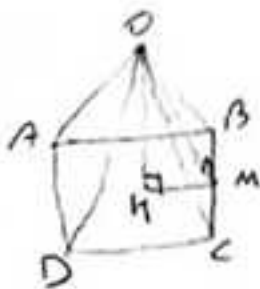
$$48 \pi = 34 \pi h$$

$$h = \frac{48}{34} = 1.4 \text{ cm}$$

* شعاع = 4

۱۳۹

۲



$$OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$OM^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$OM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

$$OH^2 = 12 - 3 = 9$$

$$OH = \sqrt{9} = 3$$

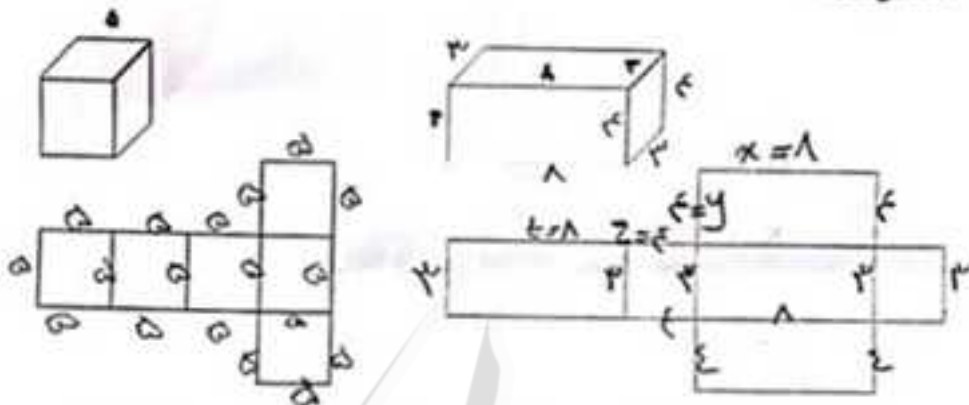
$$V = \frac{1}{3} S_b h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

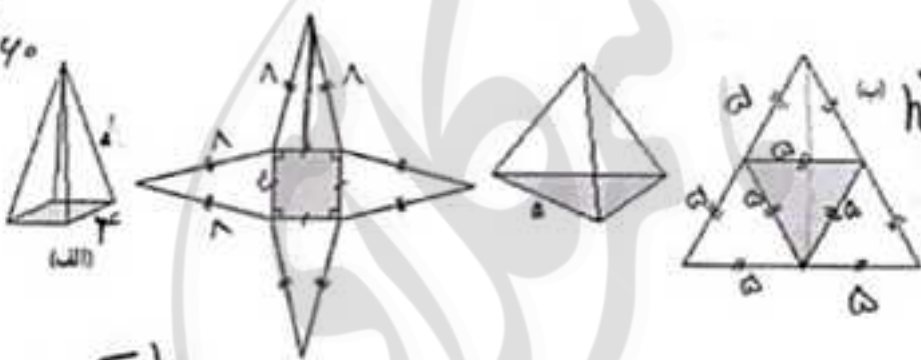
مثال ۱

۱- با توجه به اندازه‌های اجزای مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



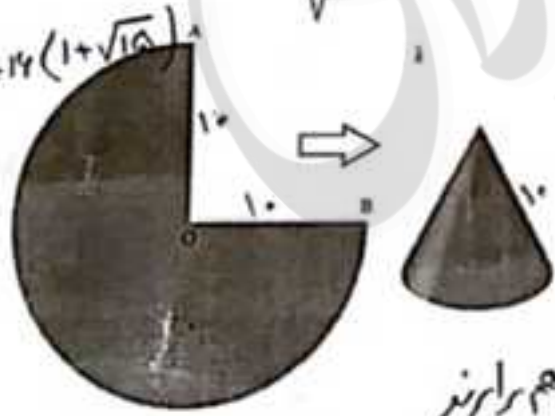
۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

مساحت $S = \epsilon \times \epsilon = 14$
 $h^2 = 14 - 2^2 = 10$
 $h = \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$
 $S = \frac{\epsilon \times 2\sqrt{10} \times \epsilon}{3}$



$h^2 = 10^2 - 5^2 = 75$
 $h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
 $S = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$

$S_{total} = 14 + 14\sqrt{5} = 14(1 + \sqrt{5})$



۳- $\frac{2}{3}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید. با هم برابرند

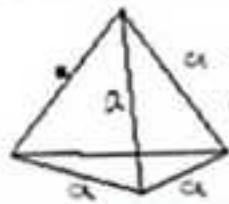
$P = 2R\pi = 2\pi \times 10 = 20\pi$

$P_{مخروط} = 5\pi$
 $5\pi = 2\pi R$

$20\pi \div 4 = 5\pi$

$R = \frac{5}{2} = 2.5$

طول کمان AB = 5π



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه بال های آن است.
 $OH = OB - BH$

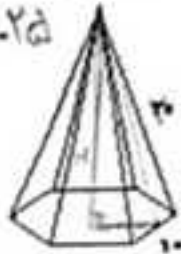


$$OH^2 = (a\sqrt{3})^2 - a^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$$

$$OH = a\sqrt{2}, S = \frac{a\sqrt{2} \times 2a}{2} = a^2\sqrt{2}$$

$$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$$

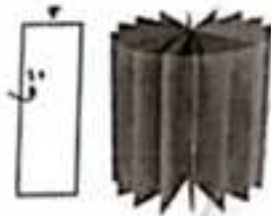
$$h = \sqrt{375}$$



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده منش ضلعی منتظم و اندازه بال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.

$$= \frac{4 \times \sqrt{375} \times 10}{2} = 20 \sqrt{375} \approx 580,9$$

فعالیت



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ استوانه

شعاع قاعده شکل حاصل: \dots ارتفاع شکل حاصل: \dots حجم شکل حاصل را پیدا کنید.

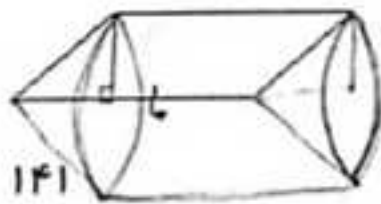


۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط

شعاع قاعده شکل حاصل: \dots ارتفاع شکل حاصل: \dots

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^2 \times 10 = 30\pi \dots$$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.

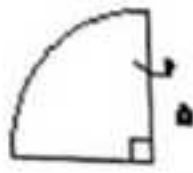


کرة حاصل می شود



شکل لولای درخت می شود

استوانه که در سمت راست آن مخروطی خالی شده و در سمت چپ به همان اندازه مخروطی اضافه شده



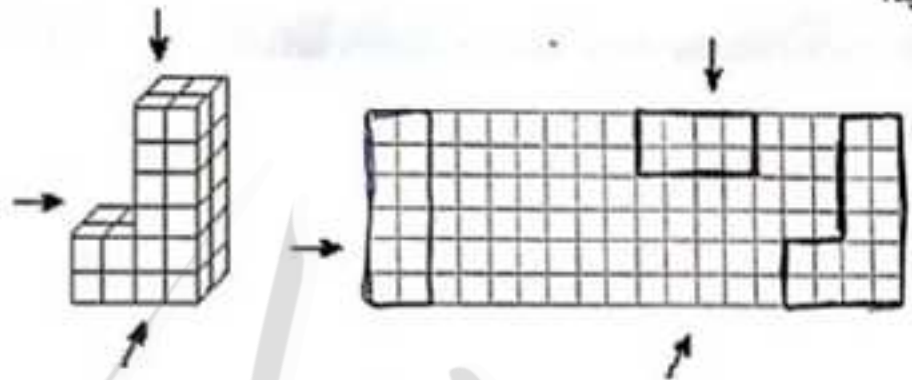
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع 5cm را حول شعاع آن پیدا کنید
 شماره حساب من شود

$$\frac{1}{4} \pi R^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \pi \times 5^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25 \cdot \pi}{4}$$

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



* ۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده منش ضلعی (ب) هرم منتظم با قاعده مربع (ج) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث مساوی و لایحه
 الف رسم کنید

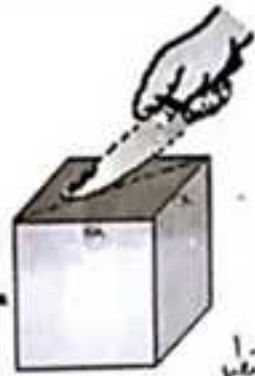


۲- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟ دایره - اگر دو نیمه
 مساوی تقسیم شود



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟
 از نیمه با یک براد، $\frac{1}{6}$ آن برداشته شده
 ۱۴۲ پس $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ از کره من با

کار در کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی متصل است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2}$$

$$a = \text{عرض مستطیل}$$

تشریح

شکل سوم استوانه

$$S = 2\pi a x a = 2\pi a^2 x$$

$$S = 2\pi a^2$$

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$$



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.



② کره به شعاع a

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$



③ استوانه به ارتفاع و شعاع a

$$V = \pi a^3$$

$$S = 2\pi a^2$$



④ استوانه به ارتفاع و قطر a

$$V = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

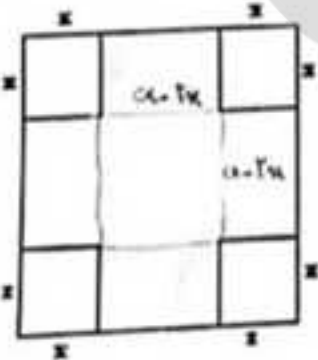
$$\frac{V}{S} = \frac{a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4\pi}$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح $(\frac{V}{S})$ را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



۱۴۳

۲- از یک متوازی به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

$$a - 2x = 4x$$

$$a = 4x + 2x = 6x$$



پس a باید ۶ برابر x باشد.