تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۶
شمارش، بدون شمردن

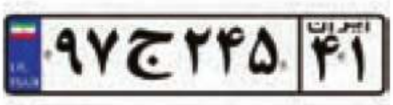
وَ إِنْ تَعُدُّواْ نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا «سورهٔ ابراهیم آیهٔ ۳۴»
و اگر بخواهید نمی‌توانید نعمت‌های خدا را بشمارید.

داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرزی هم‌رنگ نباشند؟

درس اول شمارش
درس دوم جایگشت
درس سوم ترکیب

درس اول: شمارش

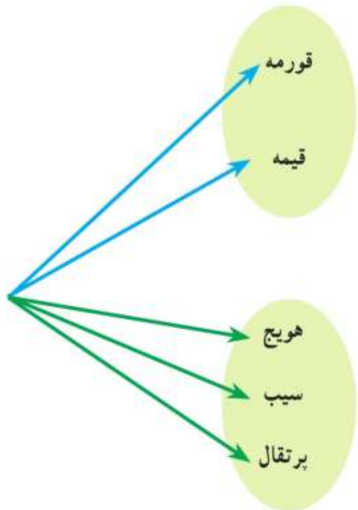
شاید شمارش درنظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ امّا آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟



می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟

اصل جمع و اصل ضرب

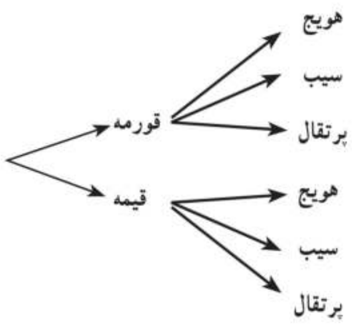
فعالیت



۱ امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

طبق نمودار روبرو ۵ انتخاب وجود دارد

۲ هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟



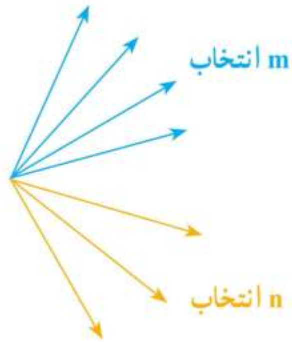
با توجه به نمودار روبرو ۶ انتخاب خواهد داشت

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول امین فقط به یکی از دو روش کار را انجام می دهد ، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می کند و یا آنکه به آب میوه فروشی رفته و یکی از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد . ولی در سوال دوم پوریا هر دو مکان را خواهد رفت که در اولی ۲ انتخاب و در دومی ۳ انتخاب دارد .

۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سوال اول ۵=۳+۲ حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب می‌کرد، ولی در سوال دوم ۶=۳×۲ حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول، ۳ انتخاب در مکان دوم دارد.



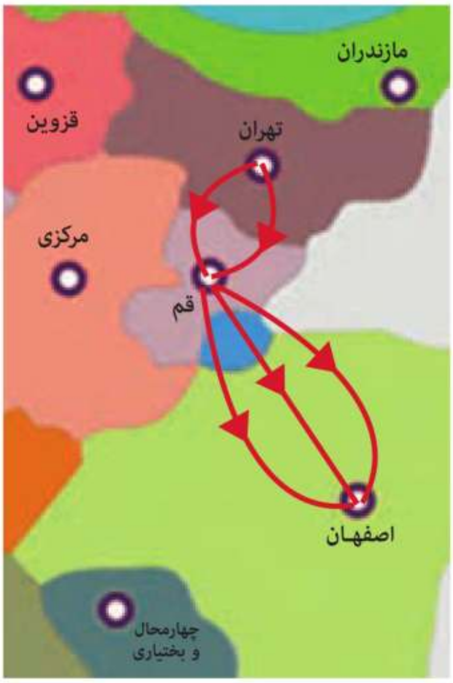
اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر m+n روش وجود دارد.

«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آب‌میوه‌فروشی» را انجام می‌دهد».

تعمیم اصل جمع : اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب ، ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1+m_2+\ldots+m_k$ روش وجود دارد.

اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحلهٔ اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آب‌میوه‌فروشی که مرحلهٔ دوم است، صورت می‌پذیرد».

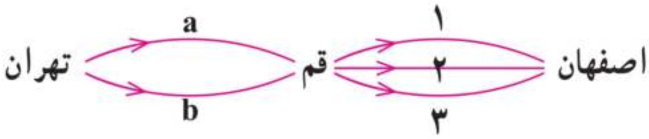


مثال

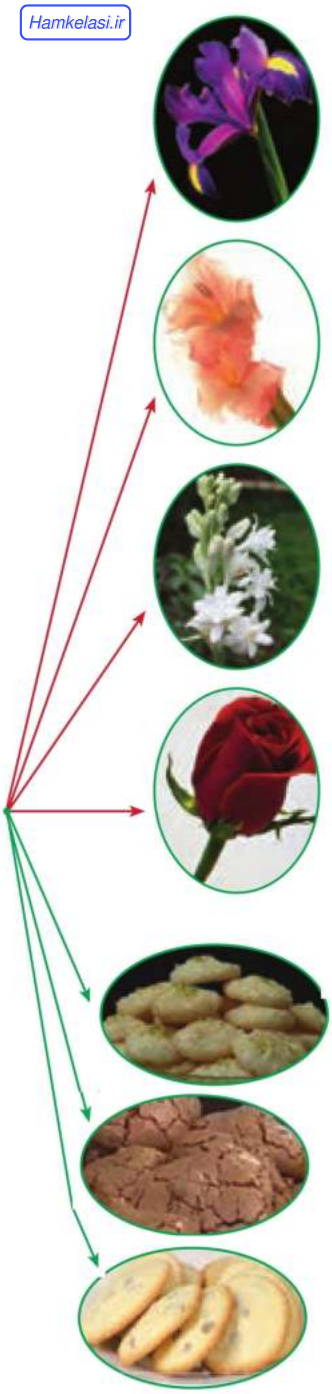
فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این‌کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها ۶=۳×۲ است که عبارت‌اند از :

a,۳	a,۲	a,۱
b,۳	b,۲	b,۱



تعمیم اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m_1 روش، برای انجام مرحلهٔ دوم m_2 روش ، ... و برای انجام مرحلهٔ kام m_k روش وجودداشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$ روش قابل انجام است.



کار در کلاس

۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخهٔ گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌انداز : مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او درنظر دارد، عبارت‌اند از : گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟ ۷=۳+۴ بنابراین ۷ انتخاب دارد

۲ هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید. ۱۲=۳×۴ بنابراین ۱۲ انتخاب دارد

{(مریم وگردویی)و(مریم و نارگیلی)و(مریم و کشمشی)و(گلایل و گردویی)و(گلایل و نارگیلی)و(گلایل و کشمشی)و

(زنبق وگردویی)و(زنبق و نارگیلی)و(زنبق و کشمشی)و(رُز و گردویی)و(رُز و نارگیلی)و(رُز و کشمشی)}

۳ در هر یک از قسمت های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در سوال (۱) پژمان می تواند یکی از دو روش را انتخاب کند که یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد، لذا طبق اصل جمع ۷=۳+۴ انتخاب دارد ولی در سوال (۲) پژمان می خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی که طبق اصل ضرب ۱۲=۳×۴ انتخاب دارد.

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

اصل جمع : کتابخانه ی مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ی ادبیات دارد. اگر یک دانش آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند به چند راه می تواند این کار را انجام دهد؟ ۹۰=۵۰+۴۰ بنابراین ۹۰ راه وجود دارد

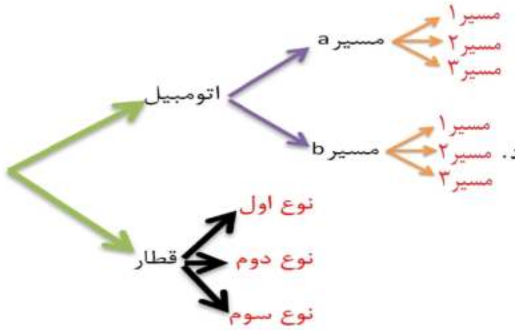
اصل ضرب : از بین ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می توان غذایی به همراه سالاد سفارش داد؟ ۲۰=۵×۴ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم

در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل : اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد. با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.



مثال : رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل :

حالت اول : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف فارسی باشد : ۳۲ × ۲۶ × ۳۲ = ۲۶۶۲۴

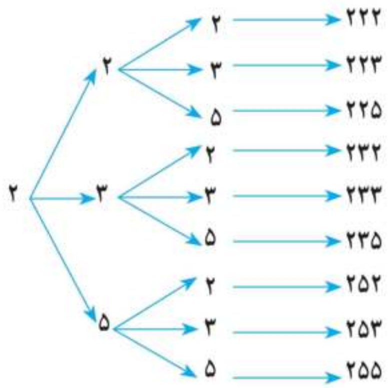
حالت دوم : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف انگلیسی باشد : ۲۶ × ۳۲ × ۲۶ = ۲۱۶۳۲

تعداد حالات ممکن : ۴۸۲۵۶ = ۲۱۶۳۲ + ۲۶۶۲۴

کار در کلاس

الف با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این‌کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور درنظر گرفت.

صدگان　　دهگان　　یکان

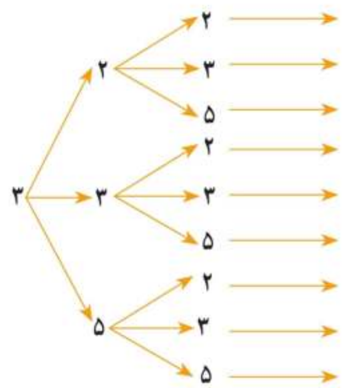


پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحلهٔ آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب درهم ضرب شود.

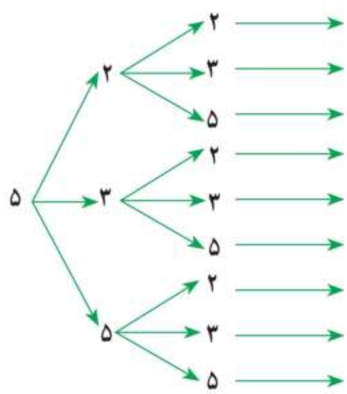
هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۵ یا ۳ یا ۲　۵ یا ۳ یا ۲　۵ یا ۳ یا ۲

تعداد حالت‌ها ...۳... × ...۳... × ...۳... = ۲۷



با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیهٔ صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱ــ برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

تعداد حالت ها ← ۳ حالت

۲ــ حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ها ← ۲ حالت

۳ــ برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

لذا ..۶... = ...۱.. ×...۲.. × ....۳.. عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

پ با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ در این جایگاه فقط عدد ۲ می‌تواند قرار بگیرد ، لذا ۱ حالت وجود دارد .

۲ــ دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند، پر شوند؟ در جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد می‌توانند قرار گیرند ، پس هر کدام دارای سه حالت است .

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ..۹... = ...۱.. × ..۳.... × ....۳..

ت با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به‌گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ ۱ حالت

۲ــ پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟
درجایگاه سمت چپ فقط یکی از اعداد ۳ یا ۵ می‌توانند باشند پس ۲ حالت داریم

۳ــ حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پرشود؟
با قرار گرفتن یکی از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ ، فقط یک عدد برای جایگاه وسط باقی می‌ماند ، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم .

۴ــ لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با ..۲..= ...۱...×..۱...×..۲..

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ)چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

حل :

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی‌تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است.

لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می‌توان نوشت.

۳ × ۴ × ۴ = ۴۸

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می‌توان نوشت.

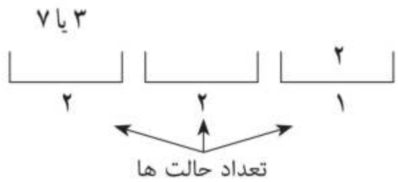
$۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$

پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.

$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

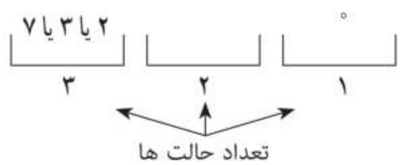
ت) چون عدد موردنظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را درنظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول : اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.



$۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$

حالت دوم : اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به‌صورت مقابل است.



$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم : با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به‌صورت زیر جواب را حساب کرد :

۱۰=۸−۱۸= جواب قسمت (پ) − جواب قسمت (ب) = جواب قسمت (ت)

تمرین

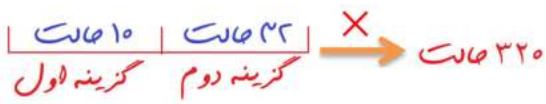
۱ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این‌کار از اصل جمع استفاده می شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

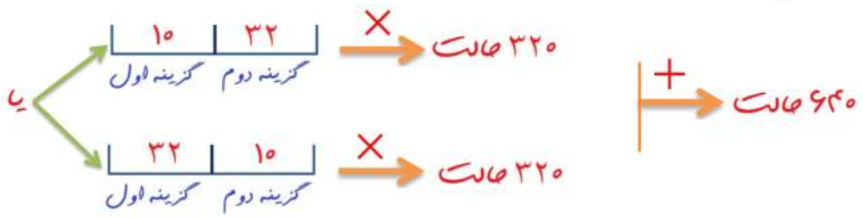
رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ... و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود

بنابراین ۴۲=۳۲+۱۰ حالت داریم.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.



پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

$10\times10=100$: هر دو عدد باشند

یا

$26\times26=676$: هر دو حرف باشند

$\xrightarrow{+} 776$

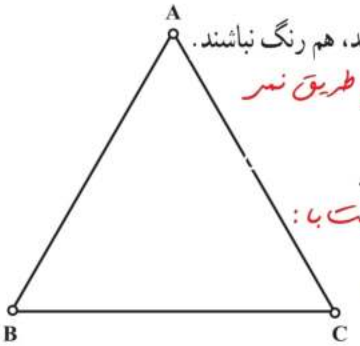
ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند. $|10|9|26|25|$ اعداد | حروف $\xrightarrow{\times}$ ۵۸۵۰۰ حالت

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداقل: $5\times8\times10\times20=8000$ حداکثر: $5\times10\times12\times30=18000$

۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ برای آنکه راس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبی و دو راس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برای متفاوت بودن رئوس B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب $2\times2\times2=8$ طریق این کار امکان پذیر است.



ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم‌وصل‌اند، هم رنگ نباشند.
با توجه به اینکه هر راس به دو راس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی‌توان این کار را انجام داد.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.
حالت الف: با توجه به اینکه مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب ها برابر است با: $3\times3\times3=27$

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی ۶ می‌باشد زیرا با وجود سه راس و ۳ رنگ متمایز، خود به خود رئوس همرنگ نخواهند بود.

۴ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعهٔ A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟

۹×۹ ۱۳ ۹×۹×۹ ۹

$\xrightarrow{\times} 13\times9^6=6908733$

A={۱۱,۲۲, ……,۹۹}

B={۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ ,۶ ,۷ ,۸ ,۹}

C={ی , ه , و , ن , م , ل , ق , ط , ص , س , د , ج , ب}

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل ، ۱۰ رنگ ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک)تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$\underbrace{5}_{\text{مدل}}\times\underbrace{10}_{\text{رنگ}}\times\underbrace{3}_{\text{حجم موتور}}\times\underbrace{2}_{\text{دنده}}=300$

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد ، چند نوع از این اتومبیل بارنگ مشکی تولید می شود؟

$\underbrace{5}_{\text{مدل}}\times\underbrace{1}_{\text{رنگ}}\times\underbrace{3}_{\text{حجم موتور}}\times\underbrace{2}_{\text{دنده}}=30$

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

$\underbrace{5}_{\text{مدل}}\times\underbrace{1}_{\text{رنگ}}\times\underbrace{3}_{\text{حجم موتور}}\times\underbrace{1}_{\text{دنده}}=15$

۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر :

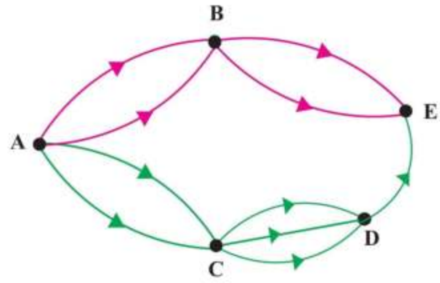
الف) اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟

$$\underbrace{\overbrace{4\times 4\times \cdots \times 4}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهارگزینه ای}}\ \underbrace{\overbrace{2\times 2\times \cdots \times 2}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = 2^{25}$$

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\underbrace{\overbrace{5\times 5\times \cdots \times 5}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهارگزینه ای}}\ \underbrace{\overbrace{3\times 3\times \cdots \times 3}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = 5^{10}\times 3^{5}$$

۷ اگر شکل مقابل نشان دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



$$\left.\begin{array}{l} ABE\ \text{مسیر}: 2\times 2 = 4 \\ ACDE\ \text{مسیر}: 2\times 3\times 1 = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 10$$

۸ مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

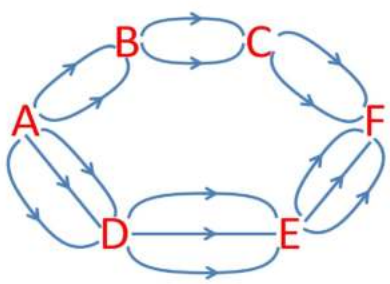
مسئله : چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؛ به‌طوری که از عدد ۶۰ بزرگتر یا مساوی آن باشند؟

حل : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

۲×۲×۲ + ۳×۳×۳ = ۳۵

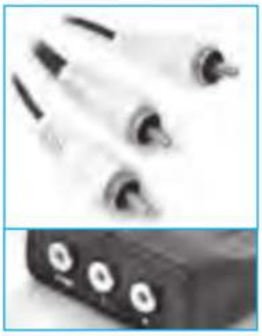
مسئله برای سوال ۹ : اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهر های A,B,C,D,E,F باشد و همه جاده ها یک طرفه فرض شوند ، به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟



تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: جایگشت

جایگشت



سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به‌هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به‌درگاه مخصوص به‌خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱) فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را درمربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

۲) آیا در سه مربع به‌هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ خیر

۳) با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟

۳ | ۲ | ۱ $\xrightarrow{\times}$ ۶

درگاه اول درگاه دوم درگاه سوم

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به‌صورت مقابل وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱) اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پرشود؟ ۴

ــ پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ ۳

ــ حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ ۳ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

سومین مربع به ۲ روش و چهارمین مربع به ۱ روش

ــ حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیاء می‌گوییم.»

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت‌است از حاصل‌ضرب ...۴...×...۳...×...۲...×...۱....

۲ به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تِتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟ $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

$۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

۴ با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

$۱۰\times۹\times\cdots\times۲\times۱$

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل‌ضرب نشان دهید. $n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times۲\times۱$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $۱!=۱$ ، $۲!=۱\times۲$ ، $۳!=۱\times۲\times۳$ و الی آخر

قرار داد : $۰!=۱$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با ... $n!$ ...

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $۶!=۶\times\overbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}^{۵!}=۶\times۵!$

ب) $۸!=۸\times۷!$

پ) $۱۰!=۱۰\times۹!$

ت) $n!=n\times(n-۱)!$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\dfrac{۵!}{۴!}=\dfrac{۵\times\overbrace{۴\times۳\times۲\times۱}^{۴!}}{\underbrace{۴\times۳\times۲\times۱}_{۴!}}=۵$

ب) $\dfrac{۱۰!}{۹!}=\dfrac{۱۰\times۹!}{۹!}=۱۰$

پ) $\dfrac{n!}{(n-۱)!}=\dfrac{n(n-۱)!}{(n-۱)!}=n$

ت) $\dfrac{۸!}{۶!}=\dfrac{۸\times۷\times۶!}{۶!}=۵۶$

ث) $\dfrac{۱۰!}{۸!}=\dfrac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۹۰$

ج) $\dfrac{n!}{(n-۲)!}=\dfrac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=n(n-۱)$

چ) $\dfrac{۸!}{۵!}=\dfrac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}=۳۳۶$

ح) $\dfrac{۱۰!}{۷!}=\dfrac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲۰$

خ) $\dfrac{n!}{(n-۳)!}=\dfrac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)$

د) $\dfrac{n!}{(n-۴)!}=\dfrac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!}=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$

ذ) $\dfrac{n!}{(n-۵)!}=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$

ر) $\dfrac{n!}{(n-k)!}=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)$

۳ حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۹\times۸ = \frac{۹!}{۷!}$ ب) $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$

پ) $۱۱\times۱۰\times۹ = \frac{۱۱!}{۸!}$ ت) $۸ = \frac{۸!}{۷!}$

ث) $n(n-۱) = \frac{n!}{(n-۲)!}$ ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n!}{(n-۴)!}$

فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a , b ,d , e , f , s , t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با $۷!$

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم.

- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه حرفی چند انتخاب داریم؟ ۷

برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟ برای دومین حرف ۶ انتخاب و برای سومین ۵ انتخاب داریم.

- بنابراین تعداد کلمات سه حرفیِ موردنظر برابر است با $۷\times۶\times۵$

در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید. $۹\times۸\times۷\times۶$

۴ اعداد به‌دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

مرحله دوم: $۷\times۶\times۵ = \frac{۷!}{۴!}$ مرحله سوم: $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$

۵ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-۳)!}$

۶ تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز $(۰\le r\le n)$ را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-r)!}$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با p(n,r) نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمهٔ «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

الف) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفیِ بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به‌دست آوریم؛ لذا جواب برابر $۸!$ است.

در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت‌ها روی هفت حرف دیگر را به‌دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر $۷!$ است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالتِ «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به‌صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند، کافی است این دوحرف را یک حرف درنظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به‌دست آوریم که برابر است با $۷!$. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با $۲\times۷!$.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش‌تایی از هشت شیء متمایز یعنی $\frac{۸!}{۲!} = \frac{۸!}{(۸-۶)!} = P(۸,۶)$ در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص‌اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمهٔ «جهان» را به‌دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار شیء متمایز؛ یعنی : $۱۲ = \frac{۴!}{(۴-۲)!} = P(۴,۲)$

ت) چهار حرف اول ، حروف کلمهٔ «جهان» هستند که به !۴ حالت می‌توانند بیایند. حال ۴ حرف آخر را باید با ۴ حرف باقی‌مانده (گ ر د ی) نوشت که این کار را هم به !۴ روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمهٔ مورد نظر به !۴ ×!۴ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمهٔ «جهان» در کنار هم برابراست با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی !۴. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که درنظر بگیریم، برای نوشتن کلمهٔ ۸ حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمهٔ «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با !۵. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با : !۵×!۴.

ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس ۳ انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هرکدام از این ۳ حرف برای چینش ۷ حرف دیگر !۷ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با : !۷×۳.

کار در کلاس

۱ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۳۶۰$$

۲ با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{۱!}=\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۱}=۲۴$$

تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

$$P(۱۸,۳)=\frac{۱۸!}{۱۵!}=\frac{۱۸\times۱۷\times۱۶\times\cancel{۱۵!}}{\cancel{۱۵!}}=۴۸۹۶$$

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

$$P(n,۳)=\frac{n!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)=\underbrace{۷\times۶\times۵}_{۲۱۰}\Rightarrow n=۷$$

۳ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$۶!=۶\times۵!$ درست	$۶!=۳!+۳!$ نادرست
$۲\times۳!=۶!$ نادرست	$۸!=۴!\times۲!$ نادرست
$۴!=\frac{۸!}{۲!}$ نادرست	$(۳!)^۲=۹!$ نادرست

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟ $۲ \times P(۲۰,۳) = ۱۳۶۸۰$ ثانیه

۵ با حروف کلمهٔ «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ $۶!$ چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟ $۴!$

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟ $P(۶,۴) = ۳۶۰$

پ) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$۲ \times ۳ \times ۴ \times ۳$

ت) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

جابه‌جایی کُلی $\boxed{\text{گ یا ل}}$ و $\boxed{\text{پیرا}}$

$۴! \times ۲ \times ۲ = ۹۶$

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: ترکیب

فعالیت

۱ همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ تعداد $۶۰ = \frac{۵!}{(۵-۳)!}$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از :

۳۴۵	۲۴۵	۲۳۵	۲۳۴	۱۴۵	۱۳۵	۱۳۴	۱۲۵	۱۲۴	۱۲۳
۳۵۴	۲۵۴	۲۵۳	۲۴۳	۱۵۴	۱۵۳	۱۴۳	۱۵۲	۱۴۲	۱۳۲
۴۳۵	۴۲۵	۳۲۵	۳۲۴	۴۱۵	۳۱۵	۳۱۴	۲۱۵	۲۱۴	۲۱۳
۴۵۳	۴۵۲	۳۵۲	۳۴۲	۴۵۱	۳۵۱	۳۴۱	۲۵۱	۲۴۱	۲۳۱
۵۳۴	۵۲۴	۵۲۳	۴۲۳	۵۱۴	۵۱۳	۴۱۳	۵۱۲	۴۱۲	۳۱۲
۵۴۳	۵۴۲	۵۳۲	۴۳۲	۵۴۱	۵۳۱	۴۳۱	۵۲۱	۴۲۱	۳۲۱

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

عددهای موجود در هر ستون دارای رقم های یکسانی هستند و فقط جایگشت های مختلف ارقام صورت گرفته است.

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضویِ مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را بنویسیم؟
این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

کافیست ارقام استفاده شده در هر ستون را به عنوان یک زیر مجموعه ی A انتخاب کنیم. بنابراین ده زیر مجموعه ی سه عضوی وجود دارد.

$\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۴\},\{۱,۲,۵\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۳,۵\},\{۱,۴,۵\},\{۲,۳,۴\},\{۲,۳,۵\},\{۲,۴,۵\},\{۳,۴,۵\}$

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

در فعالیت (۱) ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم بود ولی در فعالیت (۲) ترتیب قرار گرفتن ارقام اهمیتی نداشت.

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعهٔ سه عضوی از فعالیت ۲ را به‌دست می‌دهد؟ یک زیر مجموعه

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ ۶

این عدد را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

هر سه عضو از اعضای زیر مجموعه را به $۶ = ۳!$ طریق می توان در ترتیب های مختلف نوشت و اعداد متفاوتی ساخت.

نتیجه : همان‌طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرارگرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینشِ هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از مجموعهٔ A را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعهٔ ۳ عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو موردنظر اهمیت دارد.

ازطرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با : $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر است با :

$$\frac{P(n,r)}{r!}$$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به‌عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء میگوییم.
تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (0\le r\le n)$$

مثال

از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل :

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های چهارتایی از شش شیء متمایز؛ یعنی $P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=360$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با :

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{(6-4)!4!}=15$$

مثال

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر :

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیتهٔ ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

غلامرضا تختی، قهرمان جهان

علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین‌وزن جهان

حل :

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با :

$$\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۵!۴!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times\cancel{۵}!}{\cancel{۵}!\times۴\times۳\times۲\times۱}=۱۲۶$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با : $\binom{۴}{۱}=۴$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با :

$$۴\times۳\times۲=۲۴$$

پ) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با : $\binom{۴}{۲}=۶$. حال ۳ داور دیگر باید از بین ۵ داورِ غیرایرانی انتخاب شوند که به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد روش‌های انجام کار برابر است با :

$$۶\times۱۰=۶۰$$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی‌که داوران ایرانی ۳ نفر باشند، این داوران به $\binom{۴}{۳}=۴$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفرِ دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به $\binom{۵}{۲}=۱۰$ طریق می‌تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب $۴\times۱۰=۴۰$ روش وجود دارد.

در حالتی‌که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به $\binom{۴}{۴}=۱$ روش صورت می‌گیرد و یک داورِ دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به $\binom{۵}{۱}=۵$ طریق می‌تواند صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت $۱\times۵=۵$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $۴۰+۵=۴۵$.

ث) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با : $\binom{۴}{۳}=۴$، تعداد روش‌های انتخاب ۲ داور ژاپنی برابر است با : $\binom{۳}{۲}=۳$ و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با : $\binom{۲}{۲}=۱$ لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با : $۴\times۳\times۱=۱۲$.

ج) می‌دانیم تعداد کل کمیته‌های ۵ نفره که می‌توان انتخاب کرد، برابر است با $\binom{۹}{۵}=۱۲۶$.

از طرفی این کمیته‌های ۵ نفره به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند :

دستهٔ اول : حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دستهٔ دوم : هیچ داور ایرانی در آنها نیست.

جمع افراد این دو دسته برابر ۱۲۶ می شود و از آنجا که محاسبهٔ دستهٔ دوم آسان‌تراست، کافی است تعداد دستهٔ دوم را محاسبه کنیم و از ۱۲۶ کم کنیم.

اما تعداد افراد دستهٔ دوم برابر $\binom{۵}{۵}=۱$ است. چرا؟

با توجه به اینکه می‌خواهیم داور ایرانی درون آن نباشد، هر ۵ نفر را از ۵ نفر داور ژاپنی و روسی انتخاب می‌کنیم

لذا تعداد افراد دستهٔ اول برابر است با : ۱۲۵= ۱−۱۲۶

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی). ترتیب مهم است.

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز. ترتیب مهم نیست

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند. ترتیب مهم است

توجه: به نظر بنده حقیر بهتر بود متن قسمت (پ) به صورت زیر نوشته می‌شد، تا خالی از هرگونه ابهام باشد:

انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط، به ترتیب گفته شده، از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. ترتیب مهم نیست

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. ترتیب مهم نیست

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود. ترتیب مهم است

۲ در هر کدام از موارد «کاردرکلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده‌کردن جواب نیست)

الف) $P(۵,۳)$ ب) $\binom{۵}{۳}$ پ) $P(۷,۳)$

ت) $\binom{۷}{۳}$ ث) $\binom{۱۰}{۳}$ ج) $P(۱۰,۳)$

۳ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه :

الف) کمیتهٔ ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۸}{۲}=۱۰\times۱۵\times۲۸=۴۲۰۰$

ب) کمیتهٔ ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۸}{۱}=۵\times۶\times۸=۲۴۰$

پ) کمیتهٔ ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟ $\binom{۸}{۱}\times\binom{۱۱}{۱}+\binom{۸}{۲}=۸۸+۲۸=۱۱۶$

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیتهٔ دو نفره انتخاب شود، به‌گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چندحالت برای انجام این‌کار وجود دارد؟

به‌جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.

محمد : از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشتهٔ سوم کسی انتخاب نشود؛ لذا سه حالت زیر را می‌توان درنظر گرفت :

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{0}=2\times2\times1=4$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{1}=2\times1\times2=4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=1\times2\times2=4$$

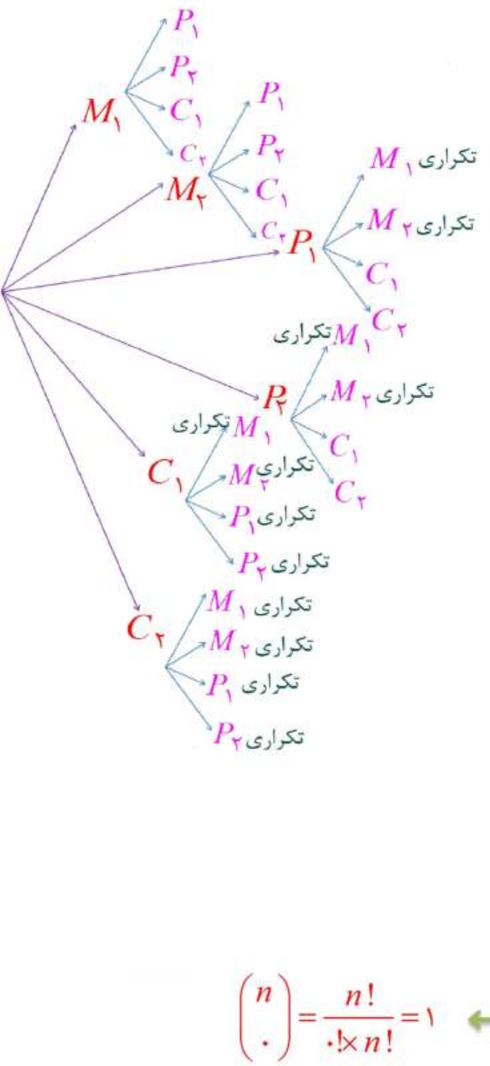
پس در کل $4+4+4=12$ حالت امکان دارد.

پژمان : می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به $\binom{3}{2}$ راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشتهٔ انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب کرد؛ لذا جواب برابر است با : $\binom{3}{2}\times2\times2=12$.

حمید : ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن‌را حل کرد.
اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشتهٔ او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر $6\times4=24$ حالت است.

ــ دو نفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2 ، و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.



پاسخ حمید با توجه به نمودار درختی روبرو غلط می باشد .

فعالیت

۱ می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های rتایی از یک مجموعهٔ n عضوی است.
حال $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{1}$ را یک‌بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ ، و یک‌بار با فرمول، به‌دست آورید.

هر مجموعه n عضوی دارای یک زیر مجموعه ی هیچ عضوی به نام تهی است بنابراین: $\binom{n}{0}=1$ اثبات به کمک فرمول $\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\times n!}=1$

هر مجموعه ی n عضوی دارای n زیر مجموعه ی یک عضوی است بنابراین: $\binom{n}{1}=n$ اثبات به کمک فرمول $\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\times(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{1\times(n-1)!}=n$

۲ الف) یک مربی قصددارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ ۱۰ حالت امکان پذیر است.
با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

به زمین نمی‌روند	به زمین می‌روند
۴,۵	۱,۲,۳
۳,۵	۱,۲,۴
۴و۳	۵و۲و۱
۵و۲	۴و۳و۱
۴و۲	۵و۳و۱
۳و۲	۵و۴و۱
۵و۱	۴و۳و۲
۴و۱	۵و۳و۲
۳و۱	۵و۴و۲
۲و۱	۵و۴و۳

ب) این‌بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟
جواب، بر عکس حالت (الف)، ستون سمت راست می باشد، بنابراین در این مورد نیز ۱۰ انتخاب دارد

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟
این دو انتخاب با هم برابرند زیرا تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر به این معناست که ۲ نفر از ۵ نفر انتخاب نشوند.

ت) درستی تساوی $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ را یک‌بار با استفاده از توجیه بالا و یک‌بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.
تعداد انتخاب r نفر از n نفر به این معناست که بقیه (یعنی $n-r$ نفر) را انتخاب نکنیم پس $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

اثبات به کمک فرمول: $\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{r!\times(n-(n-r))!}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}=\binom{n}{r}$

۳ جاهای خالی را پر کنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{۲۶}{۵}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با: $\binom{۲۵}{۴}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{۲۵}{۵}$

ت) بنابراین: $\binom{۲۵}{۵}+\binom{۲۵}{۴}=\binom{۲۶}{۵}$

۴ فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و a یکی ازاعضای آن باشد. $(a\in A)$

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ A برابر است با: $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r-۱}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r}$

ت) بنابراین: $\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}=\binom{n}{r}$

تمرین

۱ یک فروشندهٔ تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمهٔ کدو، تخمهٔ ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

$$\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=۲۱+۷+۱=۲۹$$

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

الف) $\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۴}{۳}=۱\times۳\times۳۶۴=۱۰۹۲$

ب) $\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۱}{۲}=۱\times۳\times۳\times۵۵=۴۹۵$

پ) $\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۹}{۱}=۱\times۳\times۳\times۲\times۹=۱۶۲$

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشد بنابراین:

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n(n-۱)=۵۶=۸\times۷\Rightarrow n=۸$$

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}=۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۵۸۲$$

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$۴+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ ها یکسان نباشد به طور مثل یکبار ۵۰٪ از یک رنگ و ۵۰٪ از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰٪ از یکی و ۴۰٪ از دیگری استفاده شود و در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

۶ هفت نقطهٔ A وB و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{۷}{۳}=۳۵$$

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟ $\binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقیمانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

$\binom{۸}{۱} =$ تعداد حالات وجود دو ادویه با هم

تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده نشوند = تعداد کل حالات - تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده می‌شوند = $\binom{۱۰}{۳} - \binom{۸}{۱} = ۱۲۰ - ۸ = ۱۱۲$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

تعداد حالاتی که هر سه نباید استفاده شوند = تعداد کل حالات - تعداد حالاتی که هر سه استفاده شده = $\binom{۱۰}{۳} - \binom{۳}{۳} = ۱۲۰ - ۱ = ۱۱۹$

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

هر سه ادویه باید از دسته‌ی اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته‌ی دوم انتخاب شوند. بنابراین: $\binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۱۰ + ۱۰ = ۲۰$

۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

الف) $\binom{۶}{۲} \times \binom{۵}{۳}$ مسئله: به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۶ زن، ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۳ زن و ۲ مرد وجود داشته باشد؟

ب) $\binom{۶}{۲} + \binom{۵}{۳}$ مسئله: احسان می‌خواهد با پول های قلکش ۲ مداد یا ۳ پاک کن (فقط یکی از این دو نوع) را خریداری کند. اگر در مغازه‌ی لوازم التحریر فروشی فقط ۶ نوع مداد و ۵ نوع پاک کن موجود باشد، احسان چند انتخاب برای خرید دارد؟


اشترانکوه، لرستان