



توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشت خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و بروهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر معبد کاظمی آستانی و گروهی از بروهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشگاه پزشکی تولید مثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه II ام

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $2 = \sqrt[3]{8} = 2^{\frac{1}{3}}$ ؛ همچنین $8 = 2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. علامت \Rightarrow این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به‌طور خلاصه با علامت \Leftrightarrow نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$.

فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$\begin{array}{ll} (-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \\ (-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5 & \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt[2]{5})^2 = 50 \\ 2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2 & \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8 \\ 11^2 = 121 \Leftrightarrow \sqrt{121} = 11 & \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow 10^2 = 100 \\ (0/25)^3 = 0/625 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0/625} = 0/25 & \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (4\sqrt{3})^2 = 48 \\ (0/5)^3 = 0/25 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0/25} = 0/5 & \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2 = 45 \end{array}$$

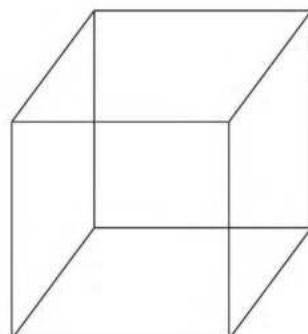
۲ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷	۱۲۵	-۱۰۰۰	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	-۳	۵	-۱۰	۱۵	۱۰	۹

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶



احمد: چون $3^3 = 27$ و
 $2 < \sqrt[3]{25} < 3$, پس $\sqrt[3]{25}$ بهتر است $\frac{2}{9}$ را امتحان کنم
 $(\frac{2}{9})^3 = (\frac{2}{9})^2 \times \frac{2}{9}$
 $= \frac{4}{81} \times \frac{2}{9}$
 $= \frac{8}{729}$



محسن: 25 به 27 تزدیک‌تر است
 تا 8 , پس بهتر است عدد $\frac{2}{9}$ را
 امتحان کنم.
 $(\frac{2}{9})^3 = (\frac{2}{9})^2 \times \frac{2}{9}$
 $= \frac{4}{81} \times \frac{2}{9}$
 $= \frac{8}{729}$



دو داش آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های رو به رو به دست آورده‌اند:
 روش‌های این دو داش آموز را توضیح دهید.

دبیر: ریشه سوم 25 تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به صورت تقریبی آن را برابر $\frac{2}{9}$ بگیریم.
 $\sqrt[3]{25} \approx \frac{2}{9}$

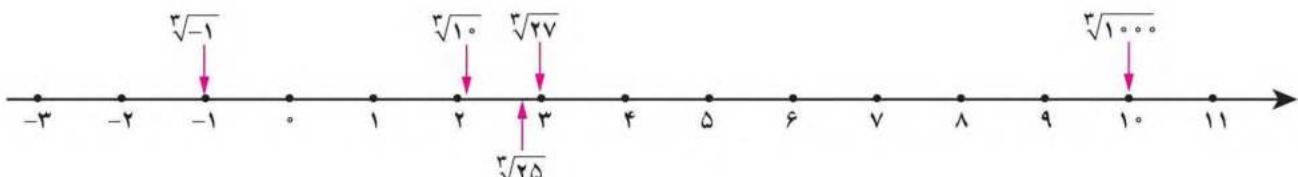
احمد: مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دبیر: $\sqrt[3]{25}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می‌کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم 25 حاصل می‌شود.

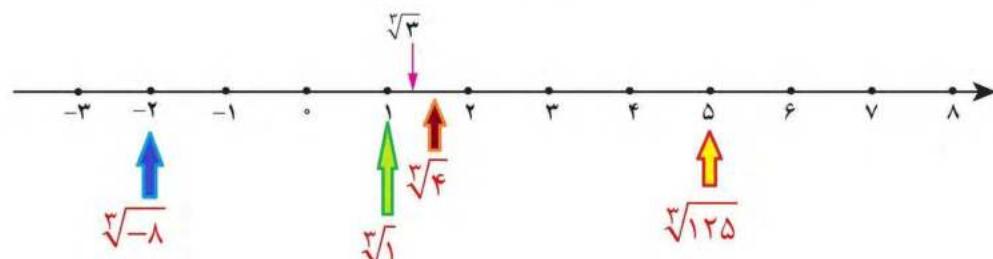
$\sqrt[3]{25}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشه سوم 25 به کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9}24$ و $\frac{2}{9}22$ کار می‌کنیم.

ریشه عددها را می‌توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



۱) مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} = 1 \quad \sqrt[3]{3} = 1/4 \quad \sqrt[3]{4} = 1/587 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$



۲ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متولی است :

الف) چون $36 < 30 < 25$ پس $\sqrt{30} < 5$. همچنین چون $8 < 5 < 2$ پس $\sqrt[3]{5} < 1$.

$$9 < 10 < 16 \Rightarrow \boxed{3} < \sqrt{10} < \boxed{4}$$

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \boxed{2} < \sqrt{7} < \boxed{3}$$

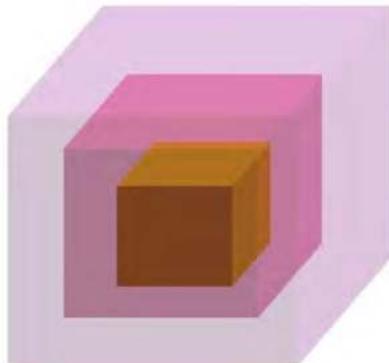
$$8 < 20 < 27 \Rightarrow \boxed{2} < \sqrt[3]{20} < \boxed{3}$$

$$-27 < -17 < -8 \Rightarrow \boxed{-3} < \sqrt[3]{-17} < \boxed{-2}$$

زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

$$\text{ب) } \begin{array}{c} \sqrt[3]{9} < 10 < \sqrt{27} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{پدرکت از } 229 \quad \text{پدرکت از } 1000 \end{array}$$

$$\text{الف) } \begin{array}{c} \sqrt{4} < 5 < \sqrt{25} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{پدرکت از } 16 \quad \text{پدرکت از } 25 \end{array}$$



سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ است و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید).

طول ضلع مکعب بیرونی ۴ و طول ضلع مکعب داخلی ۳ می‌باشد. پنایداین طول ضلع مکعب میانی می‌تواند هر یک از اعداد پین ۳ و ۴ باشد. به طور مثال می‌تواند $3/4$ یا $4/3$ باشد.

فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هرتساویٰ توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

$$\begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ (-2)^4 = 16 \end{array} \Rightarrow \text{ریشه‌های چهارم} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 16 \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5^4 = 625 \\ (-5)^4 = 625 \end{array} \Rightarrow \text{ریشه‌های چهارم} \rightarrow \begin{array}{c} 5 \\ 625 \\ -5 \end{array}$$

$\sqrt[4]{625}$ عددی مثبت و برابر است با ریشهٔ چهارم مثبت عدد 625 ; یعنی $\sqrt[4]{625} = 5$. همچنین $\sqrt[4]{625}$ عددی منفی است و برابر است با ریشهٔ چهارم منفی عدد 625 ; یعنی $\sqrt[4]{625} = -5$.

آیا -16 - ریشهٔ چهارم دارد؟ **خیر** آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان 4 برسد، برابر 16 - شود؟ **خیر** اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای **دو** ریشهٔ چهارم است که **قرينه‌ي** یکدیگرند.
عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

صفر فقط یک ریشهٔ چهارم دارد و آن هم خود صفر می‌باشد.

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰۰۰۰۰	۲۱۲۵	۸۱
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	$\sqrt[4]{100}$
					$\sqrt[4]{2125}$
					$\sqrt[4]{81}$

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۰۰۰۰۰	۱۹	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{19}$	۴

۱ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟ (۱۰۰۰۰۰ و -۱)

۱ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{32} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{-10000032} = -0/2$$

۱ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن منفی است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5$$

$$-6 < -\sqrt{35} < -5$$

$$8 < \sqrt{75} < 9$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

$$-5 < \sqrt[3]{-90} < -4$$

$$6 < \sqrt[3]{250} < 7$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$-3 < -\sqrt[4]{20} < -2$$

$$-4 < -\sqrt[4]{120} < -3$$

$$4 < \sqrt[4]{400} < 5$$

$$\sqrt[5]{1} = 1$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$3 < \sqrt[5]{400} < 4$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10} = 3/1$$

$$\sqrt[5]{25} = 2/9$$

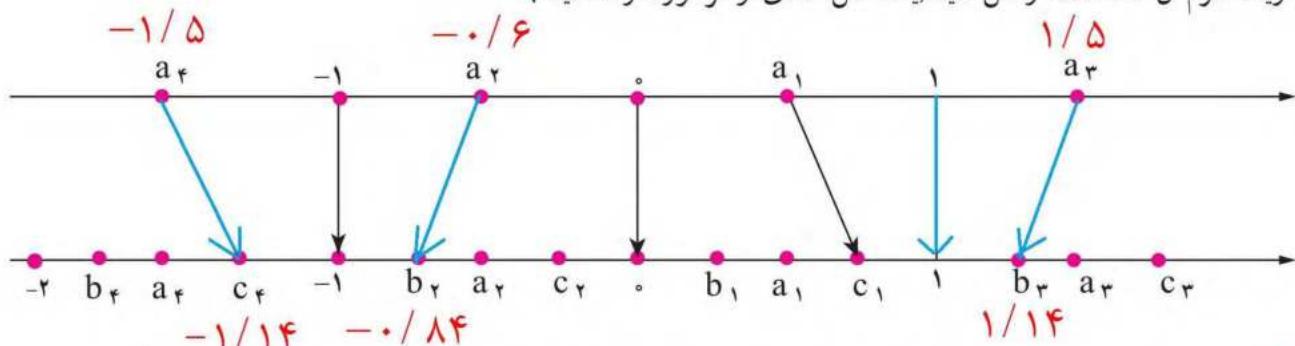
$$\sqrt[3]{7/25} = 1/9$$

$$\sqrt[5]{16} = 1/7$$

$$\sqrt[5]{64} = 2/2$$

$$\sqrt[4]{90} = 3/0$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $a > \sqrt[3]{a}$. چه عددی می‌تواند باشد؟ می‌تواند هر عددی بین صفر و یک باشد.

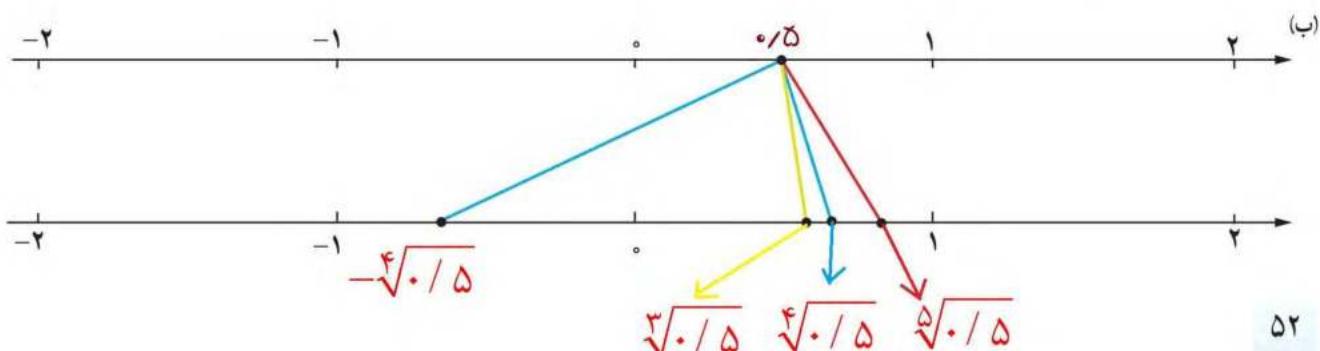
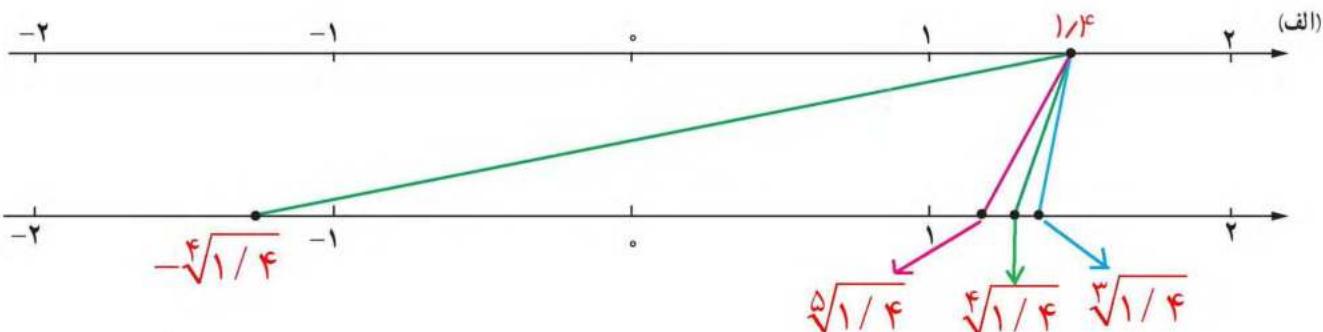
ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (یا صفردیا)

پ) a عددی مثبت است و $a < \sqrt[3]{a}$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟ حتماً عددی پر رگتار یک متواءد پود

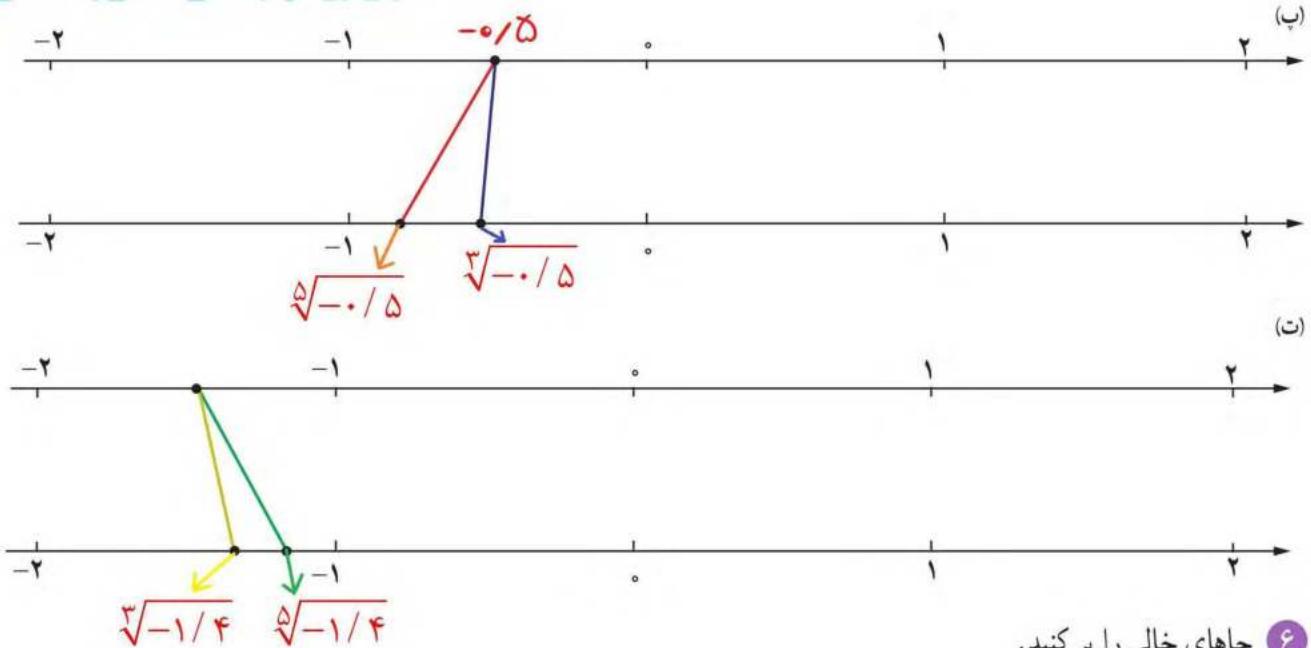
ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

در حالت الف: حتماً آن عدد کمتر از (-1) است. در حالت پ: حتماً آن عدد بین (-1) و صفر است.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



درس اول: مجموعه های متقارن و متماثل



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد 3 و $\dots \sqrt[3]{16}$... ریشه های چهارم عدد $\dots \sqrt[4]{16151}$... می باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[3]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5 = 8 + 5 = 13$ را بیابید.

۷ می دانیم $\sqrt[5]{16151} = 11$ ، $\sqrt[7]{170000} = 11$ و $\sqrt[11]{12} = 11$ و $\sqrt[12]{11} = 11$ واقع است.

۸ در جاهای خالی یکی از علامت های « $<$ »، « $>$ » یا « $=$ » را قرار دهید.

$$(-\sqrt{1})^5 > (-\sqrt{1})^3$$

$$(\sqrt{1})^5 < (\sqrt{1})^3$$

$$\sqrt[25]{2} > 2$$

$$(-\sqrt{2})^5 < (-\sqrt{2})^3$$

$$(-\sqrt{2})^5 < (-\sqrt{2})^3$$

$$\sqrt[5]{0.00001} = 0.1$$

۹ قرار دهید $\boxed{} = \sqrt[5]{a}$. اگرnon با توجه به تعریف مشخص کنید $\boxed{}$ برابر چه عددی است؟ a بنا بر این داریم $\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a}$ در برابر $\sqrt[5]{a}$ چه می توان گفت؟ $\boxed{}$ برابر a است.



خواندنی

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت های بدن است. هر بافت سلول های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می تواند به سلول های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول های بدن را دارد. دانشمندان می گویند این سلول ها می توانند امکان معالجه بیماری های را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست شناسی و پژوهشی است. این سلول ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می شود. پیشرفت در زمینه سلول های بنیادی تنها ممکن بر علم پژوهشی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول های بنیادی پیشرفت های چشمگیری داشته اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می شود.



درس دوم: ریشه n ام

فعالیت

- ۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می توان برای ریشه های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه های دوم	ریشه سوم	ریشه های چهارم	ریشه پنجم	ریشه های ششم	ریشه هفتم	ریشه های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[4]{64} = \sqrt{2^2} = 2$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$	$\sqrt[7]{64} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$\sqrt[8]{64} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$
				$\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$	$\sqrt[7]{64} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$\sqrt[8]{64} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

ریشه های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ - یا همان 2 و -2 ... هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$.

درباره ریشه های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می توانید بگویید؟ دارای یک ریشه ای هفتم و دو ریشه ای هشتم است.

به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه n ام عدد ۶۴ چه می توان گفت؟

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ای مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه منفی است که با هم قرینه اند.

در حالت کلی تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه های n ام a چه می توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ گوییم :

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ای مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ای مثبت است که با هم قرینه اند و منفی

۲ جدول زیر را که درباره ریشه های مختلف عدد ۶۴ - است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد

ریشه های زوج ۶۴ - وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان عددی زوج برسد و مساوی ۶۴ - شود.

درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$ - ۶۴) بحث کنید. اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه n ام a چه می توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ - گوییم :

اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم. هرگاه :

جدول زیر را کامل کنید.

$a > 0$	زوج n	دارای دو ریشه ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	۸۱ دارای دو ریشه چهارم $= \sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	فرد n	دارای یک ریشه ام $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = 27$ $n = 3$	۲۷ دارای یک ریشه ای سوم $= \sqrt[3]{27} = 3$ است.
$a < 0$	زوج n	ریشه n ام وجود ندارد	$a = -1$ $n = 2$	پرای ۱- ریشه ای دوم وجود ندارد.
	فرد n	دارای یک ریشه ای $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = -32$ $n = 5$	-۳۲ دارای یک ریشه ای پنجم $= \sqrt[5]{-32} = -2$ است.

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\sqrt[5]{125} = 5$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{128} = 2$$

$$\sqrt[5]{256} = 2$$

$$\sqrt[9]{-1} = -1$$

$$\sqrt[4]{625} = 5$$

$$\sqrt[4]{16} = -2$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2$$

$$\sqrt[3]{-0.1001} = -0.1$$

$$-\sqrt{1} = -1$$

$$\sqrt[6]{0} = 0$$

۱) الف) می دانید که $x^2 = \sqrt{x^2}$ درباره $\sqrt[x^4]{x^4} = |x|$ چه حدسی می زنید؟ درستی حدس خود را درباره چند عدد آزمایش کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \\ |-2| = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2|$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{(3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3 \\ |3| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{(3)^4} = |3|$$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 \quad \text{غلط}$$

$$\sqrt[5]{35} = 3 \quad \text{صحیح}$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = -2 \quad \text{غلط}$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = 3 \quad \text{صحیح}$$

$$\sqrt[5]{(-3)^5} = -3 \quad \text{صحیح}$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = 2 \quad \text{صحیح}$$

پ) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$.

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4} \neq (\sqrt[4]{-2})^4$$

وجود ندارد

ث) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟ اگر a عددی مثبت باشد، پرای هر عدد طبیعی n تساوی پرقدار است، (اما

در صورتی که a عددی منفی باشد، فقط به ازای n های طبیعی فرد، تساوی پرقدار است.

فعالیت

در سال نهم دیدید که :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} : b$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} : a$$

آیا رابطه بالا درباره $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}$ نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید. پله در صورتی که هر دو عدد نامنفی باشند، تساوی پرقدار است.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = 6 \\ \sqrt[4]{16 \times 81} = \sqrt[4]{1296} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \times 81}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b ... نامنفی... باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots \quad \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{1296} = 6$$

درباره $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ چه می‌توان گفت؟ در این مورد نیز تساوی پدیده است.

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ **خیر لازم نیست**

مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = 2 \times 3 = 6 \\ \sqrt[5]{32 \times 243} = \sqrt[5]{7776} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{32 \times 243}$$

به طور کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & \text{زوج } n \\ \sqrt[n]{ab} & \text{دلخواه } n \end{cases} \quad a, b > 0$$

قرارداد : به طور کلی این قرارداد را اعمال می کنیم :

وقتی می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می کیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عده‌های منفی بی معنا هستند. پس هرگاه \sqrt{x} نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x \geq 0$ است. تساوی‌های فوق را می‌توان به صورت مقابله نمایش داد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[3]{2^5}$$

۱ آیا $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5$ و $\sqrt[3]{2^5}$ با هم برابرند؟ پله باهم پدیدهند. زیرا:

درباره $\sqrt[4]{(-2)^4}$ و $(\sqrt[4]{-2})^4$ چه می‌توان گفت؟

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2 \quad \text{تعريف نشده است. ولی: } \sqrt[4]{\sqrt{-2}}^4$$

۱

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2}$$

$$= \sqrt[5]{2^3}$$

درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقداردهی های مختلف به m, k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$$(\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$(\sqrt[5]{y})^4 = \sqrt[5]{y} \times \sqrt[5]{y} \times \sqrt[5]{y} \times \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{y \times y \times y \times y} = \sqrt[5]{y^4}$$

$$(\sqrt[3]{-r})^r \equiv \sqrt[3]{-r} \times \sqrt[3]{-r} \times \dots \times \sqrt[3]{-r} \equiv \sqrt[3]{(-r)(-r)(-r)\dots(-r)} \equiv \sqrt[3]{(-r)^r}$$

$$(\sqrt[5]{-r})^4 = \sqrt[5]{-r} \times \sqrt[5]{-r} \times \sqrt[5]{-r} \times \sqrt[5]{-r} = \sqrt[5]{(-r)(-r)(-r)(-r)} = \sqrt[5]{(-r)^4}$$

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

		$a > 0$	$n = 4$ $a = 2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ $(2 = \pm)$
$\sqrt[n]{a^n}$	زوج	$a < 0$	$n = 4$ $a = -2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ $(2 = -2)$
		$a > 0$	$n = 3$ $a = 2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
	فرد	$a < 0$	$n = 3$ $a = -2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟
در صورتی که n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است. اما اگر n زوج باشد است.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

		$a > 0$	$n = 4$ $a = 16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
$(\sqrt[n]{a})^n$	زوج	$a < 0$	$n = 4$ $a = -16$	تعريف شده $\rightarrow (\sqrt[4]{-16})^4$
		$a > 0$	$n = 3$ $a = 8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$
	فرد	$a < 0$	$n = 3$ $a = -8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟ همواره $(\sqrt[n]{a})^n = a$ است، فقط در حالتی که n زوج است، a نمی‌تواند منفی باشد.

تمرین

۱) الف) یکی از علامت‌های \triangleleft یا \triangleright را در \square قرار دهد.

$$(\sqrt[5]{5})^3 \boxed{\triangleleft} (\sqrt[5]{5})^3$$

$$\sqrt[5]{1/25} \boxed{\triangleleft} \sqrt[5]{1/25} \quad \text{اصلح شد په ۰/۲۵} \quad \leftarrow$$

ب) وقتی $a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در \square قرار دهد.

$$a^4 \boxed{\triangleleft} a^5$$

$$\sqrt{a} \boxed{\triangleleft} \sqrt[3]{a}$$

۲) فرض کنیم $a = -1$ است، در \square علامت مناسب را قرار دهد.

$$\sqrt[n]{a} \boxed{=} \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \boxed{=} \sqrt[n+1]{a}$$

$$a^4 \boxed{\triangleleft} a^5$$

$$a^4 \boxed{=} a^5$$

۳) با توجه به تعریف ریشه (اگر $b^n = a$ آنگاه $\sqrt[n]{a} = b$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال)

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = b^n = a \quad \text{رابطه زیر برقرار است:}$$

۴) آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴، ۳ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدھید.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{8}} = 1+2=3 \\ \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{9} = 2/0.8 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{8}} \neq \sqrt[4]{1+8}$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{-1+\sqrt[4]{-32}} = -1+(-2)=-3 \\ \sqrt[4]{-1+(-32)} = \sqrt[4]{-33} = -2/0.1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{-1+\sqrt[4]{-32}} \neq \sqrt[4]{-1+(-32)}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[5]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

۵) عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow \sqrt[5]{2^{-5}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{3^{-4}} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}$$

۶) به جای a و b و عدد طبیعی n عدهایی قرار دهید؛ به طوری که :

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

منفی

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. وقتی n زوج است، a و b هر دو منفی (اند).

است در حالی که $\sqrt[4]{\frac{-16}{-81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{-2}{-3}\right)^4} = \frac{2}{3}$ تعریف نشده است.

درس سوم: توان های گویا

فعالیت



پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت n ام برابر 2^n گرم می‌شود:

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

محمد از پدرش برسید: «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت: حدس می‌زنم وزن آنها $\frac{1}{2}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.

پدرش گفت: $\frac{1}{2}$ چقدر است؟

محمد گفت: نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^2$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $2 = b^2$ ؛ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجه جالبی است! $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف

کنیم: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}, \dots$ ؛ همچنین برای عدددهای دیگر $\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$. می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $2 \geq n$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < 0$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $\frac{1}{(-1)}$ و $\frac{1}{(-2)}$ تعریف نمی‌شوند.

فعالیت

۱) توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\frac{1}{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{1}{3^2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{4}$$

$$\frac{1}{5^7} = \sqrt[7]{5}$$

$$\frac{1}{5^2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{(-3)^5} = \sqrt[5]{(-3)}$$

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[6]{6}$$

$$\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{81}$$

$$\frac{1}{(-5)^4} = \sqrt[4]{(-5)}$$

کدام درست است؟

غلط $a^{-2} = -\frac{1}{(2^3)^5} = -2^{\frac{1}{5}}$ (الف)

صحیح $a^{-2} = \sqrt{-32} = -\sqrt{32}$ (ب)

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نمایه‌ای طبیعی یادداشتم هست چگونه عمل کردیم؟

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

(قاعده ضرب توان)

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{7}{3}} = 2^{\frac{2 \times 1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$5^{\frac{8}{3}} = 5^{\frac{8 \times 1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی:

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ را برای

چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

پ) $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$

پ) $\sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}}$

الف) $\sqrt[5]{5^2} = 5^{\frac{2}{5}}$

ج) $\sqrt[3]{(-3)^2} = (-3)^{\frac{2}{3}}$ تعریف نشده

ث) $\sqrt[7]{16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{1}{4}} = (-6)^{\frac{2}{7}}$ تعریف نشده

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > 0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداقل رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، تعدادی از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملأ چنین اتفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهد بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^3} \times 3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^3}} \times \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{3}{\sqrt[2]{2}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{13}{12} = 2^{+1} = 2^2 \times 2^{-1} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4^{\frac{1}{4}}} = 4 \times \sqrt[4]{4} = 4\sqrt[4]{4^2}$$

$$\sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{4^2 \times 4^2} = \sqrt[4]{4^4} \times \sqrt[4]{4^2} = 4\sqrt[4]{4^2}$$

روش ۲۹

$\frac{1}{3}$

$$(4 \times 2)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$$

$$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[5]{5^3} = 5^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{5^{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}} = 5^{\frac{3}{5}} = 5$$

رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}}$$

$$\sqrt[2]{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[5]{2^6} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2^1$$

جدول‌های زیر را کامل کنید:

$a > 0$	a^3	a^{-3}	a^*	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = 0$	0^3	$\frac{1}{0^3}$	0^*	$0^{\frac{1}{2}}$	$0^{\frac{2}{3}}$
$a < 0$	a^3	a^{-3}	a^*	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = -1$	$(-1)^3$	$\frac{1}{(-1)^3}$	$(-1)^*$	$(-1)^{\frac{1}{2}}$ تعریف نمی‌شود	$(-1)^{\frac{2}{3}} = 1$

فعالیت

با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[n]{a^m} = m\sqrt[n]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a > 0$).

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n} \cdot n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = m\sqrt[n]{a}$$

دیگر: به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81} = 3$

به علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باشد a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به دست آورید.

نسترن: اگر جای توانها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دیگر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}} \right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دیگر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمدیده: بهتر است اول $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$$

دیگر : آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می توانید، همان گونه که قبل اگفتم چون 4 عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$$

با توجه به فعالیت ۱ در صفحه قبل تساوی ها را کامل کنید.

$$(5^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

الف)

$$(4^2)^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{4})^2 = \sqrt[5]{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

ب)

پ) اکنون برای هر عدد $a > 0$ ، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s = a^{rs}$ را برای $r = \frac{1}{4}$ و $s = \frac{1}{2}$ تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}$$

تمرین

۱ هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{lllll} 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} & \frac{1}{3^3} \times \frac{2}{2^3} = \frac{2}{3^2} = \sqrt[3]{2^2} & 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} & 4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3} & (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \\ a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2} & \frac{1}{3^2} = \sqrt{3} & 32^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} & 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^2} & 17^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}} & 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} \end{array}$$

۲ هر یک از رادیکال ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه عدد مثبت باشد.

در این تمرین پا فرض مثبت پوزد
پاسخ ها نوشته شده اند.

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

می دانیم

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[8]{2^3}$ برابر باشند.

بله این تساوی برای اعداد مثبت a همواره برقرار است.

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^{3 \times 1}} = \sqrt[4]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{2^{2 \times 1}} = \sqrt[4]{2^1} = \sqrt{2}$$

۳ فرض کنیم $a = 64$ و $r = \frac{1}{2}$ و $s = \frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2 \\ a^{r-s} = 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{729^{\frac{1}{2}}}{729^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{729}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{27}{9} = 3 \\ a^{r-s} = 729^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{1024^{\frac{1}{2}}}{1024^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{1024}}{\sqrt[5]{1024}} = \frac{32}{4} = 8 \\ a^{r-s} = 1024^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} = 1024^{\frac{1}{10}} = (2^10)^{\frac{1}{10}} = 2^1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

۴ حساب کنید.

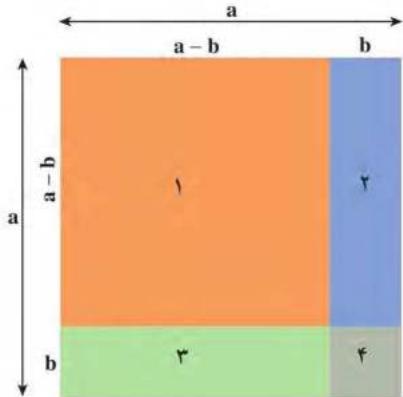
$$\sqrt[5]{\sqrt{5}} = \sqrt[5]{5}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{9} = 3$$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

فعالیت



$$\begin{aligned} S_1 &= (a-b)^2 \\ S_1 &= S - S_r - S_r - S_r \\ &= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2 \\ \left(\frac{16}{5}\right)^2 &= \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25} \\ \text{يا اگر در رابطه (1) به جاي } b-a-b-\text{قرار دهيم، به دست مي آوريم:} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

گاهی هم دو اتحاد (1) و (2) را با هم می نویسیم :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می توانيد اتحادهای دیگری به دست آورید.

با محاسبه $(a+b)^2$ اتحاد دیگری به دست می آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است.
جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{2a^2b} + \underline{2ab^2} + ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ - تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم :

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} - b^3$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \\ = (a^3 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - \underline{a^2b} - \underline{2ab^2} + \underline{ab^3} - b^3$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلًاً

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارتهای $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارتهای جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های پیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 2ab + b^3$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2bc + 2ca$$

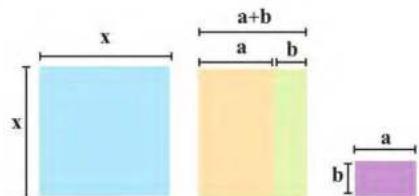
$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال ۱

عبارت $2x^3 + 3x^2 + x$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم :

$$2x^3 + 3x^2 + x = x^3 + 2x^2 + x^2 + x \\ = (x+1)^2 + x(x+1) \\ = (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1)$$



مثال ۲

عبارت $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^3$ را تجزیه کنید :

$$a^3 - 2ab + a^2b - 2b^3 = a^3(a+b) - 2b(a+b) \\ = (a+b)(a^2 - 2b)$$

	a	b	c
a	a^3	ab	ac
b	ab	b^3	bc
c	ac	bc	c^3

در دریافت

حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + \cancel{a^2b} - \cancel{a^2b} + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

۱ با استفاده از پرسش ۱، عبارتهای $a^2 + b^2$ و $a^3 - b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

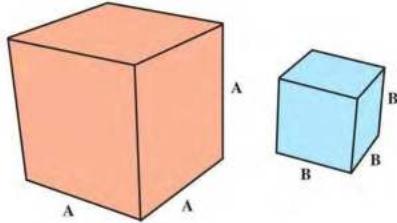
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

۱ عبارت‌های زیر را ماتنده نمونه تجزیه کنید.

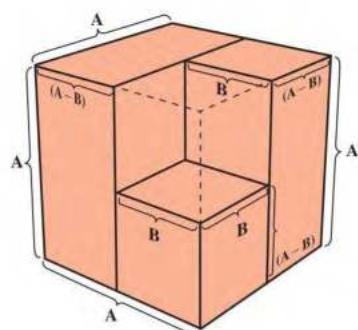
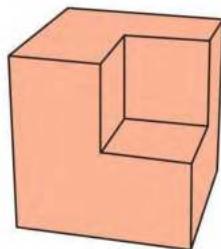
(اعدادهای پاچ و لاغر)

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



$$A^3 - B^3$$

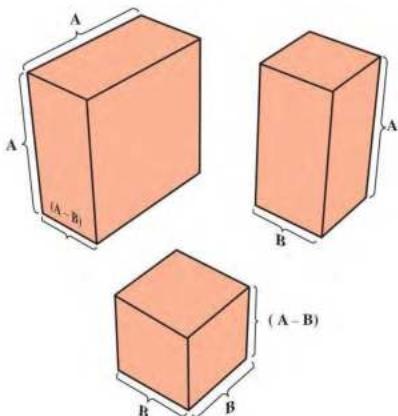


هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارنده عدد 12 و عدد 12 را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. 12 شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد 12 . عدد 3 مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد 3 و همچنین هر یک از عددهای $6, 9, 15, \dots$ مشابه این در اتحاد مزدوج $a^3 - b^3 = (a-b)(a+b)$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارنده $a^3 - b^3$ است. همچنین $a^3 - b^3$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است. آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آیند:

و $(a+b)(a-b)$ و $(a+b)^2$ و $(a+b)(a+b)$ و $a+b$: بعضی از مضرب‌های $a+b$ بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.



$$3(a-b), (a-b)(a^2 + ab + b^2), (a-b)(x + y - z), \dots$$

۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد. در این مورد می‌توان دو اتحاد را مثال زد:

$$\text{اتحاد چاق و لاغر: } (a-b)^3 - b^3 \quad \text{اتحاد درجیع دو چمله ای: } (a-b)^3$$

۳ عبارت $a^3 - 27a^2$ مضرب کدام یک از عبارت‌هایست؟

- الف) $a-1$ ب) $3a+1$ ت) $9a^2 + 3a + 1$ پ) $3a-1$ د) $a-1$

با توجه به تجزیه‌ی آن -طبق اتحاد چاق و لاغر- یعنی: $(3a-1)(9a^2 + 3a + 1)$

هر دو گزینه‌ی پ و پ صلحیح هستند.

نکته: عبارت $\sqrt[3]{(a+b)}$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

یادآوری: به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند. (ریاضی نهم صفحه ۱۴)

گزینه‌های الف و پ عبارت گویا هستند ولی گزینه‌های پ و پت گویا نیستند.

$$\text{ت) } \sqrt[3]{x^2} + x - 1 \quad \text{ب) } \sqrt[3]{x} - 1 \quad \text{ب) } \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \quad \text{الف) } \frac{3x - \sqrt{7}}{x^2}$$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x^3 = -4 \rightarrow x = \sqrt[3]{-4}$$

پنپاراین به ازای ۱ و ۰ تعریف نمی‌شود.

۶ حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2(\sqrt{x}-1)+3}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$$

عبارت $x - 1$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$\text{ب) } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$$

عبارت $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$= \frac{(x+1)(x^2+1) + (x-1)(x^2+1) - (x^2+1) + (x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2+x+\cancel{x^2+x^2+x^2}-1+\cancel{x^2}-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^2+2x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 - 1^3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^3 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + x + 1}{x^2-1}$$

ذار در کلاسها

۷ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

$$\text{الف) } \frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{\cancel{(x^2+1)}^4} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^7-1}{(x-1)^7} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^6+x^5+\dots+x+1)}{\cancel{(x-1)}^7} = \frac{x^6+x^5+\dots+x+1}{(x-1)^7}$$

$$\text{پ) } \frac{x^7+1}{x^4-1} = \frac{\cancel{x^4+1}}{\cancel{(x^2+1)(x^2-1)}} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{ت) } \frac{y^5-y}{y^5+y^4+y} = \frac{\cancel{y}(y^4-1)}{\cancel{y}(y^4+y+1)} = \frac{(y^4-1)(y^4+1)}{y^4+y+1} = \frac{\cancel{(y-1)}(y^4+y+1)(y^4+1)}{\cancel{y^4+y+1}} = (y-1)(y^4+1)$$

$$\text{پ) } \frac{y^5-y^3-12y}{8y^5+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{\cancel{y}(y-2)(y+2)(y^2+3)}{\cancel{8y}(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$$

در اتحاد $a^3-a+1=(a+1)(a^2-a+1)$ قرار دهد $\sqrt[3]{x^2} = a$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

$$x^4 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

گویا کردن مخرج های گنگ : صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت های ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)((\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - y}$$

تمرین ۱

هر یک از عبارت ها را تا حد ممکن (به عبارت های گویا) تجزیه کنید.

$$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{الف)$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \quad \text{ب)$$

پ) $x^2 + y^2$ تجزیه پذیر نیست

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y} \quad \text{الف)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x - 8} \quad \text{ب)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x + y} \quad \text{پ)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} - \frac{5x}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} - 2 - 5x}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 5x - 1}{x - 1} \quad \text{ت)$$

۳ بعضی از ضرب های عددی را با استفاده از اتحادها می توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب ها را ذهنی انجام دهید.

$$\text{الف) } 16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$$

$$\text{ب) } 105^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$$

$$\text{پ) } 100 \cdot 7^2 = (100 + 7)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 7 + 7^2 = 10000 + 1400 + 49 = 11449$$

$$\text{ت) } 99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

۴

کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

ابتدا تک تک کسرها را گویا کرده سپس چاکرین می کنیم:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{1+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

۵ عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید پا اجازه مولف سوال را به شکل زیر اصلاح کرده و تجزیه می کنم:

$$\begin{aligned} a^6 - 3b^6 + 2a^3b^3 &= \underline{a^6 - a^3b^3} + \underline{3a^3b^3 - 3b^6} = a^3(a^3 - b^3) + 3b^3(a^3 - b^3) = (a^3 - b^3)(a^3 + 3b^3) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + 3b^3) \end{aligned}$$

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه تایی فیثاغورسی می نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه تایی ها را می توانید شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می دهد :

$$(1/\circ 1)^{365} = 37/8$$

$$(0/\circ 99)^{365} = 0/\circ 3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/\circ 1)^{365}$ و $(0/\circ 99)^{365}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره وری) کار افزایش می یابد.
شما هم داستانی در باب توان ها بنویسید.

* (مثلث خیا)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

چه رابطه ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیا وجود دارد؟

ضد رایب موجود در بسط $(a+b)^n$ همان اعداد داده شده در سطر $n+1$ مثلث خیا است.

می توانید توان چهارم دو جمله ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$\begin{aligned} &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$