

تئیه کنندگان:  
جلبر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی



## مجموعه، الگو و دنباله



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان مادنان شهرستان زنجان



درس اول مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوم متمم یک مجموعه

درس سوم الگو و دنباله

درس چهارم دنباله‌های حسابی و هندسی

## درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

### مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ بحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است.

برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ : مجموعه اعداد طبیعی

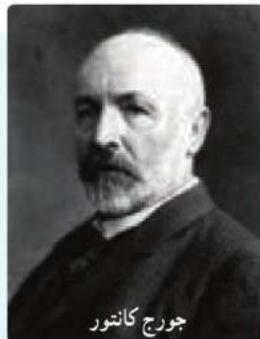
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ : مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ : مجموعه اعداد صحیح

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ : مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت  $Q'$  مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$\mathbb{R} = Q \cup Q'$ : مجموعه اعداد حقیقی



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر بنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی درباره مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

### کاردرگلاس

۱) (الف) مجموعه  $Q - \mathbb{R}$  چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو

دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید. آن مجموعه‌ی اعداد گنگ است که با نماد  $Q'$  نمایش می‌دهیم

در شکل هاشور قرمز زده شده است. دو عضو آن عبارتند از:  $\pi, \sqrt{2}, -\frac{1}{3}$

(ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشد و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

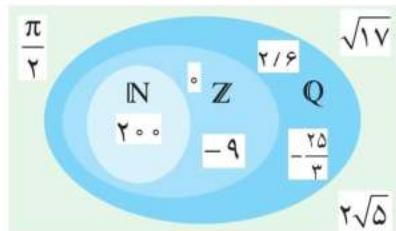
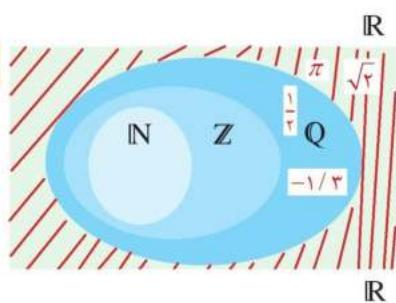
پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

(ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضاء بنویسید.  $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, \dots\}$

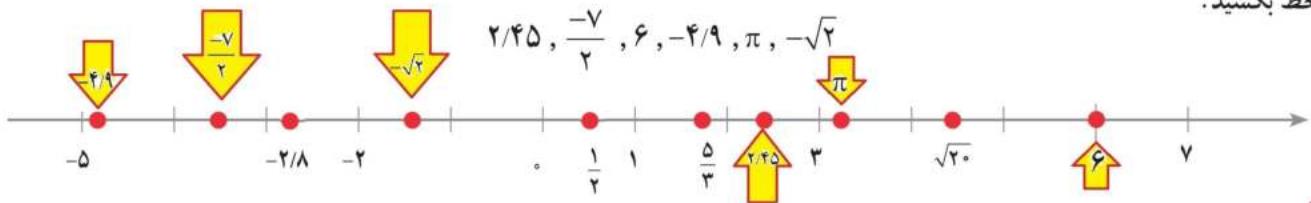
(ث) مجموعه  $\mathbb{N} - W$  چند عضو دارد؟ یک عضو دارد زیرا  $W = \{o\}$

توجه داشته باشید که  $\mathbb{N} - W = \emptyset$



## درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ است؟ زیر آنها خط بکشید.



### بازه ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه های  $\mathbb{R}$  را درنظر می گیریم. فرض کنید  $A$  مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-2$  و  $1$  به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ . اعضای  $A$  را روی محور زیر، بارنگ کردن مشخص کنید. آیا می توان تمام اعضای  $A$  را فهرست کرد؟ آیا می توان اولین عدد حقیقی بعد از  $-2$  را مشخص کرد؟



زیرمجموعه هایی از  $\mathbb{R}$  را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص است، «بازه» یا «فاصله» می نامیم. بازه ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده تری استفاده شود. بنابراین  $A$  را با نماد  $[-2, 1]$  نشان می دهیم و آن را بازه بسته از  $-2$  تا  $1$  می نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی  $-2$  و  $1$  را از  $A$  حذف کنیم، آنگاه مجموعه ای مانند  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$  به دست می آید که آن را بازه باز می نامیم و با نماد  $(-2, 1)$  نشان می دهیم. به طور خلاصه:

$$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} \quad : \text{بازه بسته بین } -2 \text{ و } 1$$

$$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \quad : \text{بازه باز بین } -2 \text{ و } 1$$

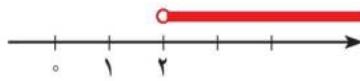
بازه های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می شوند.

### فعالیت

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله  $x > 2$  به صورت  $C = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$  است. اعضای  $C$  را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید  $C$  را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد  $+∞$  (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه  $C$  را در قالب بازه با نماد  $(2, +∞)$  نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل  $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$  نمایش بازه‌ای به صورت  $[-\infty, 1]$  خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که  $+∞$  و  $-∞$  اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

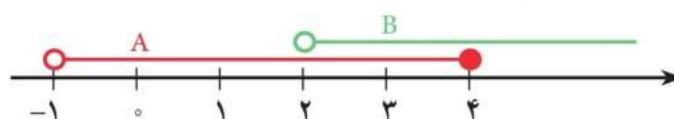
### فعالیت

اگر  $a$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +∞)$	$\{x \in \mathbb{R}   x > a\}$	
نیم باز	$[a, +∞)$	$\{x \in \mathbb{R}   x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R}   x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R}   x < a\}$	
باز	$(-\infty, +∞)$	$\mathbb{R}$	
نیم باز	$[3, +∞)$	$\{x \in \mathbb{R}   x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R}   x < 5\}$	

### مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه  $A = (-1, 4)$  و  $B = (2, +∞)$  را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که  $A \cup B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از  $-1$  یعنی  $(-1, +∞)$  و  $A \cap B = (2, 4)$ .

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که  $A \cap B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین  $2$  و  $4$  به همراه خود عدد  $4$ ؛ یعنی  $(2, 4] \cap (2, +∞) = (2, 4]$ . توضیح دهید که چرا  $2 \notin A \cap B$ .

زیرا  $2$  در بازه  $B$  نیست، پس در اشتراک وجود ندارد.

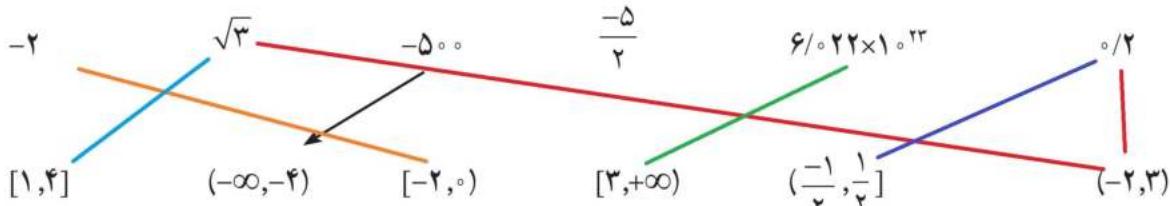
## کار در کلاس

۱ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

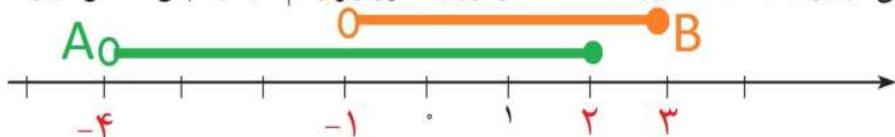
✓  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2]$  (الف)  $\times -2 \in (-2, 0]$  (ب)  $\checkmark \quad \circ \in (-2, 0]$  (پ)  $\checkmark -2 \in \{-2, 0\}$  (ت)  $\times -1 \in \{-2, 0\}$  (ث)

$\times [-1, 2] \subseteq (-1, 2)$  (ج)  $\checkmark \quad \{ \circ, 1 \} \subseteq [-1, 2]$  (ح)  $\checkmark \quad \emptyset \subseteq (-17, 0]$  (خ)  $\times \sqrt{2} \in (2, 5)$  (د)  $\times \sqrt{2} \in (0, 1)$

هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه های نظری آن وصل کنید.



۲ نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2)$  و  $B = (-1, 3)$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



(الف)  $A \cap B = (-1, 2]$  (ب)  $A \cup B = (-4, 3]$  (پ)  $A - B = (-4, -1]$   $B - A = (2, 3]$

## مجموعه های متناهی و نامتناهی

## فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟ عضو دارد

پ) درباره تعداد اعضای B چه می توان گفت؟ دارای بی شمار عضو است.

مجموعه هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه های متناهی** می نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر است. چنین مجموعه هایی را **مجموعه های نامتناهی** می نامیم.

## کار در کلاس

- ۱) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
$\{2, 3, 5, 7\}$	✓		مجموعه اعداد اول یک رقمی
۷۵.....	✓		مجموعه انسان‌های روی زمین
		✓	مجموعه اعداد طبیعی فرد
۵۳۰.....	✓		مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
		✓	مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
۱۸۰	✓		مجموعه داش آموزان مدرسه شما
$10^1 - 10^9$	✓		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
۳۹.....	✓		مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
		✓	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
		✓	مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
		✓	(باشه ۱۰، ۰)
$6 \times 10^{23}$	✓		مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

- ۲) دو مجموعه متناهی نام ببرید. ۱- مجموعه  $i$  دبیران ریاضی آبادان ۲- مجموعه  $i$  ماشین‌های پلاک آبادان

دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیر مجموعه دیگری باشد.  
مجموعه  $i$  اعداد طبیعی که زیر مجموعه  $i$  اعداد حسابی است.

دو مجموعه نامتناهی مثل  $A$  و  $B$  بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B - A$  تک عضوی باشد.

$$B = [1, 2] \quad A = [1, 2) \quad \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B - A = \{2\} \end{cases}$$

**تذکر:** تعداد اعضا برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



## جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و بهدلیل همین وسعت، به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای برو، اکوادور، گویان، کلمبیا، و ترینیداد، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محاسب می‌شود یا نامتناهی؟



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

## فعالیت

**الف**  $\frac{1}{3}$  عددی بین  $0$  و  $1$  است. چهار عدد گویای دیگر از بازه  $(0, 1)$  بنویسید و جواب خود را با جواب های دوستانان مقایسه کنید.

$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{20}{21}, \dots$

**ب** آیا می توان بین  $0$  و  $1$  به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ **بله**

## عدد آووگادرو

در شیمی تعداد  $6.02 \times 10^{23}$  عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول های موجود در یک مول آب را که  $18$  گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش ترددیک به  $20$  میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است!

به نظر شما، مجموعه مولکول های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

**پ** در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه  $(0, 1)$  چه نتیجه ای می گیرید؟ **نامتناهی**

**ت** در مورد متناهی یا نامتناهی بودن  $\mathbb{Q}$  چه می توان گفت؟ **نامتناهی** است.

**ث** اگر  $A$  دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه  $A$  یک مجموعه خواهد بود.

## تمرین

**۱** فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب های طبیعی عدد  $5$  باشد.

**الف**  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots\}$

**ب**  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟ **نامتناهی**

**پ** یک زیر مجموعه متناهی از  $U$  بنویسید.

**ت** دو زیر مجموعه نامتناهی  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید؛ به طوری که  $C \subseteq D$ .

$$D = \{10, 20, 30, \dots\}, \quad C = \{20, 40, 60, \dots\}$$

**۲** متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

**الف** مجموعه اعداد طبیعی. **نامتناهی**

**ب** مجموعه شمارنده های طبیعی عدد  $36$ . **متناهی**

**پ** بازه  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . **نامتناهی**

**ت**  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ . **متناهی زیرا**

**ث** مجموعه مضرب های طبیعی عدد  $100$ . **نامتناهی**

**۳** دو مجموعه نامتناهی مثل بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.

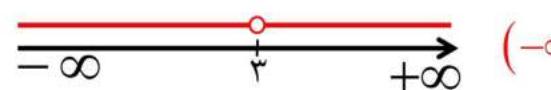
**۴** حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید:

$$(2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, \infty) \quad \text{الف) } (-2, 5] = (-2, 0] \cup (0, 5]$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty) \quad \text{ب) } [6, 10] = (3, +\infty) \cap (6, 10]$$

$$[2, 3] = [2, 4) - (3, +\infty) \quad \text{ج) } (4, +\infty) = (3, +\infty) - [2, 4)$$

**۵** مجموعه  $\mathbb{R} - \{-3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



**۶** اگر  $B \subseteq A$  و  $B$  مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه  $A$  متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ **متناهی**



## درس دوم: متمم یک مجموعه

### مجموعه مرجع

فرض کنیم  $U$  نشان‌دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با  $A'$  نشان‌دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال  $U$  را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و  $A'$  را متمم مجموعه  $A$  می‌نامیم.

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند،  
مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.

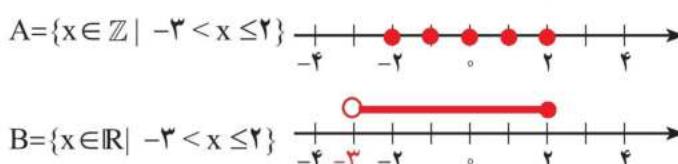


کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نسخین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه  $U - A$  را **متمم  $A$**  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

### فعالیت

**الف** دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.



نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۴۲۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۱۰۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۱۰۴۲۰۰۰ جلد



**ب**  $A$  را با نمایش اعضا و  $B$  را به صورت یک بازه بنویسید.

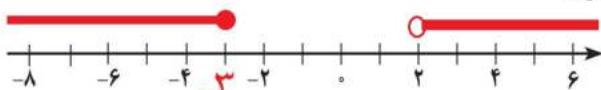
$$A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$B = [-3, 2]$$

**ب** در مورد  $A$ ، اگر مجموعه مرجع را  $\mathbb{Z}$  در نظر بگیریم،  $A'$  را مشخص کنید.

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -4, -3, 2, 3, \dots\} = \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$$

**ت** در مورد  $B$  با فرض این که  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

**ع** : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

**A** : کتاب‌های خطی

**A'** : کتاب‌های چاپی

## درس دوم: مفهوم پلاک مجموعه



۱۶۸۴۴ ج ۱۲

- ۱) اگر  $U$  مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و  $A$  مجموعه استان‌های غیرساحلی، آنگاه  $A'$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$A' = U - A$$

**سیستان و بلوچستان و هرمزگان و بوشهر و خوزستان و گلستان و مازندران و گیلان وارد بیل**

- ۲) فرض کنیم  $U$  مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و  $B$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت  $B'$  چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

$$B' = U - B = \text{مجموعه‌ی اتومبیل‌های با پلاک زوج}$$

- ۳) با فرض آنکه  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متم خودش وصل کنید.

$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	$\{1, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$
$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
$\{1, 2, 3, \dots, 9\}$	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$	$\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$

- ۴)  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{l} U^{\emptyset'} = U \\ U^{U'} = \emptyset \\ U^{A \cup A'} = U \\ U^{A \cap A'} = \emptyset \end{array}$$

- ۵) (الف) اگر  $\mathbb{Z}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه  $\mathbb{N}'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

- (ب) اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت  $\mathbb{N}'$  را روی محور نمایش دهید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N}$$

- ۶) فرض کنیم  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = U$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 4\}$ . ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$(A')'$	$A' = \{4, 5\}$	$B' = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\Rightarrow (A')' = A$	

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{0\}$	$\{0\}$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{0, 1, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 3, 4, 5\}$

$$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$A - B$	$A - (A \cap B)$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$

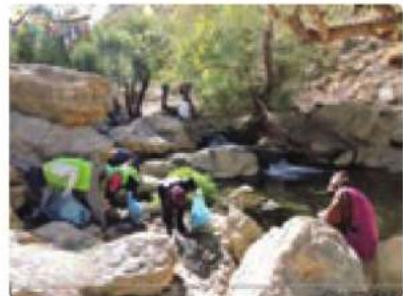
$$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$$

### تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت  $n(A)$  استفاده می‌شود. مثلاً اگر  $G = \{2, 3, 5, 7\}$  در این صورت می‌توانیم بنویسیم  $n(G) = 4$ . در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای  $n(A \cup B)$  بدست آوریم.

#### فعالیت

- ۱ یک تیم کوهنوردی مشکل از ۴ دانشآموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوههای اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک سازی می‌کنند.  
اعضای دانشآموز این تیم مجموعه  $\{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\} = A$  و اعضای دانشجوی آن مجموعه  $\{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\} = B$  هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر  $A \cap B = \emptyset$ .

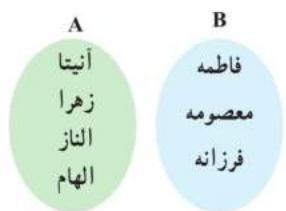


به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه  **جدا از هم** یا **مجزا** می‌گوییم.

الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{\text{فرزانه و معصومه و فاطمه و الهام و الناز و زهرا و آنیتا}\}$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰



ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه‌ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید. **جمع تعداد عضوهای  $A$  و  $B$  برابر با تعداد اعضای  $A \cup B$  است.**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟

$$A \cap B = \emptyset$$

الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6$$

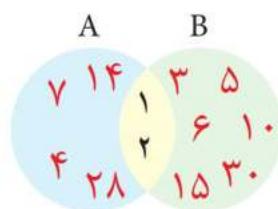
$$B = \{1, 2, 3, 5, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



پ) چرا رابطه ای را که در فعالیت (۱) بدست آورده؛ یعنی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های A و B عضوهای مشترک دارند یعنی  $A \cap B \neq \emptyset$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای  $n(A \cup B)$  را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار رو به رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

### کاردر کلاس



۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که :

(الف) پویانمایی یا طنزند.

(ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند.

**روش اول حل :** مجموعه شامل تمام فیلم ها را با U، مجموعه فیلم های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم های طنز را با T نشان می دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب ها را بیابید.

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$$

$$n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹.$$



**روش دوم حل :** در نمودار و ن مقابل، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتند اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت های (الف) و (ب) را بیابید.

$$= ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲ = \text{پویانمایی یا طنز (الف)}$$

$$= ۲۱ - ۱۲ = ۹ = \text{غیر پویانمایی و غیر طنز (ب)}$$

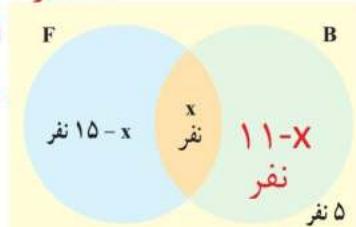
۷ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند.

مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

**روش اول حل:** با تکمیل نمودار زیر مقدار  $x$  را باید.

۲۵ نفر

$$\begin{aligned} (15-x) + x + (11-x) + 5 &= 25 \\ \Rightarrow 31 - x &= 25 \Rightarrow x = 6 \\ \Rightarrow n(B \cap F) &= 6 \end{aligned}$$



**روش دوم حل:** چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = 20$ . حال با نوشتن فرمول  $n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$  می‌توان  $n(B \cap F)$  را به دست آورد.

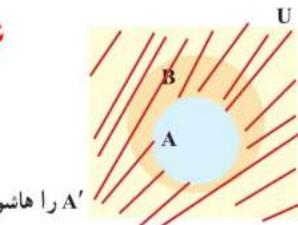
$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = 6$$

۸ (الف) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل  $A'$  و  $B'$  را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

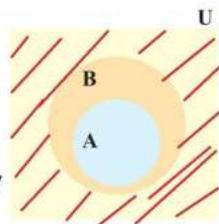
$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

(ب) اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{c, d, e\}$  در این صورت  $A \subseteq B$  می‌باشد. با به دست آوردن  $A'$  و  $B'$  نشان دهید که  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$A' = \{c, d, e\}, \quad B' = \{d, e\} \Rightarrow B' \subset A'$$

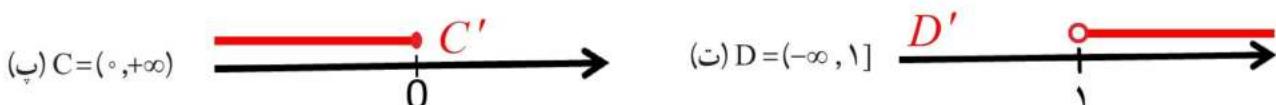
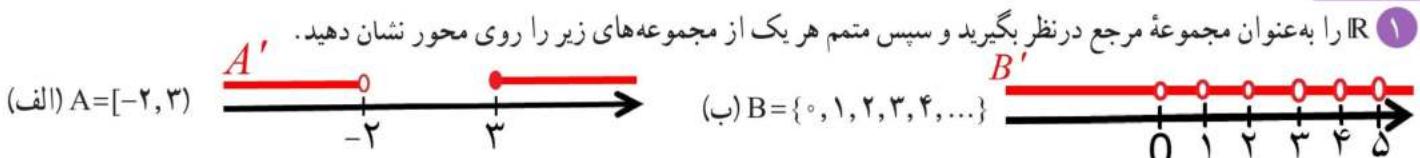


را هاشور بزنید



را هاشور بزنید

### تمرین



۲  $\mathbb{N}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $A$  مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج =  $A' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $B$  مثال بزنید که  $B'$  متناهی باشد.

$$B = \{5, 6, 7, \dots\} \quad B' = \{1, 2, 3, 4\}$$

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل  $C$  مثال بزنید و  $C'$  را به دست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟

$$C = \{2, 3, 5, 7\} \quad C' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

اگر  $n(A) = 15$ ,  $n(B) = 5$ ,  $n(A \cap B) = 3$ , آنگاه  $n(A \cup B) = 3 + 15 + 5 = 20$  محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 20 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

فرض کنیم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه مرتع U باشند، به طوری که  $n(A \cap B) = 2$ ,  $n(A) = 6$ ,  $n(U) = 10$  و  $n(B) = 4$  مطلوب است:

$$(الف) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 6 + 4 - 2 = 8.$$

$$(ب) n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 2 = 4.$$

$$(پ) n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 4 - 2 = 2.$$

$$(ت) n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 10 - 8 = 2.$$

در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانشآموزان عضو گروه سرود و ۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانشآموزانی که فقط عضو گروه سرودند.  $9$

(ب) تعداد دانشآموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از

محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند

که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

حداقل =

به معنای اجتماع

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.  $70 - 32 = 38$

(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$A \cup B = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$$

$$A \cap B = n(A \cap B) = 32$$

$$A \cup B = 95$$

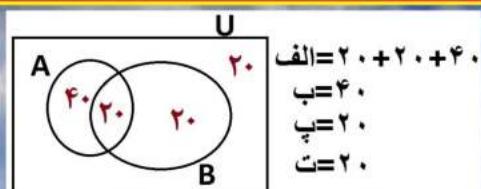
$$A \cap B = 32$$

$$A \cup B = 95$$

$$A \cap B = 32$$

$$A \cup B = 95$$

توجه: مسائل فوق را با شکل راحت‌تر می‌توان پاسخ داد به عنوان نمونه سوال ۴ را مشاهده بفرمایید

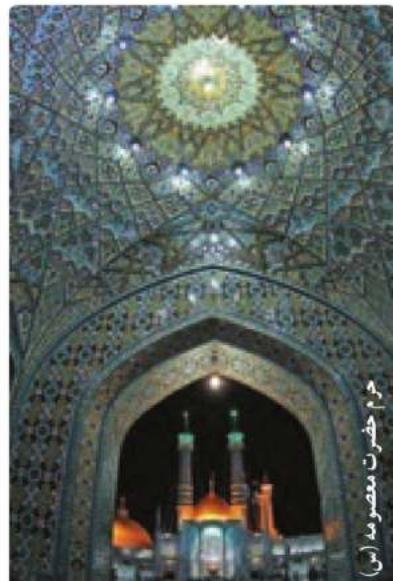
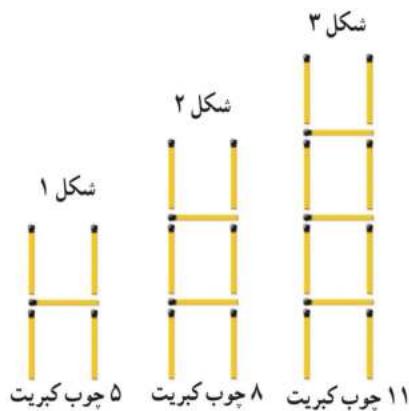


## درس سوم: الگو و دنباله

### الگو

### مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



$n$ : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	$n$	...
$a_n$ : تعداد چوب کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین $n$ و $a_n$	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$	...	...	$a_n = \dots$	...

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت  $a_1 = 5$  نشان داده‌ایم (می‌خوانیم :  $a_1$  برابر ۵). عبارت‌های  $a_2, a_3, a_4$  و  $a_n$  متغیرهای اندیس‌دار<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۸، ۱۱ و ۵ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الى آخر.

$$a_1 = 5 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 11$$

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلف است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا مارپیچ‌های روی میوه آناناس توجه شمارا به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و بی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

**الف** با این نمادگذاری،  $a_n$  نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

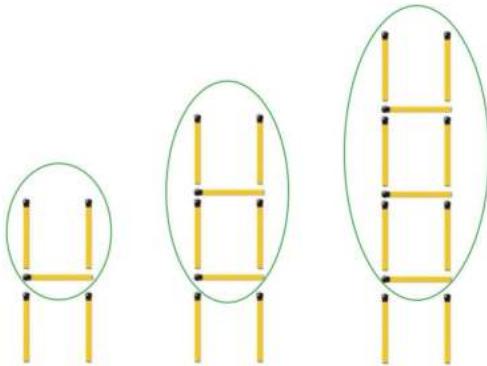
جمله‌ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می‌باشد.

**ب**  $a_n$  به چه معناست؟ **جمله‌ی  $n$  ام الگو است.**

**ب** آیا می‌توانید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  بدست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

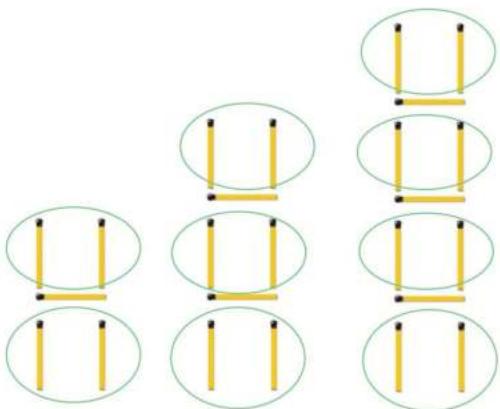
۱— در سال‌های گذشته با متغیرهای مثل  $x, y$  و  $z$  سروکار داشتمیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس‌دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

فعالیت



۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت رو به رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_1$  و  $a_n$  را به دست آوردید.

$$a_1 = 1(2) + 2 \quad a_2 = 2(2) + 2 \quad a_3 = 3(2) + 2 \quad a_4 = 4(2) + 2 \quad \dots \quad a_n = 1 \cdot (3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$



۲ آیسا روش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$  دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را درجای مشخص شده بنویسید.

$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_n = 1 + (1 + n - 1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n + 1)2$$

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2$$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  می دانید؟

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad a_n = 5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$$

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار  $a_n$  را به ترتیب به صورت های  $a_n = n + (n + 1)2$  و  $a_n = 3n + 2$  به دست آورده اند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

$$\text{همان جواب آیدا است} \rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2 \rightarrow \text{جواب آیسا}$$

۵ به کمک رابطه  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بایابید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

۶ با استفاده از رابطه  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

۷ تذکر: در مثال بالا دیدیم که  $a_n = 3n + 2$  بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل  $n$  است.  $a_n = 3n + 2$  را جمله عمومی الگوی نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

### الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.

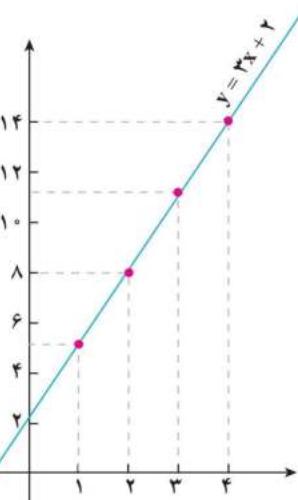
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
5	8	11	14	
+3	+3	+3	+3	

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متولی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بی‌بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط  $y = 3x + 2$  قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی  $y = 3x + 2$  و جمله عمومی الگو یعنی  $a_n = 3n + 2$  اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متولی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n = an + b$  است، **الگوهای خطی** می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متولی برابر بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متولی در این الگوی خطی برابر ضریب  $n$  است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $C_n = 4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$$



### مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را باید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت  $C_n = an + b$  باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

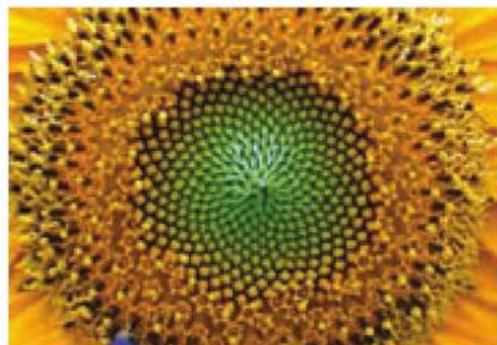
$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس  $C_n = 4n + 1$ . بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$$

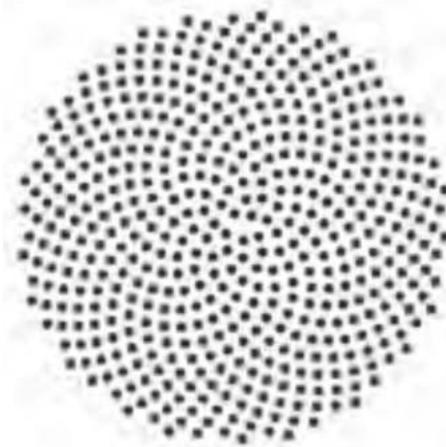
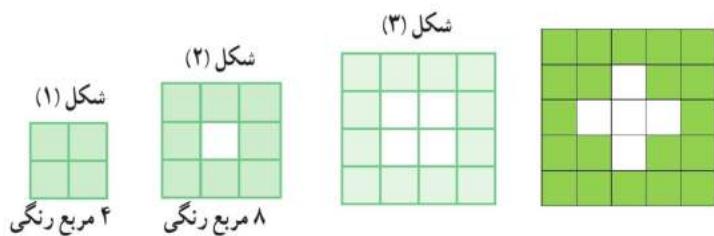


## درس سوم: الگو و جدول



## کار در کلاس

۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



$n$ : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$b_n$ : تعداد مربع های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین $n$ و $b_n$	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

۱ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محاسبه می شود.  
چون اختلاف هر دو جمله ای متواالی در آن ، عددی ثابت است.

۲ با توجه به میزان افزایش جملات الگو ، مقدار  $a$  در رابطه  $b_n = an + h$  را باید و پس از حدس زدن مقدار  $h$  ، حاصل  $b_n$  را به دست آورید.

اختلاف هر دو جمله ای برابر ۴ است پس  $a = 4$  و  $h = 0$  ، پس  $b_n = 4n$  .  
۲ شکل شماره ۲۵ دارای چند مربع رنگی است؟

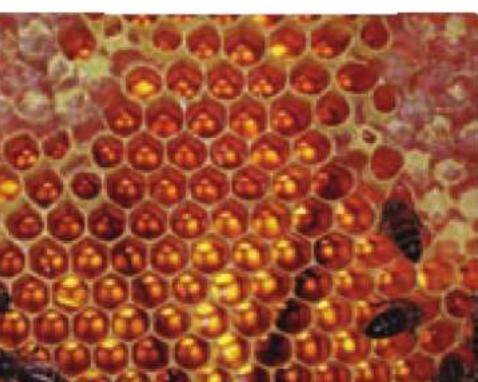
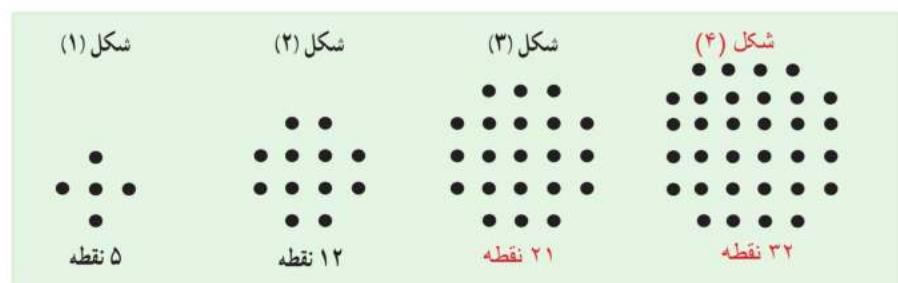
$$b_n = 4n \xrightarrow{n=25} b_{25} = 100$$

۳ در چه مرحله ای از الگوی بالا ، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟  
یعنی در مرحله ای ۳۶ آم ، ۱۴۴ مربع رنگی داریم .

## الگوهای غیرخطی

## فعالیت

۱ در الگوی زیر ، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

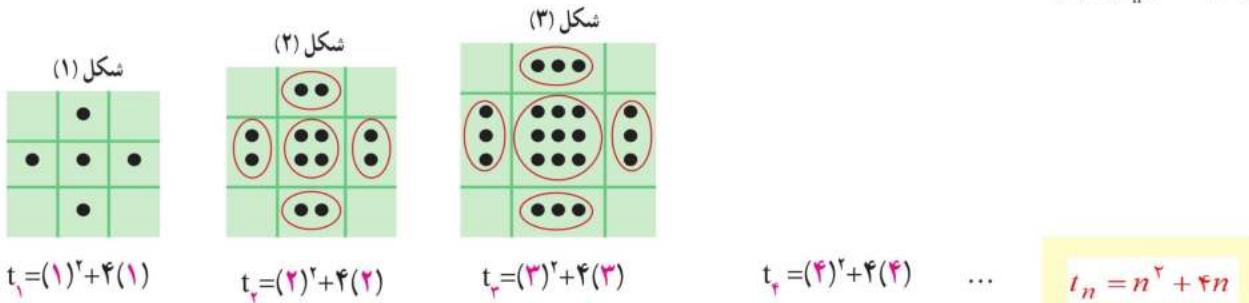


$n$ : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$t_n$ : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	
رابطه بین $n$ و $t_n$	$t_1 = 5$	$t_2 = 12$	$t_3 = 21$	$t_4 = 32$	

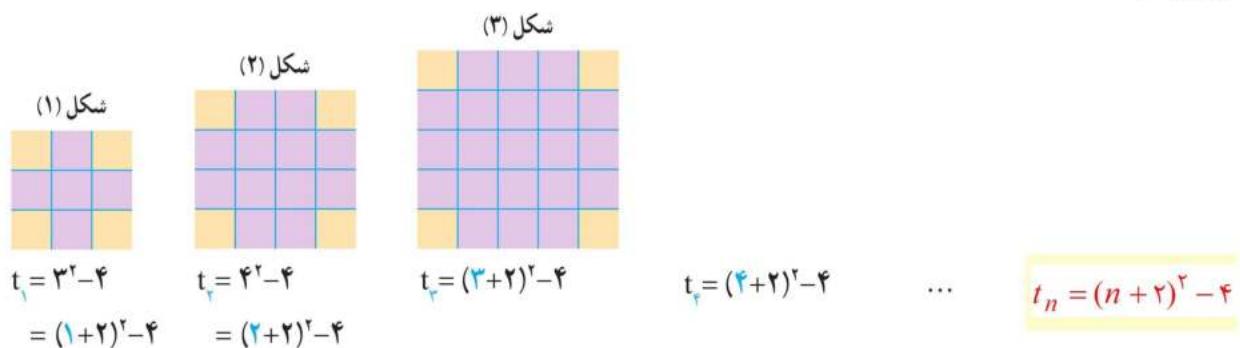
۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

خیر ، زیرا اختلاف هر دو جمله ای متواالی ، عددی ثابت نیست .

۲ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار  $t_n$  را بیابید.



۳ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظری کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



۴ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند.

$$\text{جواب امیر رضا: } t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$$

۵ آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

### دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظری کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵, .....

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

## درس سوم: الگو و دنباله

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با  $t_1$ ، جمله دوم را با  $t_2$  و به همین ترتیب جمله  $n$ ام یا جمله عمومی آن را با  $t_n$  نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

### کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید. ...، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ... : دنباله اعداد طبیعی زوج ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ... : دنباله فیبو ناتچی

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را بر کنید.

(الف)  $a_n = n^2 - 1$  : ...، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴

(ب)  $b_n = -n + 4$  : ۳، ۲، ۱، ۰، ...، -۲

(ج)  $c_n = -13 + 2n$  : -۱۱، -۹، -۷، -۵، -۳

در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	-n	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	...	$\sqrt{2n-1}$	...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	$n^2$	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...	$(\frac{1}{n})^n$	...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)^n n^3$	...
۵	۱۸	۲۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳	...		
-۲	۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	...		
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۳	...		
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	...		
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...		
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	...		

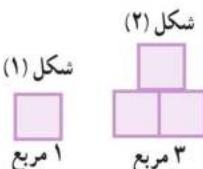
شکل (۴)



شکل (۳)



شکل (۲)



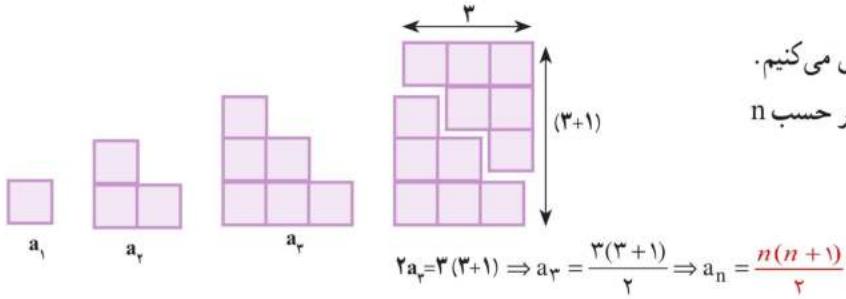
۱۹

۱) الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ... و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۱ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ خیر چرا؟

چون اختلاف هر دو جمله‌ی متولّی آن، عددی ثابت نیست.



پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم.  
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  بدست آورید.

ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

همان جمله‌ی  $n$  مرحله‌ی قبلی است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### تمرین

۱) به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. ... ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶

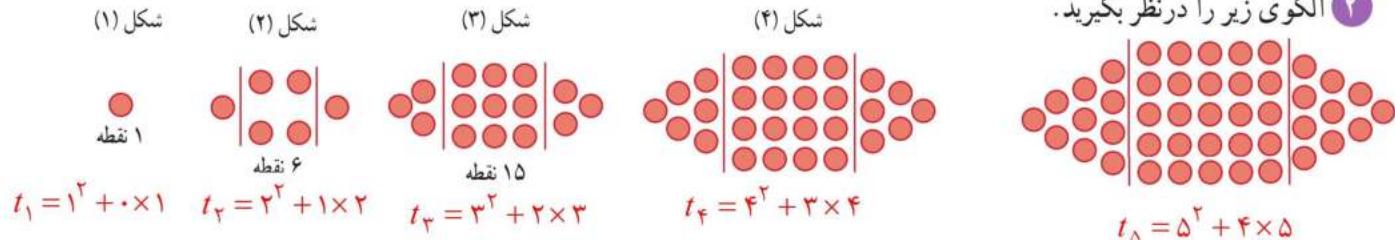
پ) اگر  $n$  تعداد کاشی‌های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟  $t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چند است؟

$$\text{تعداد کاشی‌های سفید } 23 \text{ است. } t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$$

۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ... ۶۴ و ۵۷ و ۴۵ و ۳۸ و ۲۸ و ۱۵ و ۹ و ۱

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.  $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟  $t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$

۳) جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف)  $a_n = 4n$

... و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴

(ب)  $b_n = 3n+1$

... و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴

(پ)  $c_n = n^2 + 2$

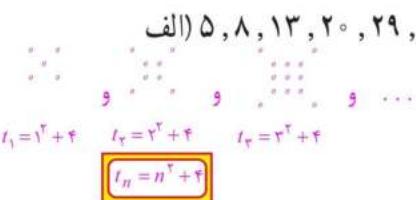
... و ۱۸ و ۱۱ و ۶ و ۳

(ت)  $d_n = n^2 + n$

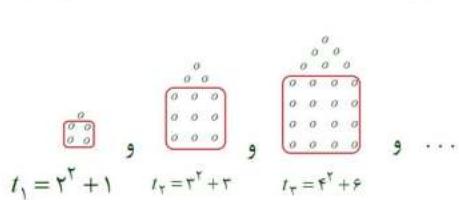
... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲

برای دنباله‌های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

الف)  $5, 8, 13, 20, 29, \dots$



ب)  $5, 12, 22, 35, 51, \dots$



یاد آوری: دنباله ... و ۶ و ۳ و ۱ دنباله مثلثی

با جمله عمومی  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$  است.

بنابراین  $t_n = (n+1)^2 + a_n$  و در نتیجه:

$$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

تهیه کنندگان:

جلبر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی

## درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

## دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

## فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, .....

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_5$	...	$t_n$	...
۲۰۰۰	$2000 + 4(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 4(4)$	...	$2000 + 8(4)$	...	$2000 + (n-1)(4)$	...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = 2000 + (24-1)(4) = 2092$$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$	...	$t_1 + (n-1)d$	...

همان طور که مشاهده شد،

جمله  $a_n$  یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است.

### تاریخ کلاس

۱ در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

$$5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots, d=5, a_n = 5 + (n-1)5 = 5n$$

$$(ب) 1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots, d=2, b_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$$

$$(پ) 5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots, d=4, c_n = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$$

$$(ت) 13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots, d=-6, d_n = 13 + (n-1)(-6) = -6n + 19$$

A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط زیرند.



سیم کارت های شرکت B

هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A

هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم  $a_n$  نشان دهنده هزینه کل  $n$  دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و  $b_n$

هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

$$(الف) مقدار  $a_n$  و  $b_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.$$

(ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n$ : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
$a_n$ : هزینه سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
$b_n$ : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا  $a_n$  و  $b_n$  هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ بله چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

زیرا جمله ای عمومی آنها به شکل یک دنباله خطی است. دلیل دیگر اینکه اختلاف هر دو جمله ای متواالی آنها مقدار ثابتی است.

$$a_n : d = 3200 - 2000 = 1200 \quad \text{و} \quad b_n : d = 3800 - 3000 = 800$$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه

می کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می کنید؟ چرا؟

$$a_{15} = 3800, \quad b_{15} = 4200 \Rightarrow \text{به سارا سیم کارت شرکت A را پیشنهاد می کنیم.}$$

$$a_{15} = 6500, \quad b_{15} = 6000 \Rightarrow \text{به فاطمه سیم کارت شرکت B را پیشنهاد می کنیم.}$$

مثال

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.  
حل: آرتن و آرکان این مثال را به روش های زیر حل کرده اند. شما کدام روش را می پسندید؟



آرتن: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d \\ t_{16} &= t_1 + 15d \\ &= 4 + (15)(7) \\ &= 109 \end{aligned}$$

آرکان: یک الگوی خطی با قدر نسبت 7 داریم. پس

$$\begin{aligned} t_n &= 7n + b \\ t_1 &= 7(1) + b \\ 4 &= 7 + b \Rightarrow b = -3 \\ t_n &= 7n - 3 \\ t_{16} &= 7(16) - 3 \\ t_{16} &= 109 \end{aligned}$$

کار در کلاس

- ۱) (الف) یک دنباله حسابی با قدر نسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.  
۲) یک دنباله حسابی با قدر نسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.  
۳) (پ) دنباله ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند. ... و -۳ و -۱۹ و ۳ و ۵



بریانی روسف

(الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدeneند. در این حالت می گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده ایم.  
حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11 \quad \begin{array}{c} t_1 \\ 18 \\ 29 \\ 40 \\ 51 \\ 62 \end{array}$$

توضیح: برای محاسبه قدر نسبت می توان از رابطه  $d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$  نیز استفاده کرد.

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{62 - 18}{4} = 11$$

(ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{80 - 20}{2} = 30 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 50 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_4 - t_1}{4 - 1} = \frac{80 - 20}{3} = 20 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_5 - t_1}{5 - 1} = \frac{80 - 20}{4} = 15 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 35 \\ 50 \\ 65 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_6 - t_1}{6 - 1} = \frac{80 - 20}{5} = 12 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 32 \\ 44 \\ 56 \\ 68 \\ 80 \end{array}$$

$$d = \frac{t_7 - t_1}{7 - 1} = \frac{80 - 20}{6} = 10 \quad \begin{array}{c} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \end{array}$$

۱) از بين دنباله های زير، دنباله های حسابي را مشخص کنيد و در هر يك از آنها با تعين قدرنسبت، جمله بيست و يكم را بيايد.

$$d = 7 \text{ و حسابي } t_1 = a + 2 \cdot d = 3 + 14 \cdot 7 = 143$$

$$\text{ناحسابي } 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$d = \sqrt{3} \text{ و حسابي } t_1 = a + 2 \cdot d = \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$d = -3 \text{ و حسابي } 10, 7, 4, 1, \dots$$

$$t_1 = a + 2 \cdot d = 10 + (-6) = -5$$

$$d = 0 \text{ و حسابي } 2, 2, 2, \dots$$

$$t_1 = a + 2 \cdot d = 2 + 0 = 2$$

$$d = \frac{1}{5} \text{ و حسابي } t_1 = a + 2 \cdot d = \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 1}{5} = \frac{22}{5}$$

$$d = 20 \text{ و حسابي } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۲) در يك دنباله حسابي، جملات سوم و هفتم به ترتيب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنيد؛ يعني با بدست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنويسيد.

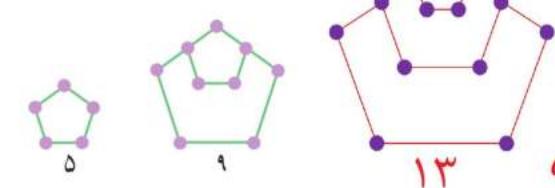
$$d = \frac{t_7 - t_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9 \quad t_3 = a + 2d = 20$$

$$a + 18 = 20 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{دنباله } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۳) در يك دنباله حسابي، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۲۹ است. دنباله را مشخص کنيد.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a + d + a + 2d = 3 \\ a + 3d + a + 4d + a + 5d = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 \\ 3a + 12d = 29 \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} -3a - 3d = -3 \\ 3a + 12d = 29 \end{cases} \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = -3$$

-۳, ۱, ۵, ۹, ... : دنباله



$$t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow n = 100$$

الف) دو جمله بعدی الگوي مقابل را با رسم شكل بيايد و نوع دنباله را مشخص کنيد.

دنباله از نوع حسابي است : ۱, ۵, ۹, ۱۳, ...

ب) جمله عمومي آن را مشخص کنيد.

$$a = 1, d = 4 \Rightarrow t_n = 1 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow t_n = 4n - 3$$

پ) جمله چندم اين دنباله ۳۹۷ است؟

ب) واسطه حسابي بين ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow 20, \boxed{25}, 30$$

الف) واسطه حسابي بين ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{5}, 8, 11$$

پ) از دو قسمت قبل چه نتائج هاي مي گيريد؟ واسطه اي حسابي دو عدد، همان ميانگين آنها است.

به عبارت ديگر : اگر  $c$  و  $b$  سه جمله اي متالي يك دنباله اي حسابي باشند،  $b$  را واسطه اي حسابي نامide و داريم :  $a + c = 2b$  يا  $b = \frac{a+c}{2}$

مسئله زير در پاپروس رايind آمده است. آن را حل کنيد.

۱) فرق نان را بين ۵ مرد چنان تقسيم کنيد که سهم هاي دريافت شده، دنباله حسابي تشکيل دهنده و يك سوم مجموع سه سهم بزرگتر، مساوي مجموع دو سهم کوچک تر باشد».

دنباله اي حسابي تشکيل شده را  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  در نظر مى گيريم . طبق فرض سوال مى توان نوشت :

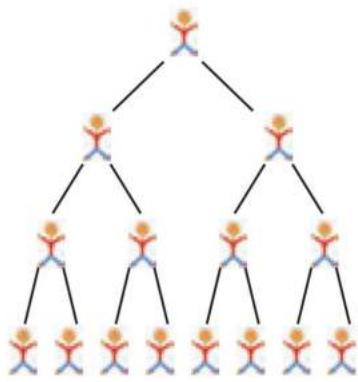
$$\left. \begin{array}{l} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 \Rightarrow 5a + 10d = 100 \xrightarrow{\div 5} a + 2d = 20 \\ \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = t_1 + t_2 \xrightarrow{\times 3} 3a + 9d = 6a + 3d \Rightarrow a = 2d \end{array} \right\} \Rightarrow d = 5, a = 10$$

بنابراین دنباله به صورت ۳۰, ۲۵, ۲۰, ۱۵, ۱۰ می باشد.

### دنباله هندسی



علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مرااعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.



### فعالیت

روز $n$	$t_n$ : تعداد افراد جدیدی که در روز $n$ ام مبتلا می‌شوند
۱	$2$ (امید و محسن)
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 = 2^4$
۵	$16 \times 2 = 2^5$
۶	$32 \times 2 = 2^6$
⋮	⋮
$n$	$t_n = 2^n$

- ۱ جدول مقابل را کامل کنید و  $t_n$  را بیابید.

$$t_{10} = 2^{10} = 1024$$

$$t_{11} = 2^{11} = 2048$$

- ۲ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

$$t_{12} = 2^{12} = 4096$$

- ۳ در روز چند تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

$$t_n = 16384 \Rightarrow n = 14$$

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:  
۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ....

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متواالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متواالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

**دنباله هندسی**، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

### فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهد بود. جدول را تکمیل کنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	...	$t_1 r^{n-1}$	...

$$\times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r$$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

جمله  $t_n$  ام دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدر نسبت می باشد.

### کار در کلاس

۱) نرگس و نگار برای محاسبه هفتمنی جمله دنباله هندسی ..... ۱, ۳, ۹ ..... روش های مقابله را به کار بردند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ نگار توضیح دهد.

برای محاسبه ای قدر نسبت باید هر جمله را برابر جمله ای قبلی آن تقسیم کرد. ولی متاسفانه نرگس جمله را برابر جمله ای بعدیش تقسیم نموده است. که غلط است.

۲) در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

(الف)  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

(ب)  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$

(پ)  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

(ت)  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^n \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$

نرگس	$r = \frac{9}{3} = 3$
$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$	$= 6561$



۱) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوییم ۱۲ یک **واسطه هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4 \end{cases} \quad 3 \quad | \quad 12 \quad | \quad 48 \quad \text{یا} \quad 3 \quad -12 \quad | \quad 48$$



\* اگر  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله ای متمایز دنباله ای هندسی باشند آنگاه  $\frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$  است.

اگر  $a, b, c$  سه جمله ای متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه  $b = a \cdot r$  و  $c = b \cdot r$  نامیده و خواهیم داشت:  $ac = b^2$ . ویردر آنفرم برابر است با مریع و مطر

۲) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

خیر جواب یکتا نیست. بلکه دارای دو جواب است.

$$\Rightarrow r^{5-1} = \frac{t_5}{t_1} \Rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 2 \quad 2 \quad | \quad 6 \quad | \quad 12 \quad | \quad 24 \quad | \quad 48 \quad \text{یا} \quad 2 \quad | \quad 6 \quad | \quad 12 \quad | \quad 24 \quad | \quad 48$$

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$$10 \quad | \quad b \quad | \quad 4000 \quad \Rightarrow b^2 = 10 \times 4000 = 40000 \Rightarrow b = \pm 20$$

$$t_1 = 10, \quad t_4 = 10 \cdot \dots \Rightarrow r^{4-1} = \frac{t_4}{t_1} \Rightarrow r^3 = 10 \cdot \dots \Rightarrow r = 20 \quad 10 \quad | \quad 200 \quad | \quad 4000 \quad | \quad 80000$$

$$t_1 = 4, \quad t_6 = 972 \Rightarrow r^{6-1} = \frac{t_6}{t_1} \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r = 3 \quad 4 \quad | \quad 12 \quad | \quad 36 \quad | \quad 108 \quad | \quad 324 \quad | \quad 972$$

یک کوه بخی هزار تُنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد.

پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نماند. ب) حدود  $\frac{1}{3}$  آن باقی می‌ماند.

ب) تقریباً نصف آن آب می‌شود. ت) حدود  $\frac{2}{3}$  آن باقی می‌ماند.

تصریف

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

هندسی نیست  $\dots, 8\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$  (ب)

هندسی است  $1, 5, 5, 5, \dots \rightarrow r = \frac{5}{5} = 1$  (ت)

هندسی است و  $r = \frac{28}{7} = 4 \rightarrow 7, 28, 112, 448, \dots$  (الف)

هندسی است و  $r = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  (ب)

$\dots, \frac{1}{25}, \frac{4}{25}, \dots \rightarrow r = \frac{4}{5} = 1$ : فرض

$\dots, -\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \dots \rightarrow r = -1 = -1$ : فرض

۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت  $\frac{4}{5}$  می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

با توجه به انتخاب جمله‌های اول دلخواه، بی شمار دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت داده شده می‌توان نوشت.

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. درست نیست، زیرا بی شمار دنباله می‌توان نام برد که نه حسابی و نه هندسی باشند، به عنوان نمونه دنباله مثلثی، مربعی، فیبوناچی و ... یا دنباله‌های غیر معروف مثل:  $\dots, 2, 4, 6, \dots$

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست نیست، دنباله‌هایی با اعداد ثابت ناچر، در نظر بگیرید این دنباله‌ها حسابی با قدر نسبت صفر و هندسی با قدر نسبت یک می‌باشند. مانند  $\dots, 2, 2, 2$  و  $\dots, 0, 0, 0$ .

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال  $2^{\circ}$  درصد نسبت به سال

قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

بعد از یک سال  $\frac{80}{100} \times 500000 = 400000$  بعد از سه سال  $\left(\frac{80}{100}\right)^3 \times 500000 = 256000$  بعد از دو سال  $\left(\frac{80}{100}\right)^2 \times 500000 = 320000$

کاهش ۲۰ درصدی قیمت به معنی آن است

که قیمت هر سال  $80$  درصد سال قبل است. بنابراین:  $t_n = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n$

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت  $n$  سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.  $\dots, 4, 8, 16, \dots$

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{(1+2+3+\dots+20)} = 2^{\frac{20 \times 21}{2}} = 2^{210}$$

توجه: حاصل ضرب  $n$  جمله نخست دنباله هندسی برابر است با:  $P_n = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}$  بنابراین:  $P_2 = 2^2 \times 2^{\frac{2 \times 1}{2}} = 2^2 \times 2^{19} = 2^{210}$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب  $12$  و  $96$  می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} r^2 &= 12, \quad r^6 &= 96 \Rightarrow r^{6-2} = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \\ r &= 2 \Rightarrow a \times 2^2 = 12 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

دنباله  $3, 6, 12, \dots$

۷ بنابرآمار منتشر شده از جانب پژوهشی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال  $1400$  چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدنه‌ند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۴/۸	۱۴۹۶۷/۰۶	۱۴۲۱۸/۰۷	۱۳۵۰۷/۷۷۱	۱۲۸۳۲/۲۸۲	۱۲۱۹۰/۷۶۲

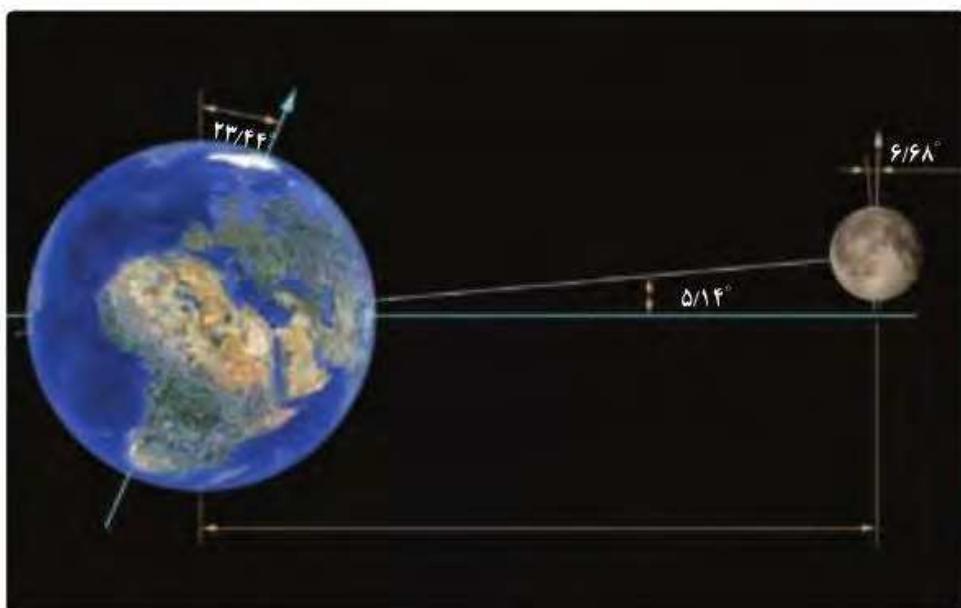
ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت  $+95/90$

توجه داشته باشید که اگر هر سال  $5\%$  کاهش یابد به این معنی است که هر سال برابر است با  $95\%$  سال قبل، پس باید هر سال را در  $95/90$  ضرب کرد تا سال آینده‌ی آن بدست آید.

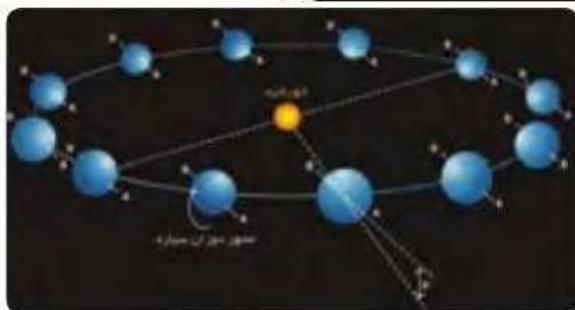
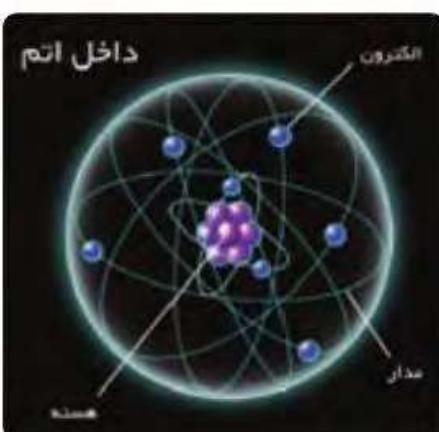
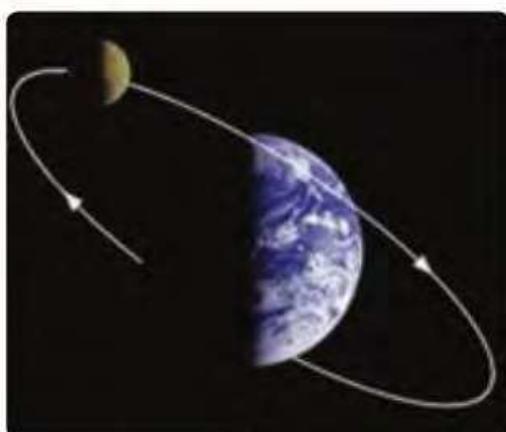
# مثلثات

**السَّقْفُ وَالْقَفْرُ بِحُسْبَانٍ** (رحمان : ۵)

خورشید و ماه برابر حساب (منظومی در جرخش و گردش) هستند.



زمین هم به دور خودش و هم به دور خورشید می چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل‌های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می‌نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستاره‌قطبی، ستاره‌ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی‌کند. اگر از سمت ستاره قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دور خود، دوران می‌کند.



درس اول  
نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم  
دایرة مثلثاتی

درس سوم  
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی



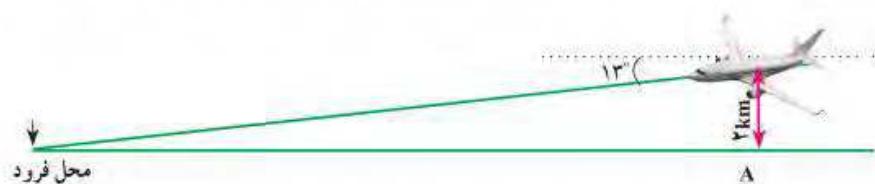
برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت پیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها  $120^\circ$  درجه است. در آینده‌ای نه‌جندان دور، بهترین میکروفون‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفون‌ها، قابلیت رذیابی امواج صوتی فراتر از دامنه شدت شنوازی انسان را دارند.

### درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویه هواپیما با افق  $12^\circ$  باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظری در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه

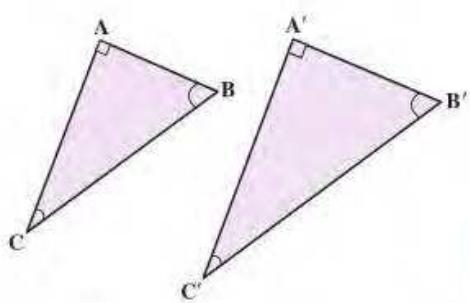
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{و} \\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{B} = \hat{B}' \\ \text{در هندسه ثابت می‌شود:}$$

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:

اگر  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم  $\hat{C} = \hat{C}'$ ، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



## کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه  $A'B'C'$  و  $ABC$ .  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $A'B'C'$  جاهای خالی را کامل کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ , می‌توان نتیجه گرفت (چرا؟). با توجه به این طبق خواص تناسب نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

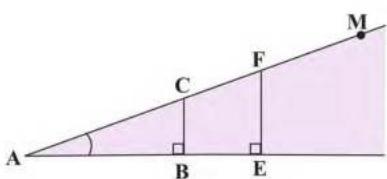
**نتیجه:** اگر زاویه  $A$  از مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  با زاویه  $A'$  از مثلث قائم‌الزاویه  $A'B'C'$  مطابق شکل بالا (برابر باشد، داریم):

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

## فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی  $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$  را بررسی کنید.

$$\triangle ACB \sim \triangle AFE \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

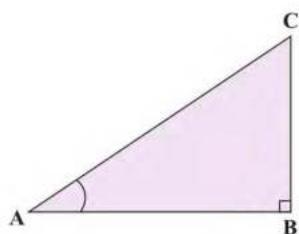


۲ نقطه دیگری مثل  $M$  را در امتداد  $AC$  درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه  $A$  رسم کنید و پای عمود را  $N$  بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  برای زاویه معین و حاده  $A$ ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه  $A$ ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تائزانت زاویه  $A$  می‌نامیم و آن را با  $\tan A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، داریم:

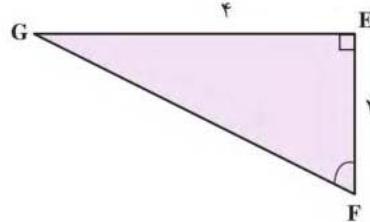
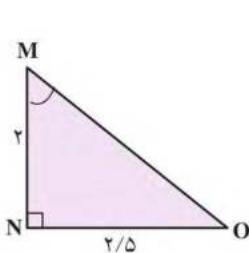
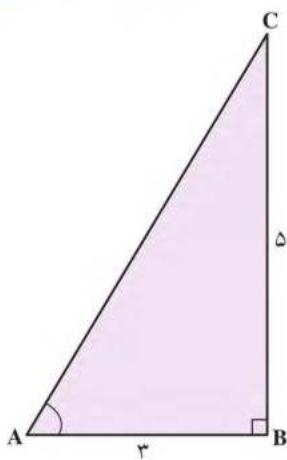
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$



عکس تائزانت زاویه  $A$  را کاتائزانت می‌نامیم و آن را با  $\cot A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

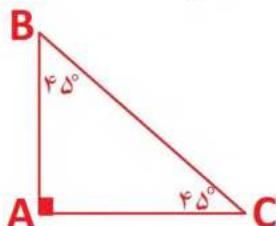
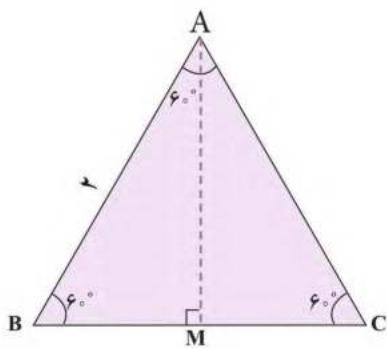
$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$



۱ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM. **میانه** ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB = 1$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را بدست آوردید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad 1^2 + AM^2 = 2^2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، تائزانت و کتائزانت زاویه ۴۵ درجه را پیدا کنید.

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1 \quad \cot 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آنرا سینوس زاویه A می‌نامیم و با  $\sin A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}.$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را

کسینوس زاویه A می‌نامیم و آن را با  $\cos A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \text{به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویه ABC،}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}. \quad \text{به طور مشابه، می‌توان دید}$$



در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

## مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه  $45^\circ$  را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر  $AC$  را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

**فریبا:** با توجه به اینکه مثلث  $ADC$  قائم الزاویه است، داریم  $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$ . در نتیجه  $(AC)^2 = 1^2 + 1^2$  و از این رو  $AC = \sqrt{2}$ . چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس

$$AC = \sqrt{2}$$

**معلم:** با توجه به اینکه مثلث  $ADC$  متساوی الساقین است، از این رو ...

**میبنا:** طبق تعریف سینوس،

$$\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

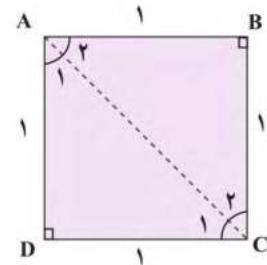
و تر

سپا: من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس  $45^\circ$  را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**مریم:** اکنون در مثلث قائم الزاویه  $ADC$ ، طبق تعریف داریم

$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{و} \quad \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$



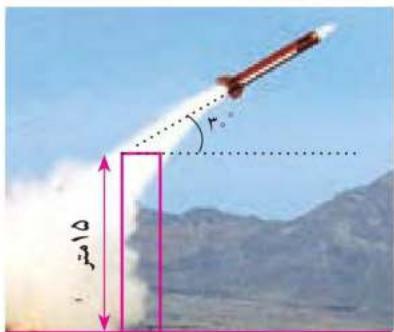
## تاریخ کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های  $30^\circ$  و  $60^\circ$ ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

## درس آنلاین هندسه

### مثال



یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $30^\circ$  پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟  
حل : ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

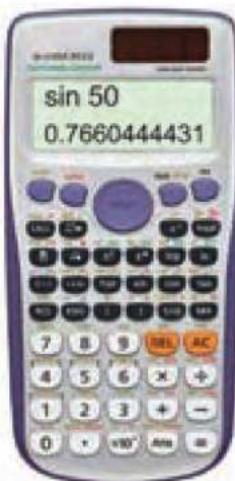
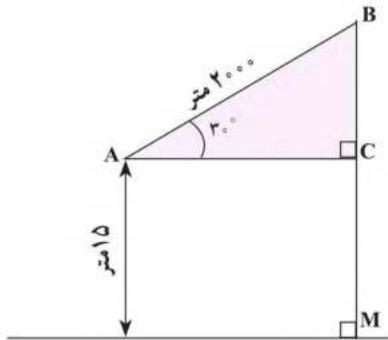
$$BC + MC = BC + \dots 15 \dots$$

بنابراین کافی است طول  $BC$  را پیدا کنیم. می‌دانیم  $\frac{1}{2} \sin 30^\circ$ . پس در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  داریم :

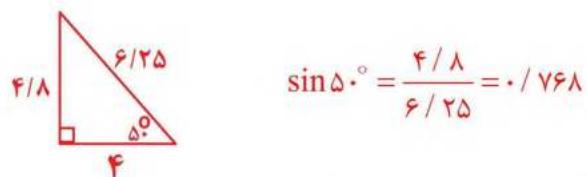
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = 1000$$

و از این رو

$$1000 + \dots 15 \dots = 1115 \text{ ارتفاع موشک}$$



۱ یک زاویه  $50^\circ$  رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $50^\circ$  را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را بدست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



$$\sin 50^\circ = \frac{4/8}{6/25} = 0.768$$

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث  $ABC$  در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :

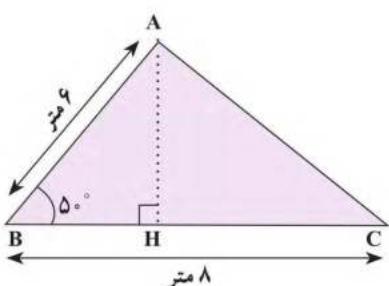
$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث } ABC$$

الف) با توجه به اینکه  $\sin 50^\circ \approx 0.76$ ، داریم :

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{6} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \approx 0.76 \times 6 = 4.56$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

$$\text{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 4.56 \times 8 = 18.24 \text{ مساحت مثلث}$$

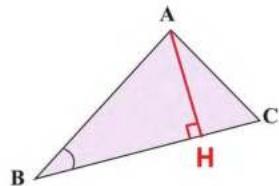


## کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1}{2} BC \times AH \\ \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \times AB \times \sin B$$

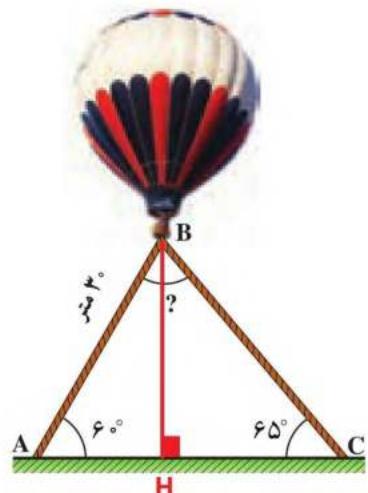


۲ در راهپیمایی ۲۲ بهمن، یک بالون اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است.

طناب یکی از طناب‌ها  $30^\circ$  متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

(الف) ابتدا اندازه زاویه  $B$  را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع  $AC$  را رسم کنید و آنرا  $BH$  بنامید.

$$60^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow B = 55^\circ$$



(ب) طول  $BH$  را با استفاده از سینوس زاویه  $A$  به دست آورید.

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$$

(پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه  $65^\circ$ ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

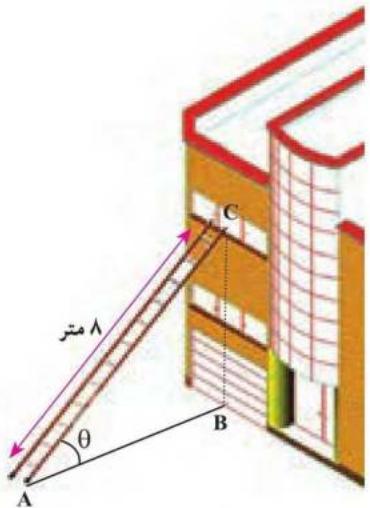
$$\sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{15\sqrt{3}}{BC} = \frac{0.906}{BC} \Rightarrow BC = \frac{15\sqrt{3}}{0.906} = 28.665$$

۳ مطابق شکل مقابل، نردنی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردنی با سطح زمین  $30^\circ$  باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردنی تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48}$$



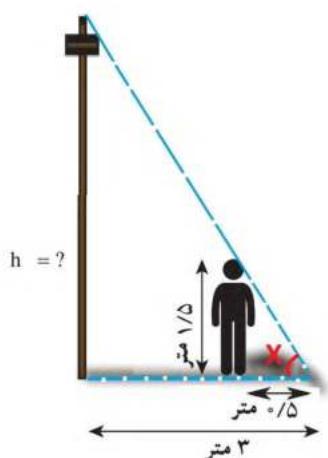
## تمرین

۴ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین  $1/5$  متر و طول سایه او در همان لحظه  $5/5$  متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

## شکل کتاب ایراد داشته که آن را اصلاح کرده و جواب می‌دهیم:

$$\tan x = \frac{h}{\frac{5}{5}} = \frac{1/5}{1/5} = 1 \Rightarrow h = 1$$

می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:  $h = 1$ . یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است.



## درس اول: مساحت هشت ضلعی منتظم

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \times AB \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$6 \times S_{AOB} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

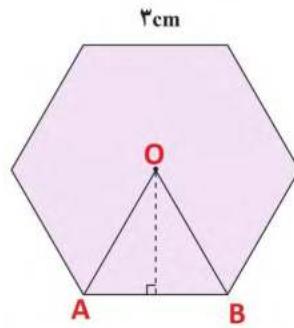


ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیر بسته، که آن را مدار می‌نامند، در حال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً همزمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

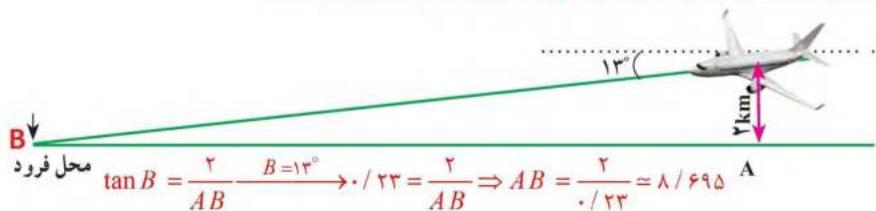
ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آتن نیست و آتن هر ماهواره می‌تواند حداقل  $\frac{4}{42}$  درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.

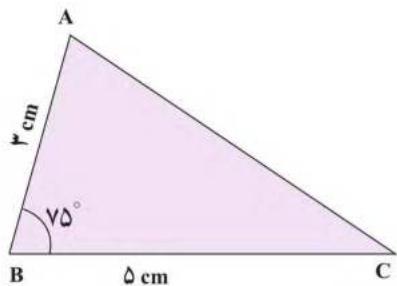


مطابق شکل، هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث  $AOB$  متساوی‌الاضلاع است  
 $OA = 3$   
بنابراین:  $\hat{A} = 60^\circ$

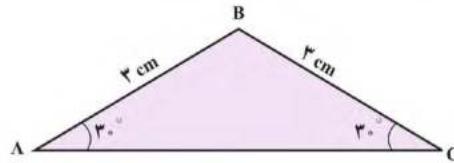
۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود  $13^\circ$  باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.  
طبق قضیه خطوط موازی، زاویه  $B$  نیز  $13^\circ$  درجه است.



فرض کنید  $\tan 13^\circ = \frac{r}{2}$ . مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



۴ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

روش اول (با استفاده از ماشین حساب):

$$\hat{B} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

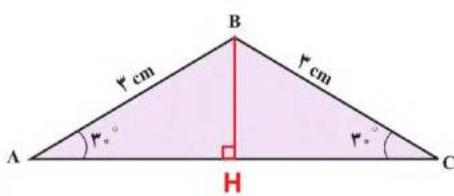
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

روش دوم (بدون استفاده از ماشین حساب):

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AH \times AB \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

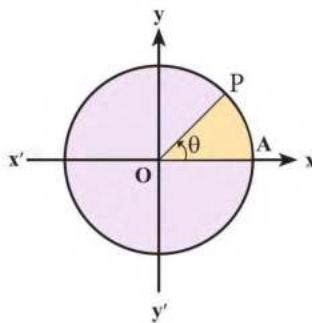
$$S_{\triangle ABC} = 2 \times S_{\triangle ABH} = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$



تهیه کنندگان:

جلبر علمری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی

## درس دوم: دایره مثلثاتی



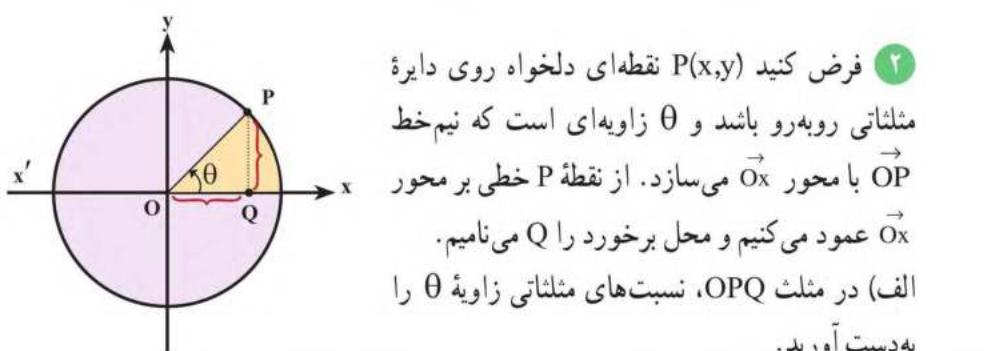
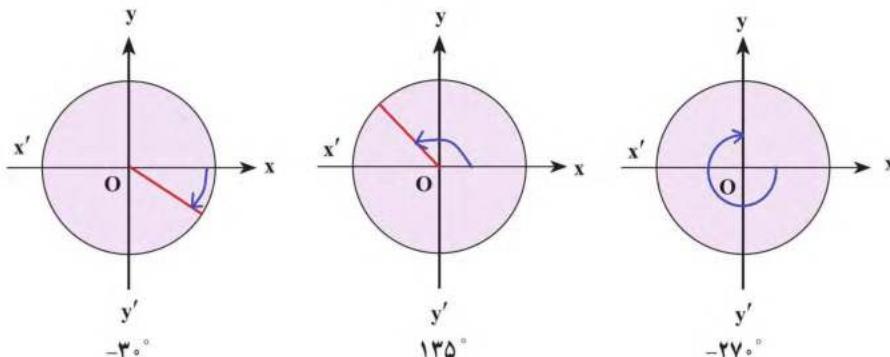
دایره رو به رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های  $-90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $-210^\circ$  و  $225^\circ$  داده شده‌اند.

### فعالیت

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.

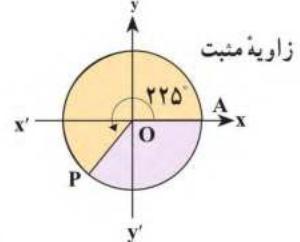
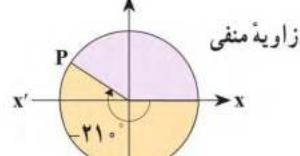
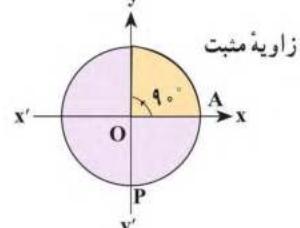
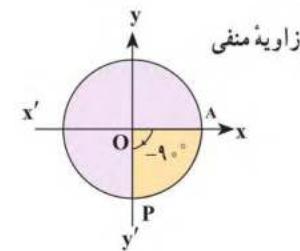


۲ فرض کنید (P(x,y) نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی رو به رو باشد و  $\theta$  زاویه‌ای است که نیم خط  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{Ox}$  می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور  $\overrightarrow{Ox}$  عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{PQ}{OQ}$$

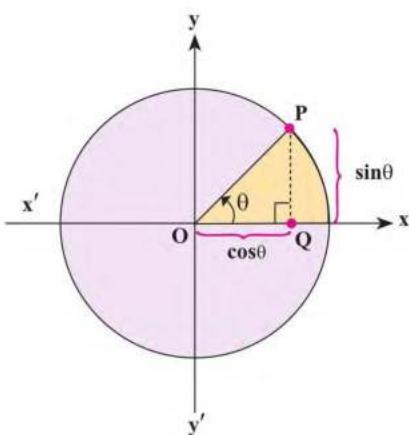


می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.

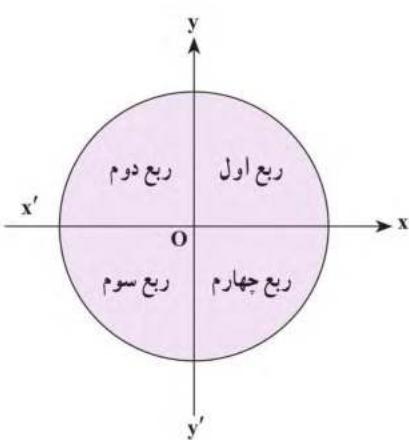


## گوشه‌گوشه مفهومی

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصله Q تا مبدأ با  $\cos\theta$  برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود، یعنی نقطه Q با  $\sin\theta$  برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور  $x'$  یا محور x را محور کسینوس‌ها و محور  $y'$  یا محور y را محور سینوس‌ها می‌نامیم. بعبارت دیگر، اگر P نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x هزاویه  $\theta$  می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات  $(x,y)$  است که در آن  $x=\cos\theta$  و  $y=\sin\theta$ .



**نکته:** دو محور عمود بر هم  $x'$  و  $y'$  صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه  $xoy$  را ربع اول، ناحیه  $yox$  را ربع دوم، ناحیه  $y'ox$  را ربع سوم و ناحیه  $xoy'$  را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

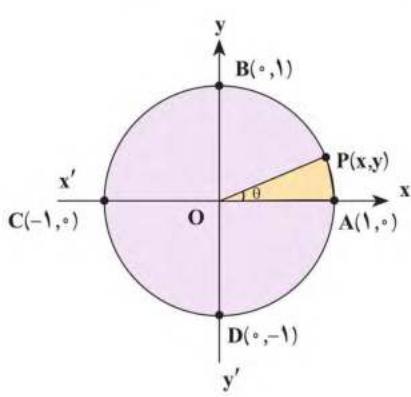
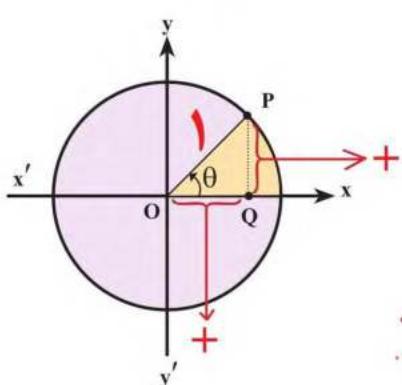
**نکته:** زاویه‌های  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  و  $360^\circ$  زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

### کار در کلاس

- ۱) مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟
- الف)  $-30^\circ$
  - ب)  $65^\circ$
  - ت)  $-95^\circ$
  - سوم
  - اول
  - چهارم

با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان رویه را به زاویه‌ای در ربع اول باند (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

در ناحیه ی اول، قسمت‌های مثبت دو محور مختصات وجود دارد (شکل رویرو). و می‌دانیم طبق تعریف، نسبت‌های مثلثاتی، همان نسبت اندازه‌های مشخص شده در شکل هستند لذا همگی مثبت خواهند بود.



می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $0^\circ$  را به دست آوریم. می‌دانیم در دایره مثلثاتی رویه رو، آنگاه نقطه P روی نصفه A قرار می‌گیرد و داریم  $\cos 0^\circ = 1$  و  $\sin 0^\circ = 0$ . تعريف  $\cot 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$  نمی‌شود (چرا؟).

$$\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$$

زیرا

### مثال

## فعالیت

۱ در دایره مثلثاتی رو به رو اگر  $\theta = 9^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

$$\tan 9^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

روی نقطه  $B(0, 1)$  واقع است بنابراین  $\cos 9^\circ = x_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $\sin 9^\circ = y_B = \frac{1}{2}$ .

۲ اگر  $\theta = 18^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

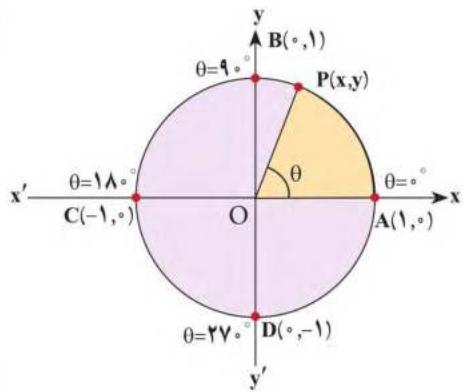
$$\tan 18^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

روی نقطه  $C(-1, 0)$  واقع است بنابراین  $\cos 18^\circ = x_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $\sin 18^\circ = y_C = 0$ .

۳ اگر  $\theta = 27^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

$$\tan 27^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

روی نقطه  $D(0, -1)$  واقع است بنابراین  $\cos 27^\circ = x_D = 0$  و  $\sin 27^\circ = y_D = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



## کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	$0^\circ$	$90^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \theta$	۰	۱	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۱
$\tan \theta$	۰	تعريف نشده	تعريف نشده	۰
$\cot \theta$	تعريف نشده	۰	تعريف نشده	تعريف نشده

در ربع اول است  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$   
در ربع دوم است  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$   
در ربع سوم است  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$   
در ربع چهارم است  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

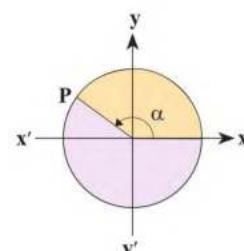
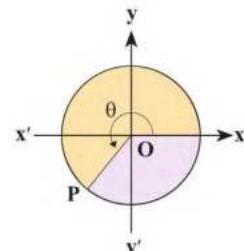
## فعالیت

۱ فرض کنید  $\theta$  زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه  $x = \cos \theta$  و  $y = \sin \theta$  و در ربع سوم،  $x, y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را در ربع سوم مشخص کنید.  
 $\sin \theta < 0$  ،  $\cos \theta < 0$  ،  $\tan \theta > 0$ .

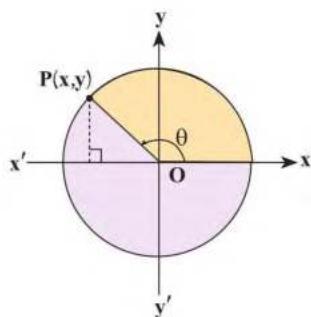
۲ فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای  $\alpha$  نیز تکرار کنید.  
 $\sin \theta > 0$  ،  $\cos \theta < 0$  ،  $\tan \theta < 0$ .

۳ جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم .....	ربع سوم .....	ربع چهارم .....
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-



نکته: برای هر زاویه دلخواه  $\theta$ ،  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  و  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$



آقای جلالی، از دانش آموزان پرسید: اگر  $\theta$  زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و  $\sin \theta = \frac{5}{7}$  آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کرد؟

**امین:** می‌دانیم  $\sin \theta = y = \frac{5}{7}$ ، بنابراین  $P$  نقطه‌ای به عرض ... است.

**علم:** درست است و حالا طول نقطه  $P$  چگونه به دست می‌آید؟

**امیرعلی:** طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم الزاویه داریم:  $1^2 + y^2 = x^2 + 25/49$ . بنابراین  $x^2 = 24/49$  و در

$$\text{نتیجه } x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{. اکنون داریم}$$

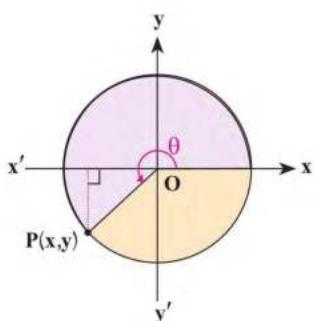
**علم:** آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

**محمد مهدی:** چون  $\theta$  زاویه‌ای در ربع ... است، پس طول نقطه  $P$  منفی است و از این رو  $x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$  قابل قبول است.

**علم:** استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه  $P$  نقطه‌ای به مختصات

$$\left( -\frac{2\sqrt{6}}{7}, -\frac{5}{7} \right) \text{ است. در نتیجه:}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-2\sqrt{6}}, \quad \cos \theta = x = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$



۱ فرض کنید نقطه  $P$  روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که  $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ . می‌دانیم  $y = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین ...

(الف) مختصات نقطه  $P$  را به دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

۲ اگر  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که  $\alpha$  در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

فقط می‌تواند در نواحی دوم یا سوم باشد، زیرا فقط در این نواحی کسینوس منفی است

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

این زاویه باید در ناحیه ی چهارم باشد پس هر زاویه از این ناحیه قابل قبول است به طور مثال زاویه ی  $300^\circ$  درجه می‌تواند جواب باشد.

## فعالیت

نمودار خط  $y=2x-4$  در شکل رویه رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x ها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب E و F بنامید.

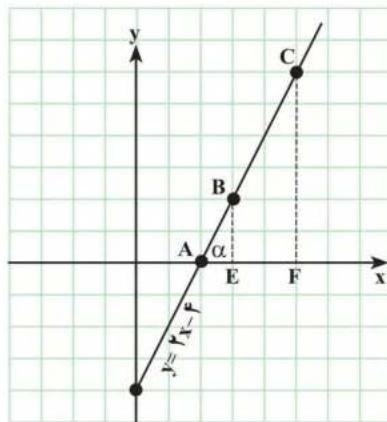
$$\text{الف) تانژانت زاویه } \alpha \text{ را به دست آورید.}$$

$$\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ب) شیب این خط را پیدا کنید.}$$

$$A(2,0), B(3,2) \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{2-0}{3-2} = 2$$

پ) از مقایسه قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.  
می‌توان نیجه گرفت تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی، برابر شیب خط است.



شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

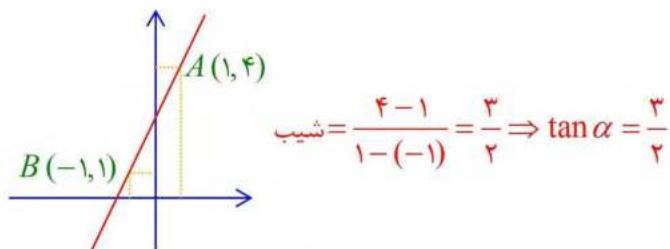
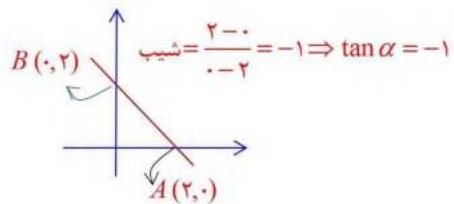
$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

## کار در کلاس

۱ فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

$$x+y=2$$

$$\text{الف) } 2y-3x=5$$



معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها  $30^\circ$  است و از نقطه  $(1,0)$  می‌گذرد.

$$m = \tan 30^\circ \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

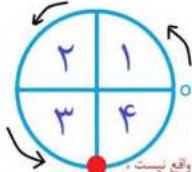
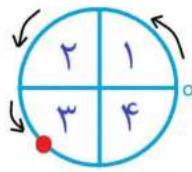
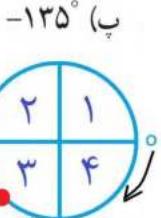
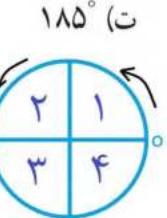
$$\Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نکته: اگر خطی با شیب  $m$  از نقطه  $(x_1, y_1)$  بگذرد  
معادله‌ی آن  $y - y_1 = m(x - x_1)$  است.

## تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلاً رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.



۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

### گوشی‌گیری در مثلثات

الف)  $\alpha$  در ربع چهارم) همچون مثال صفحه ۳۹ عمل می‌کنیم:

$$x = \frac{r}{\sqrt{3}} \xrightarrow{x^2 + y^2 = 1} \frac{r^2}{3} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}, \tan \alpha = -\frac{\sqrt{4}}{3}$$

$$\text{ب) } \beta \text{ در ربع سوم) } \sin \beta = \frac{-1}{2}$$

در اخترسناسی، اغلب به مسئله‌های برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدر مطلق برابر با نصف طول وتری به اندازه دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و ترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همینجا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیبارک، اخترسناس سده دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همه کارهای ریاضی دانان و اخترسناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی پرداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً  $30^\circ$  درجه به  $30^\circ$  درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترسناسی مفهوم تاثرات آن را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبه سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

۳ اگر  $\theta$  و  $\tan \theta$  هم علامت باشند، آنگاه  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در صورتی که هر دو مثبت باشند، در ربع اول، اما اگر هر دو منفی باشند در ربع چهارم

حدود زاویه  $\theta$  را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف)  $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$  ربع اول

۴ اگر  $\alpha$  در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟

چرا؟ ضرب آنها منفی شده است، پس دو حالت داریم:

اگر سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد، جواب ربع دوم است.

اما در صورتی که سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد، جواب ربع چهارم است.

۵ زاویه‌ای مثل  $\alpha$  پیدا کنید به‌طوری که  $\tan \alpha > \cot \alpha$ . اکنون زاویه‌ای مثل  $\beta$  پیدا کنید،

به‌طوری که  $\cot \beta > \tan \beta$ . از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در ربع اول اگر زاویه بیشتر از  $45^\circ$  درجه باشد، تاثرات آن بیشتر از کثائزات آن است.

$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 60^\circ > \cot 60^\circ$

$\beta = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 30^\circ > \tan 30^\circ$

۶ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور  $x$   $45^\circ$  است و نقطه  $(2, 0)$  روی آن قرار دارد.

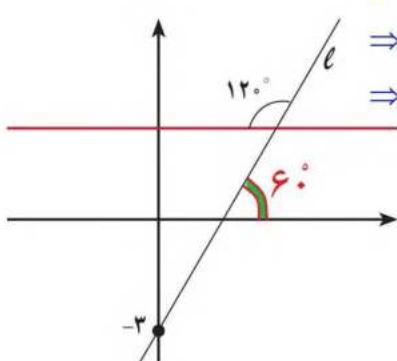
$$m = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 2$$

۷ با توجه به شکل زیر، معادله خط  $\ell$  را به دست آورید.

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, (-3, -3)$$

$$\Rightarrow y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$



تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی

### درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

#### معایل

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

**الف** اندازهٔ وتر یعنی x را باید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه  $\theta$  و  $\alpha$  به دست آورید.

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$$

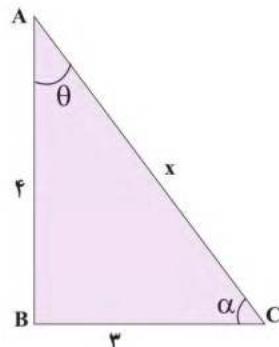
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{3}{4}$$



**ب** با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار  $\sin^2\theta + \cos^2\theta$  و  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$  را به دست آورید.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{و} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\theta \times \sin\theta = (\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$$

**پ** درستی رابطه  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

**ت** مشابه قسمت (پ) درستی رابطه  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  را بررسی کنید.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

اگر  $\alpha$  زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  جاهای خالی را پر کنید:

(الف)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

(ب)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آورده‌ید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه  $\alpha$  با توجه به ناحیه‌ای که زاویه‌ای در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار  $\cos \alpha$ ،  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  را به دست آورید.

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

کار در کلاس

**رابطه‌های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس**

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

۱

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

۲

اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$  آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

### اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ),  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  و

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ) را که به ازای هر  $\alpha$  همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید:



ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شباهه روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایه میله هم روی صفحه جابجا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

### مثال

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

حل:

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta)$$

$$= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta$$

### کار در کلاس

با فرض بامعنى بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (\text{الف})$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times 1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$(ب) \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{طرف راست} = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} + \cot \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha$$

کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

$$\text{تساوی صحیح نیست} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{تساوی صحیح است} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 - 2 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}) \times (\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حال باید درستی آن را در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی بسازید.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\times \cot \alpha} \cot \alpha + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \cot \alpha \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cot \alpha + \underbrace{\cot \alpha \tan \alpha}_{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

### تمرین

۱ فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

اگر  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$$

اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را به دست آورید.

$$\cos^2 135^\circ = 1 - \sin^2 135^\circ = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

اگر  $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $24^\circ$  را به دست آورید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \sqrt{3} \times -\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه  $20^\circ$  متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)،  $20^\circ$  باشد و  $\sin 20^\circ = 0.34$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید).

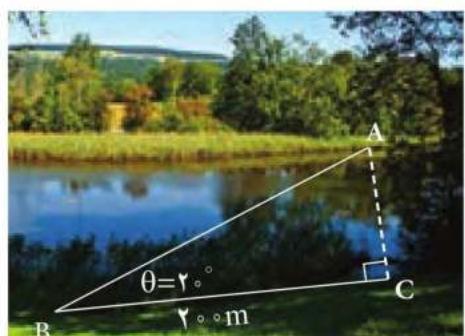
$$\cos 20^\circ = 1 - \sin^2 20^\circ = 1 - 0.1156 = 0.8844 \Rightarrow \cos 20^\circ = 0.9404$$

$$\tan 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{0.34}{0.9404} = 0.3615$$

$$\tan 20^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 0.3615 = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 7.2$$

البته روش‌های متفاوتی برای حل این سوال وجود دارد. و ممکن است

جواب‌های بدست آمده با توجه به میزان دقت، با هم تفاوت داشته باشند.



۴) با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{(الف)}$$

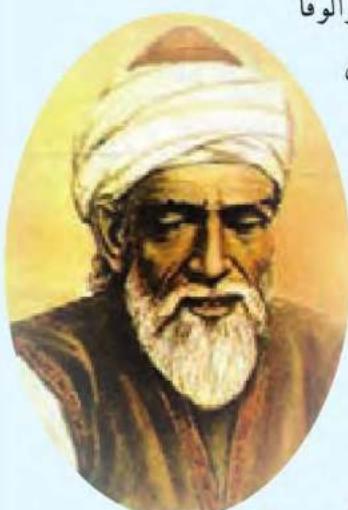
$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan \alpha)}{\tan \alpha + 1} = \tan \alpha \quad \text{(پ)}$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - 1 + \sin x = \sin x \quad \text{(ت)}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad \text{(ث)}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره‌ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (ه.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، تزد دایی و عمومیش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و تزد استادی مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوالحنفی در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقليدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس وغیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم ربیع‌الثانی ۳۸۸ (ه.ق) در بغداد درگذشت.



# توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشت خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و بروهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر معبد کاظمی آستانی و گروهی از بروهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشگاه پزشکی تولید مثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

**درس اول** ریشه و توان

**درس دوم** ریشه II ام

**درس سوم** توان‌های گویا

**درس چهارم** عبارت‌های جبری

## درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال  $2 = \sqrt[3]{8} = 2^3 = 8$ ; همچنین  $2 = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow 2^3 = 8$ . علامت  $\Rightarrow$  این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به‌طور خلاصه با علامت  $\Leftrightarrow$  نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم  $2 = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow 2^3 = 8$ .

### فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$\begin{array}{ll} (-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \\ (-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5 & \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt[2]{5})^2 = 50 \\ 2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2 & \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8 \\ 11^2 = 121 \Leftrightarrow \sqrt{121} = 11 & \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow 10^2 = 100 \\ (0/25)^3 = 0/625 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0/625} = 0/25 & \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (4\sqrt{3})^2 = 48 \\ (0/5)^3 = 0/25 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0/25} = 0/5 & \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2 = 45 \end{array}$$

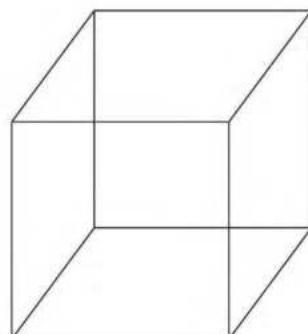
در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷	۱۲۵	-۱۰۰۰	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	-۳	۵	-۱۰	۱۵	۱۰	۹

### کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب  $a$  متر باشد، حجم آن برابر  $a^3$  متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶



احمد: چون  $3^3 = 27$  و  
 $2 < \sqrt[3]{25} < 3$ , پس  $\sqrt[3]{25}$  بهتر است  $\frac{2}{9}$  را امتحان کنم  
 $(\frac{2}{9})^3 = (\frac{2}{9})^2 \times \frac{2}{9}$   
 $= \frac{21}{9} \times \frac{2}{9}$   
 $= \frac{22}{81}$



محسن:  $25$  به  $27$  تزدیک‌تر است  
تا، پس بهتر است عدد  $\frac{2}{9}$  را  
امتحان کنم.  
 $(\frac{2}{9})^3 = (\frac{2}{9})^2 \times \frac{2}{9}$   
 $= \frac{24}{81} \times \frac{2}{9}$   
 $= \frac{24}{81}$



دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های رو به رو به دست آورده‌اند:  
روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

دبیر: ریشه سوم  $25$  تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به صورت تقریبی آن را برابر  $\frac{2}{9}$  بگیریم.  
 $\sqrt[3]{25} \approx \frac{2}{9}$

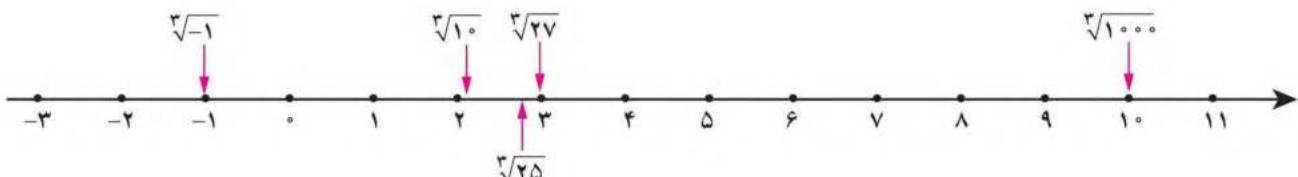
احمد: مقدار دقیق  $\sqrt[3]{25}$  چقدر است؟

دبیر:  $\sqrt[3]{25}$  یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد  $\sqrt[3]{25}$  استفاده می‌کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم  $25$  حاصل می‌شود.

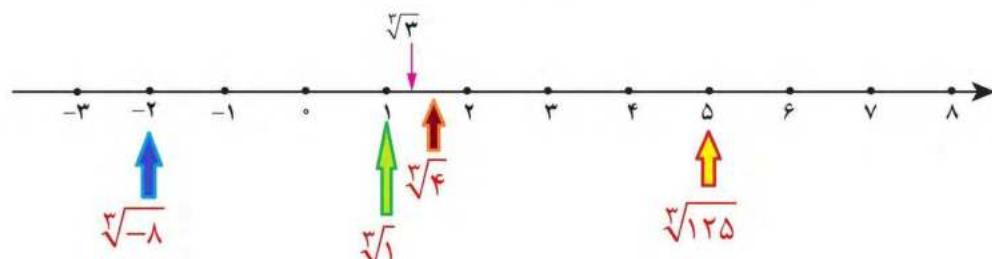
$\sqrt[3]{25}$  برای نمایش مقدار دقیق ریشه سوم  $25$  به کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند  $\frac{2}{9} \approx 0.222$  و  $\frac{2}{9} \approx 0.224$  کار می‌کنیم.

ریشه عددها را می‌توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



۱) مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} = 1 \quad \sqrt[3]{3} = 1.442 \quad \sqrt[3]{4} = 1.587 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$



۲ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متولی است :

الف) چون  $36 < 30 < 25$  پس  $\sqrt{30} < 5$ . همچنین چون  $8 < 5 < 2$  پس  $\sqrt[3]{5} < 1$ .

$$9 < 10 < 16 \Rightarrow \boxed{3} < \sqrt{10} < \boxed{4}$$

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \boxed{2} < \sqrt{7} < \boxed{3}$$

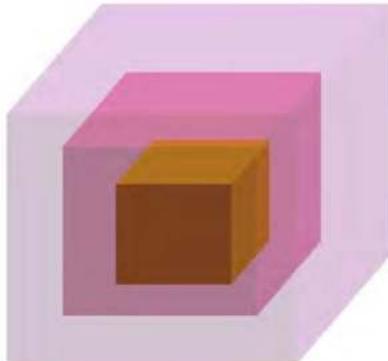
$$8 < 20 < 27 \Rightarrow \boxed{2} < \sqrt[3]{20} < \boxed{3}$$

$$-27 < -17 < -8 \Rightarrow \boxed{-3} < \sqrt[3]{-17} < \boxed{-2}$$

زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

$$\begin{array}{c} \text{ب) } \sqrt[3]{9} < 10 < \sqrt{27} \\ \text{پدرکت از } 229 \text{ و کوچکتر از } 1000 \text{ را نوشت} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 229 \quad 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{الف) } \sqrt{4} < 5 < \sqrt{25} \\ \text{پدرکت از } 16 \text{ و کوچکتر از } 25 \text{ را نوشت} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 16 \quad 25 \end{array}$$



سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ است و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید).

طول ضلع مکعب بیرونی ۴ و طول ضلع مکعب داخلی ۳ می‌باشد. پنایداین طول ضلع مکعب میانی می‌تواند هر یک از اعداد پین ۳ و ۴ باشد. به طور مثال می‌تواند  $3/4$  یا  $4/3$  باشد.

### فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هرتساویٰ توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

$$\begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ (-2)^4 = 16 \end{array} \Rightarrow \text{ریشه‌های چهارم} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 16 \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5^4 = 625 \\ (-5)^4 = 625 \end{array} \Rightarrow \text{ریشه‌های چهارم} \rightarrow \begin{array}{c} 5 \\ 625 \\ -5 \end{array}$$

$\sqrt[4]{625}$  عددی مثبت و برابر است با ریشهٔ چهارم مثبت عدد  $625$ ; یعنی  $\sqrt[4]{625} = 5$ . همچنین  $\sqrt[4]{625}$  عددی منفی است و برابر است با ریشهٔ چهارم منفی عدد  $625$ ; یعنی  $\sqrt[4]{625} = -5$ .

آیا  $-16$ - ریشهٔ چهارم دارد؟ **خیر** آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان  $4$  برسد، برابر  $-16$ - شود؟ **خیر** اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای **دو** ریشهٔ چهارم است که **قرينه‌ي** یکدیگرند.  
عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

صفر فقط یک ریشهٔ چهارم دارد و آن هم خود صفر می‌باشد.

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰۰۰۰۰	۲۱۲۵	۸۱
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	$\sqrt[4]{100}$
					$\sqrt[4]{2125}$
					$\sqrt[4]{81}$

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۰۰۰۰۰	۱۹	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{19}$	۴

۱ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟ (۱۰۰۰۰۰ و -۱)

۱ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{32} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{-10000032} = -0/2$$

۱ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن منفی است.

### تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5$$

$$-6 < -\sqrt{35} < -5$$

$$8 < \sqrt{75} < 9$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

$$-5 < \sqrt[3]{-90} < -4$$

$$6 < \sqrt[3]{250} < 7$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$-3 < -\sqrt[4]{20} < -2$$

$$-4 < -\sqrt[4]{120} < -3$$

$$4 < \sqrt[4]{400} < 5$$

$$\sqrt[5]{1} = 1$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$3 < \sqrt[5]{400} < 4$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10} = 3/1$$

$$\sqrt[5]{25} = 2/9$$

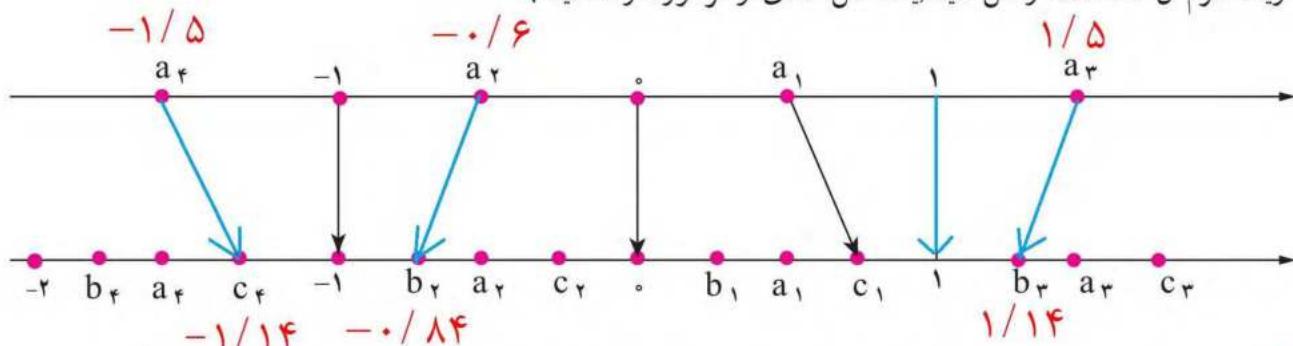
$$\sqrt[3]{7/25} = 1/9$$

$$\sqrt[5]{16} = 1/7$$

$$\sqrt[5]{64} = 2/2$$

$$\sqrt[4]{90} = 3/0$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و  $a > \sqrt[3]{a}$ . چه عددی می‌تواند باشد؟ می‌تواند هر عددی بین صفر و یک باشد.

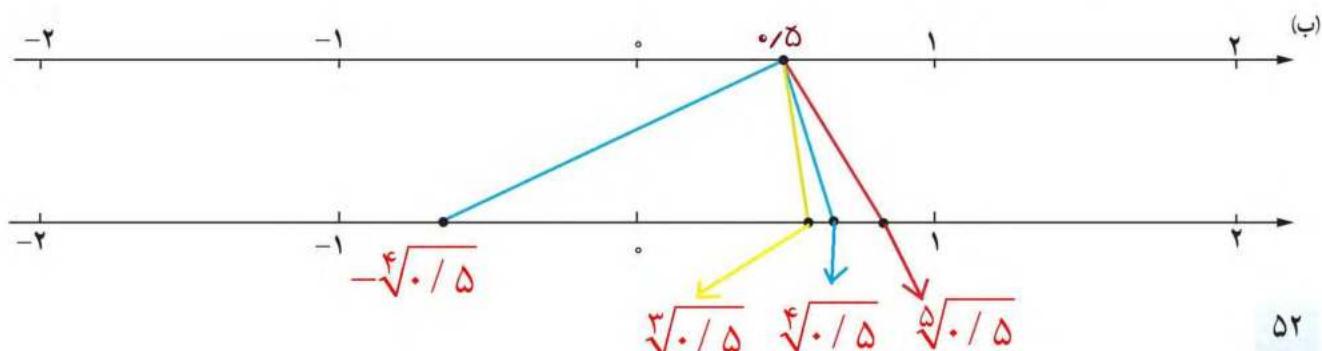
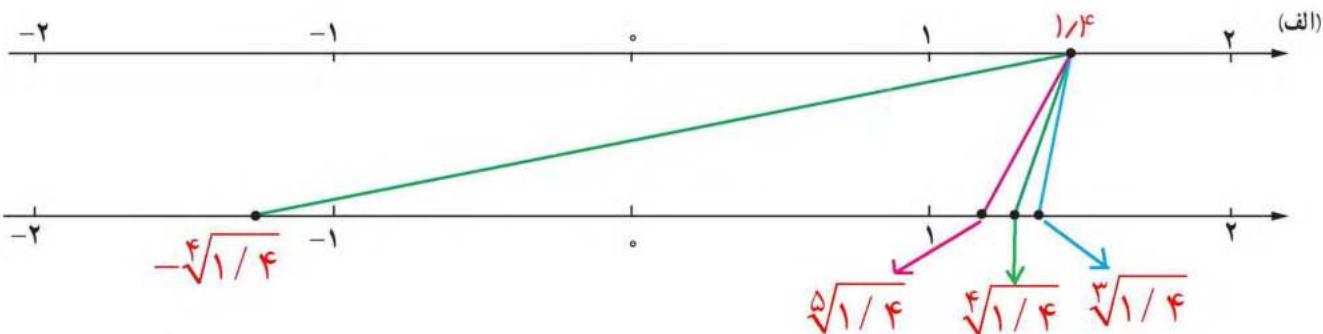
ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی  $\sqrt[3]{a} = a$ . چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (یا صفردیا)

پ) a عددی مثبت است و  $a < \sqrt[3]{a}$ . چه اعدادی می‌تواند باشد؟ حتماً عددی پر رگتار یک متواءد پود

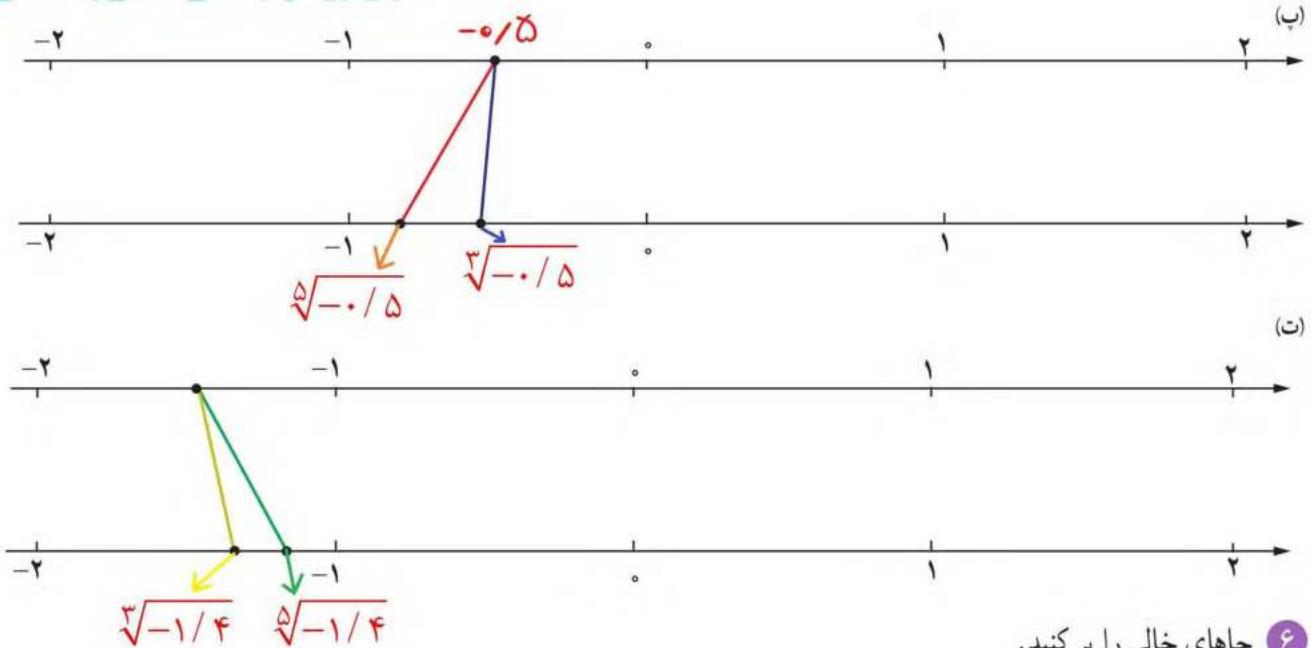
ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

در حالت الف: حتماً آن عدد کمتر از (-1) است. در حالت پ: حتماً آن عدد بین (-1) و صفر است.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



درس اول: مجموعه های متقارن و متماثل



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد  $3$  و  $\dots \sqrt[3]{16}$  ... ریشه های چهارم عدد  $\dots \sqrt[4]{16151}$  ... می باشند.

ب) اگر  $a = \sqrt[3]{16}$  باشد، در این صورت حاصل عبارت  $a^3 + 5 = 8 + 5 = 13$  را بیابید.

۷ می دانیم  $\sqrt[5]{16151} = 11$  ،  $\sqrt[7]{170000} = 11$  و  $\sqrt[11]{12} = 11$  و  $\sqrt[12]{11} = 11$  واقع است.

۸ در جاهای خالی یکی از علامت های « $<$ » ، « $>$ » یا « $=$ » را قرار دهید.

$$(-\sqrt{1})^5 > (-\sqrt{1})^3$$

$$(\sqrt{1})^5 < (\sqrt{1})^3$$

$$\sqrt[25]{2} > 2$$

$$(-\sqrt{2})^5 < (-\sqrt{2})^3$$

$$(-\sqrt{2})^5 < (-\sqrt{2})^3$$

$$\sqrt[5]{0.00001} = 0.1$$

۹ قرار دهید  $\boxed{\phantom{0}} = \sqrt[5]{a}$ . اگرnon با توجه به تعریف مشخص کنید  $\boxed{\phantom{0}}$  برابر چه عددی است؟  $a$  بنا بر این داریم  $\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a}$  در برابر  $\sqrt[5]{a}$  چه می توان گفت؟  $\boxed{\phantom{0}}$  برابر  $a$  است.



خواندنی

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت های بدن است. هر بافت سلول های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می تواند به سلول های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول های بدن را دارد. دانشمندان می گویند این سلول ها می توانند امکان معالجه بیماری های را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست شناسی و پژوهشی است. این سلول ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می شود. پیشرفت در زمینه سلول های بنیادی تنها متکی بر علم پژوهشی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول های بنیادی پیشرفت های چشمگیری داشته اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می شود.



درس دوم: ریشه  $n$  ام

## فعالیت

- ۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می توان برای ریشه های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه های دوم	ریشه سوم	ریشه های چهارم	ریشه پنجم	ریشه های ششم	ریشه هفتم	ریشه های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[4]{64} = \sqrt{2^2} = 2$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$	$\sqrt[7]{64} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$\sqrt[8]{64} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$
				$\sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$	$\sqrt[7]{64} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$\sqrt[8]{64} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

ریشه های ششم عدد ۶۴ اعداد  $\sqrt[6]{64}$  و  $-\sqrt[6]{64}$  - یا همان  $2$  و  $-2$  ... هستند؛ زیرا  $2^6 = 64$  و  $(-2)^6 = 64$ .

درباره ریشه های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می توانید بگویید؟ دارای یک ریشه ای هفتم و دو ریشه ای هشتم است.

به طور کلی اگر  $n \in \mathbb{N}$  ، درباره ریشه  $n$  ام عدد ۶۴ چه می توان گفت؟

اگر  $n$  فرد باشد دارای یک ریشه ای مثبت است و در صورتی که  $n$  زوج باشد دارای دو ریشه منفی است که با هم قرینه اند.

در حالت کلی تر اگر  $a$  یک عدد مثبت باشد و  $n \in \mathbb{N}$  ، درباره تعداد ریشه های  $n$  ام  $a$  چه می توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ گوییم :

اگر  $n$  فرد باشد دارای یک ریشه ای مثبت است و در صورتی که  $n$  زوج باشد دارای دو ریشه ای مثبت است که با هم قرینه اند و منفی

۲ جدول زیر را که درباره ریشه های مختلف عدد ۶۴ - است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد

ریشه های زوج ۶۴ - وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان عددی زوج برسد و مساوی ۶۴ - شود.

درباره ریشه های  $n$  ام ( $n \in \mathbb{N}$  - ۶۴) بحث کنید. اگر  $n$  فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که  $n$  زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر  $a$  یک عدد منفی و  $n \in \mathbb{N}$  باشد، درباره ریشه  $n$  ام  $a$  چه می توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ - گوییم :

اگر  $n$  فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که  $n$  زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر  $n \geq 2$  یک عدد طبیعی باشد،  $b$  را یک ریشه  $n$  ام عدد  $a$  می نامیم. هرگاه :

جدول زیر را کامل کنید.

$a > 0$	زوج $n$	دارای دو ریشه ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	۸۱ دارای دو ریشه چهارم $= \sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	فرد $n$	دارای یک ریشه ام $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = 27$ $n = 3$	۲۷ دارای یک ریشه ای سوم $= \sqrt[3]{27} = 3$ است.
$a < 0$	زوج $n$	ریشه $n$ ام وجود ندارد	$a = -1$ $n = 2$	پرای ۱- ریشه ای دوم وجود ندارد.
	فرد $n$	دارای یک ریشه ای $\sqrt[n]{a}$ است.	$a = -32$ $n = 5$	-۳۲ دارای یک ریشه ای پنجم $= \sqrt[5]{-32} = -2$ است.

## کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\sqrt[5]{125} = 5$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{128} = 2$$

$$\sqrt[5]{256} = 2$$

$$\sqrt[9]{-1} = -1$$

$$\sqrt[4]{625} = 5$$

$$\sqrt[4]{16} = -2$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2$$

$$\sqrt[3]{-0.10001} = -0.1$$

$$-\sqrt{1} = -1$$

$$\sqrt[6]{0} = 0$$

۱) الف) می دانید که  $x^2 = \sqrt{x^2}$  درباره  $\sqrt[x^4]{x^4} = |x|$  چه حدسی می زنید؟ درستی حدس خود را درباره چند عدد آزمایش کنید.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \\ |-2| = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2|$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{(3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3 \\ |3| = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{(3)^4} = |3|$$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 \text{ غلط}$$

$$\sqrt[5]{35} = 3 \text{ صحیح}$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = -2 \text{ غلط}$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = 3 \text{ صحیح}$$

$$\sqrt[5]{(-3)^5} = -3 \text{ صحیح}$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = 2 \text{ صحیح}$$

پ) به طور کلی اگر  $n$  زوج باشد،  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$  و اگر  $n$  فرد باشد  $\sqrt[n]{a^n} = a$ .

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4} \neq (\sqrt[4]{-2})^4$$

وجود ندارد

ث) در قسمت (ث) تساوی بهزای چه مقادیری برای  $a$  و  $n$  برقرار است؟ اگر  $a$  عددی مثبت باشد، پرای هر عدد طبیعی  $n$  تساوی پرقرار است، (مادر صورتی که  $a$  عددی منفی باشد، فقط به ازای  $n$  های طبیعی فرد، تساوی پرقرار است.

## فعالیت

در سال نهم دیدید که :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} : b$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} : a$$

آیا رابطه بالا درباره  $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}$  نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید. پله در صورتی که هر دو عدد نامنفی باشند، تساوی پرقرار است.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = 6 \\ \sqrt[4]{16 \times 81} = \sqrt[4]{1296} = 6 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \times 81}$$

با توجه به اینکه  $4$  یک عدد زوج است، باید  $a$  و  $b$  ..... باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots \dots \dots 8 \dots \dots \dots$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{1296} = 6$$

در برآورده  $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$  چه می‌توان گفت؟ در این مورد نیز تساوی پرقرار است.

آیا  $a$  و  $b$  حتماً باید مثبت باشند؟ خیر لازم نیست

مثالی از  $a$  و  $b$  مثبت و مثالی از  $a$  و  $b$  منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

به طور کلی داریم :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & \text{و } a, b > 0 \\ \sqrt[n]{ab} & \text{دلخواه و یک عدد طبیعی فرد } a, b \end{cases}$$

قرارداد : به طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم :

وقتی می‌نویسیم  $\sqrt[n]{a}$  و  $n$  را زوج فرض می‌کنیم،  $a$  را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عده‌های منفی بی معنا هستند. پس هرگاه  $\sqrt{x}$  نوشتیم، از آن می‌فهمیم که  $x \geq 0$  است. تساوی‌های فوق را می‌توان به صورت مقابله نمایش داد :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

$$(\sqrt[5]{2})^5 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^5} = \sqrt[5]{2^5} \quad \text{آیا } (\sqrt[5]{2})^5 \text{ و } \sqrt[5]{2^5} \text{ با هم برابرند؟ بله یا هم پرایپرد. زیرا:}$$

در برآورده  $\sqrt[4]{(-2)^4}$  چه می‌توان گفت؟

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2 \quad \text{تعریف نشده است. ولی: } (\sqrt[4]{-2})^4$$

با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[5]{2})^3 &= \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^3} \\ &= \sqrt[5]{2^3} \end{aligned}$$

درستی رابطه  $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$  را با مقداردهی‌های مختلف به  $m, k$  و  $a$  بررسی کنید (اگر  $k$  زوج باشد،  $a$  باید مثبت باشد).

$$(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^3}$$

$$(\sqrt[5]{2})^4 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^4}$$

$$(\sqrt[4]{-2})^3 = \sqrt[4]{-2} \times \sqrt[4]{-2} \times \sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[4]{(-2)^3}$$

$$(\sqrt[4]{-2})^4 = \sqrt[4]{-2} \times \sqrt[4]{-2} \times \sqrt[4]{-2} \times \sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{(-2)(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[4]{(-2)^4}$$

## فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

	زوج $n$	$a > 0$	$n = 4$ $a = 2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ $(2 =  \pm )$
$\sqrt[n]{a^n}$		$a < 0$	$n = 4$ $a = -2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ $(2 =  -2 )$
	فرد $n$	$a > 0$	$n = 3$ $a = 2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
		$a < 0$	$n = 3$ $a = -2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟  
در صورتی که  $n$  فرد باشد  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$  است. اما اگر  $n$  زوج باشد است.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

	زوج $n$	$a > 0$	$n = 4$ $a = 16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
$(\sqrt[n]{a})^n$		$a < 0$	$n = 4$ $a = -16$	تعريف شده $\rightarrow (\sqrt[4]{-16})^4$
	فرد $n$	$a > 0$	$n = 3$ $a = 8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$
		$a < 0$	$n = 3$ $a = -8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟ همواره  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  است، فقط در حالتی که  $n$  زوج است،  $a$  نمی‌تواند منفی باشد.

## تمرین

۱) الف) یکی از علامت‌های  $a^n > b^n$  را در  $\square$  قرار دهد.

$$(0/5)^3 \boxed{>} (0/5)^5$$

$$\sqrt[3]{0/25} \boxed{<} \sqrt[5]{0/25} \quad \text{اصلاح شد په ۰/۲۵} \leftarrow$$

ب) وقتی  $a < 1$  است، یکی از علامت‌های مقایسه را در  $\square$  قرار دهد.

$$a^3 \boxed{>} a^5$$

$$\sqrt{a} \boxed{<} \sqrt[3]{a}$$

۲) فرض کنیم  $a = -1$  است، در  $\square$  علامت مناسب را قرار دهد.

$$\sqrt[n]{a} \boxed{=} \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \boxed{=} \sqrt[n+1]{a}$$

$$a^3 \boxed{>} a^5$$

$$a^3 \boxed{=} a^5$$

۳) با توجه به تعریف ریشه (اگر  $b^n = a$  آنگاه  $\sqrt[n]{a} = b$ )، نشان دهید برای هر عدد  $a$  و هر عدد طبیعی  $n$  (به شرط با معنا بودن رادیکال)

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = b^n = a \quad \text{رابطه زیر برقرار است:}$$

۴) آیا تساوی  $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  برقرار است؟  $n$  را برابر ۴، ۳ یا ۵ بگیرید و به جای  $a$  و  $b$  مقدارهای عددی بدھید.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{8}} = 1+2=3 \\ \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{9} = 2/0.8 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{1+\sqrt[4]{8}} \neq \sqrt[4]{1+8}$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{-1+\sqrt[4]{-32}} = -1+(-2)=-3 \\ \sqrt[4]{-1+(-32)} = \sqrt[4]{-33} = -2/0.1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{-1+\sqrt[4]{-32}} \neq \sqrt[4]{-1+(-32)}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[5]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

۵) عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow \sqrt[5]{2^{-5}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{3^{-4}} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}$$

۶) به جای  $a$  و  $b$  و عدد طبیعی  $n$  عدهایی قرار دهید؛ به طوری که :

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

الف) تساوی  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  برقرار باشد.

منفی

ب) تساوی  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  برقرار نباشد. وقتی  $n$  زوج است،  $a$  و  $b$  هر دو منفی (اند).

است در حالی که  $\sqrt[4]{\frac{-16}{-81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{-2}{-3}\right)^4} = \frac{2}{3}$  تعریف نشده است.

## درس سوم: توان های گویا

## فعالیت



پدر محمد یک زیست‌شناخت است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت  $n$ ام برابر  $2^n$  گرم می‌شود:

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

محمد از پدرش برسید: «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت: حدس می‌زنم وزن آنها  $\frac{1}{2}$  گرم شده باشد. چون نیم همان  $\frac{1}{2}$  است.

پدرش گفت:  $\frac{1}{2}$  چقدر است؟

محمد گفت: نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن باکتری‌ها  $b$  برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر  $b \times b = b^2$  شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس  $2 = b^2$ ؛ یعنی  $b = \sqrt{2}$  (زیرا  $b$  مثبت است).

نتیجه جالبی است!  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ . مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف

کنیم:  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}, \dots$ ؛ همچنین برای عدددهای دیگر  $\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$ . می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم.  $a$  عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی  $2 \geq n$ ، توان  $\frac{1}{n}$  عدد مثبت  $a$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر  $a < 0$  در این صورت  $a^{\frac{1}{n}}$  تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند  $\frac{1}{(-1)}$  و  $\frac{1}{(-2)}$  تعریف نمی‌شوند.

## فعالیت

۱) توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\frac{1}{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{1}{3^2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{4}$$

$$\frac{1}{5^7} = \sqrt[7]{5}$$

$$\frac{1}{5^2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{(-3)^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[5]{-3}$$

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[6]{6}$$

$$\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{81}$$

$$\frac{1}{(-5)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{-5}$$

کدام درست است؟

**غلط**  $a^{-2} = -\frac{1}{(3^2)^{\frac{1}{5}}} = -\frac{1}{3^{\frac{2}{5}}}$  (الف)

**صحیح**  $a^{-2} = \sqrt[2]{-\frac{1}{3^2}} = -\sqrt{3^2}$  (ب)

## فعالیت

حاصل  $a^{\frac{m}{n}}$  که  $a > 0$  و  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نمایه‌ای طبیعی یادداشتم هست چگونه عمل کردیم؟

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

(قاعده ضرب توان)

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{7}{3}} = 2^{\frac{2 \times 1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$5^{\frac{8}{3}} = 5^{\frac{8 \times 1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی:

هرگاه  $a > 0$  برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$ ، توان کسری و غیرصحیح  $\frac{m}{n}$  را برای چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

(پ)  $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$

(ب)  $\sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}}$

(الف)  $\sqrt[5]{5^2} = 5^{\frac{2}{5}}$

(ث)  $\sqrt[4]{16^{\frac{1}{2}}} = 16^{\frac{1}{4}}$

(ت)  $\sqrt[7]{(-6)^2} = (-6)^{\frac{2}{7}}$  تعریف نشده

اگر  $r$  و  $s$  دو عدد گویا باشند، و  $a > 0$  قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

۱)  $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲)  $(a^r)^s = a^{rs}$

۳)  $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداقل رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، تعدادی از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملأ چنین اتفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهد بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^3} \times 3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^3}} \times \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{3}{\sqrt[2]{2}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{13}{12} = 2^{+1} = 2^2 \times 2^{-1} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4^{\frac{1}{4}}} = 4 \times \sqrt[4]{4} = 4\sqrt[4]{4^2}$$

$$\sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{4^2 \times 4^2} = \sqrt[4]{4^4} \times \sqrt[4]{4^2} = 4\sqrt[4]{4^2}$$

روش ۲۶

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{1}{8} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 2$$

$$\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$$

$$(\sqrt[4]{16})^3 = 16^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{4} \times 3} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 2$$

$$\sqrt[3]{6^3} = 6$$

$$\sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{3}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} = 5$$

رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[5]{2^6} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\sqrt[5]{-27} = -3$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}}$$

جدول‌های زیر را کامل کنید:

$a > 0$	$a^3$	$a^{-3}$	$a^*$	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = 0$	$0^3$	$\frac{1}{0^3}$	$0^*$	$0^{\frac{1}{2}}$	$0^{\frac{2}{3}}$
$a < 0$	$a^3$	$a^{-3}$	$a^*$	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = -1$	$(-1)^3$	$\frac{1}{(-1)^3}$	$(-1)^*$	$(-1)^{\frac{1}{2}}$ تعریف نمی‌شود	$(-1)^{\frac{2}{3}} = 1$

### فعالیت

با استفاده از نمای کسری نشان دهید که  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$  است. تساوی را کامل کنید ( $a > 0$ ).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

دیگر: به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً  $\sqrt[4]{81} = 3$

به علاوه در تعریف نمای کسری  $a^{\frac{1}{n}}$  باشد  $a$  عددی مثبت فرض شود. اکنون  $\sqrt[4]{(-3)^4}$  را به دست آورید.

نسترن: اگر جای توانها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دیگر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[ (-3)^{\frac{1}{4}} \right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم  $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$  چون در تعریف  $a^{\frac{1}{n}}$  گفتیم  $a$  باید مثبت باشد.

دیگر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمدیده: بهتر است اول  $\sqrt[4]{(-3)^4}$  را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$$

دیگر : آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می توانید، همان گونه که قبل اگفتم چون  $4$  عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$$

با توجه به فعالیت ۱ در صفحه قبل تساوی ها را کامل کنید.

$$(5^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \quad \text{(الف)}$$

$$(4^7)^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\sqrt[5]{4}} = 4^{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{25}} = 4^{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}} \quad \text{(ب)}$$

پ) اکنون برای هر عدد  $a > 0$ ، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح  $r$  و  $s$  درستی تساوی  $(a^r)^s = a^{rs}$  را برای  $r = \frac{1}{4}$  و  $s = \frac{1}{3}$  تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}$$

### تمرین

۱ هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{lllll} 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} & \frac{1}{3^3} \times \frac{2}{2^3} = \frac{2}{3^2} = \sqrt[3]{2^2} & 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} & 4^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{4^3} & (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \\ a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2} & \frac{1}{3^2} = \sqrt{3} & 32^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} & 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^2} & 17^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}} & 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} \end{array}$$

۲ هر یک از رادیکال ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه عدد مثبت باشد.

در این تمرین پا فرض مثبت پذیر  
پاسخ ها نوشته شده اند.

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad \sqrt[17]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{17}} = a^{\frac{4}{17}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

آیا تساوی  $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$  همواره برقرار است ( $a > 0$ )؟ طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt[4]{2^2}$  و  $\sqrt[8]{2^3}$  برابر باشند.

پله این تساوی پرای اعداد مثبت  $a$  همواره برقرار است.

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[3]{2^{3 \times 1}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt{2} \quad \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2 \times 2]{2^{2 \times 1}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

۳ فرض کنیم  $a = 64$  و  $r = \frac{1}{2}$  و  $s = \frac{1}{3}$  مقدارهای عددی  $\frac{a^r}{a^s}$  و  $a^{r-s}$  را محاسبه و با هم مقایسه کنید.  
اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای  $a$ ،  $r$  و  $s$  انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای  $\frac{a^r}{a^s}$  و  $a^{r-s}$  را محاسبه و با هم مقایسه کنید.  
می توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2 \\ a^{r-s} = 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{729^{\frac{1}{2}}}{729^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{729}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{27}{9} = 3 \\ a^{r-s} = 729^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{1024^{\frac{1}{2}}}{1024^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{1024}}{\sqrt[4]{1024}} = \frac{32}{4} = 8 \\ a^{r-s} = 1024^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 1024^{\frac{1}{4}} = (2^1)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

۴ حساب کنید.

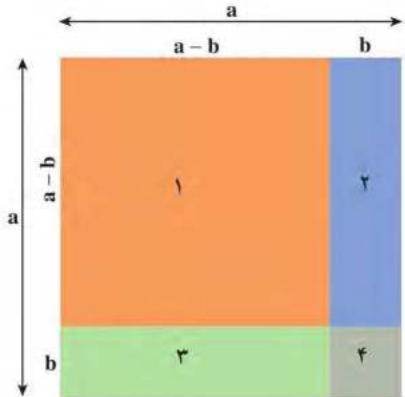
$$\sqrt[5]{\sqrt{5}} = \sqrt[5]{5}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{9} = 3$$

## درس چهارم: عبارت‌های جبری

## فعالیت



$$\begin{aligned} S_1 &= (a-b)^2 \\ S_1 &= S - S_r - S_r - S_r \\ &= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2 \\ \left(\frac{16}{5}\right)^2 &= \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25} \\ \text{یا اگر در رابطه (1) به جای } b-a &- قرار دهیم، به دست می‌آوریم: \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

گاهی هم دو اتحاد (1) و (2) را با هم می‌نویسیم :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

با محاسبه  $(a+b)^3$  اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است.  
جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{2a^2b} + \underline{2ab^2} + ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشد، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم  $b$  را در سرتاسر اتحاد فوق به  $-b$ - تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم :

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} - b^3$$

۲ یک بار دیگر  $(a-b)^3$  را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \\ = (a^3 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - \underline{a^2b} - \underline{2ab^2} + \underline{ab^3} - b^3$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلًاً

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارتهای  $a-b$  را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارتهای جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های پیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 2ab + b^3$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2bc + 2ca$$

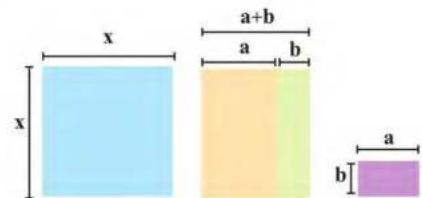
$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

## مثال ۱

عبارت  $2x^3 + 3x^2 + x$  را تجزیه کنید.

می‌نویسیم :

$$2x^3 + 3x^2 + x = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + x \\ = (x+1)^2 + x(x+1) \\ = (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1)$$



## مثال ۲

عبارت  $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^3$  را تجزیه کنید :

$$a^3 - 2ab + a^2b - 2b^3 = a^3(a+b) - 2b(a+b) \\ = (a+b)(a^2 - 2b)$$

	a	b	c
a	$a^3$	$ab$	$ac$
b	$ab$	$b^3$	$bc$
c	$ac$	$bc$	$c^3$

## در دریافت

حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + \cancel{a^2b} - \cancel{a^2b} + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

۱ با استفاده از پرسش ۱، عبارتهای  $a^2 + b^2$  و  $a^3 - b^3$  را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

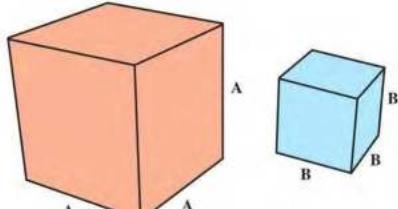
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

۱ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

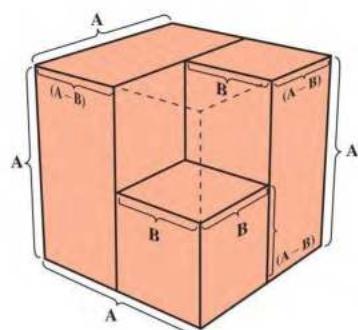
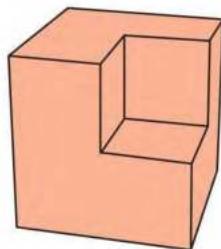
(اعدادهای پاچ و لاغر)

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



$$A^3 - B^3$$



هر یک از عبارت‌های  $a^3 - b^3$  و  $a^3 + b^3$  را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹ و ... .

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

هر یک از عبارت‌های  $a^3 - b^3$  و  $a^3 + b^3$  یک شمارنده  $a-b$  است. همچنین  $a^3 - b^3$  هم مضرب  $a-b$  و هم مضرب  $a+b$  است.

آیا  $a+b$  مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آیند:

... و  $(a+b)(a-b)$  و  $(a+b)(a^2 + ab + b^2)$  و  $(a+b)^3$  بعضی از مضرب‌های  $a+b$  بعضی از مضرب‌های  $a-b$  را بنویسید.

$$3(a-b), (a-b)(a^2 + ab + b^2), (a-b)(x + y - z), \dots$$

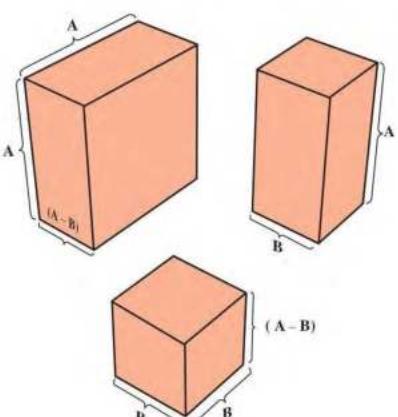
۲ دو عبارت بنویسید که  $a-b$  شمارنده هر یک از آنها باشد.

در این مورد می‌توان دو اتحاد را مثال زد:

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 \quad \text{اتحاد چاچ و لاغر:}$$

۳ عبارت  $a^3 - 27a^3$  مضرب کدام یک از عبارت‌هایست؟

$$\text{الف) } a-1 \quad \text{ب) } 3a+1 \quad \text{ت) } 3a+1 \quad \text{پ) } 9a^3 + 3a + 1 \quad \text{ز) } 3a-1$$



با توجه به تعریفی آن -طبق اتحاد چاچ و لاغر- یعنی:  $(3a-1)(9a^2 + 3a + 1)$

هر دو گزینه‌ی پ و پ صلحیح هستند.

نکته: عبارت  $\sqrt[3]{(a+b)}$  یک مضرب  $a+b$  محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

یادآوری: به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند. (ریاضی نهم صفحه ۱۴)

گزینه‌های الف و پ عبارت گویا هستند ولی گزینه‌های پ و پت گویا نیستند.

$$\text{الف) } \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \quad \text{پ) } \frac{3x - \sqrt{7}}{x^2}$$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر نمی‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1, \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}$$

بنابراین به ازای  $-1$  و  $1$  تعریف نمی‌شود.

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از  $x$  تعریف نمی‌شود؟

چهارم

۶ حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

ششم

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2(\sqrt{x}-1)+3}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$$

الف) با توجه به این که می‌دانیم  $\sqrt{x}-1$  را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$$

ب) با توجه به این که می‌دانیم  $x-1$ ، عبارت  $(x-1)(x+1)=x^2-1$  را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$= \frac{(x+1)(x^2+1)+(x-1)(x^2+1)-(x^2+1)+(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2+x+\cancel{x^2+x^2+x^2}-1+\cancel{x^2}-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^2+2x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 - 1^3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^3 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^3 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)} = \frac{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + x + 1}{x^2-1}$$

ذار در کلاس

۷ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

$$\text{الف) } \frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{\cancel{(x^2+1)}^4} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^7-1}{(x-1)^7} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}^7} = \frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-1)^7}$$

$$\text{پ) } \frac{x^7+1}{x^4-1} = \frac{\cancel{x^4+1}}{\cancel{(x^2+1)(x^2-1)}} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{پ) } \frac{y^5-y}{y^5+y^4+y} = \frac{\cancel{y}(y^4-1)}{\cancel{y}(y^4+y+1)} = \frac{(y^4-1)(y^4+1)}{y^4+y+1} = \frac{\cancel{(y-1)}(y^4+y+1)(y^4+1)}{\cancel{y^4+y+1}} = (y-1)(y^4+1)$$

$$\text{پ) } \frac{y^5-y^3-12y}{8y^5+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{\cancel{y}(y-2)(y+2)(y^2+3)}{\cancel{8y}(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$$

در اتحاد  $a^3-a+1=(a+1)(a^2-a+1)$  قرار دهد  $\sqrt[3]{x^2}=a$  و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2}^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

$$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2}^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

**گویا کردن مخرج های گنگ :** صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت های ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)((\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - y}$$

**تمرین ۱**

هر یک از عبارت ها را تا حد ممکن (به عبارت های گویا) تجزیه کنید.

$$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{الف)$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \quad \text{ب)$$

پ)  $x^2 + y^2$  تجزیه پذیر نیست

۲) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y} \quad \text{الف)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x - 8} \quad \text{ب)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x + y} \quad \text{پ)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} - \frac{5x}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} - 2 - 5x}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 5x - 1}{x - 1} \quad \text{ت)$$

۳) بعضی از ضرب های عددی را با استفاده از اتحادها می توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب ها را ذهنی انجام دهید.

$$\text{الف) } 16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$$

$$\text{ب) } 105^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$$

$$\text{پ) } 100 \cdot 7^2 = (100 + 7)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 7 + 7^2 = 10000 + 1400 + 49 = 11449$$

$$\text{ت) } 99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

۴

کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

ابتدا تک تک کسرها را گویا کرده سپس چاکرین می کنیم:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{1+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

۵ عبارت  $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$  را تجزیه کنید پا اجازه مولف سوال را به شکل زیر اصلاح کرده و تجزیه می کنم:

$$\begin{aligned} a^6 - 3b^6 + 2a^3b^3 &= \underline{a^6 - a^3b^3} + \underline{3a^3b^3 - 3b^6} = a^3(a^3 - b^3) + 3b^3(a^3 - b^3) = (a^3 - b^3)(a^3 + 3b^3) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + 3b^3) \end{aligned}$$

خواندنی

\* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه تایی فیثاغورسی می نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه تایی ها را می توانید شناسایی کنید؟

\* (جادوی توان) محاسبات نشان می دهد :

$$(1/\circ 1)^{365} = 37/8$$

$$(0/\circ 99)^{365} = 0/\circ 3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال  $(1/\circ 1)^{365}$  و  $(0/\circ 99)^{365}$  را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره وری) کار افزایش می یابد. شما هم داستانی در باب توان ها بنویسید.

\* (مثلث خیا)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

چه رابطه ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

ضد رایب موجود در بسط  $(a+b)^n$  همان اعداد داده شده در سطر  $n+1$  مثلث خیام است.

می توانید توان چهارم دو جمله ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$\begin{aligned} &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی



## معادله‌ها و نامعادله‌ها

سد دز، خوزستان



سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینه ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

درس اول

سهمی

درس دوم

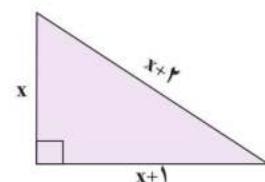
تعیین علامت

درس سوم

## درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متولی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟).

زیرا رابطه فیثاغورس در مورد آن صدق می‌کند:  $3^2 + 4^2 = 5^2$



از خواهر بزرگ تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متولی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را  $x$  و طول اضلاع دیگر را اعداد متولی بعد از  $x$ ، یعنی  $x+1$  و  $x+2$  در نظر گرفت و به کمک رابطه فیثاغورس، رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث به دست آورد:

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

اکنون او می‌خواست معادله به دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای  $x$  پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادله بالا را ساده کرد و آن را به شکل  $= 0$  نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

که در آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

## درس اول: مادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

### حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

#### فعالیت

می دانیم که تجزیه یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه هایی که در حل معادله درجه دوم استفاده می شوند، عبارت اند از:

(۱) فاکتورگیری :

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج :

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک :

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 3 = 0$  را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱ با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - \underline{\quad}) = 0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و  $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی :

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

۱ از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-\underline{\quad}) = 0 \Rightarrow x+1=0 \text{ یا } x-\underline{\quad}=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=\underline{\quad}$$

برای اطمینان از صحت جواب های حاصل شده، می توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = ?$$

$$1 + 2 - 3 = ?$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = \underline{\quad}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\underline{\quad}^2 - 2(\underline{\quad}) - 3 = ?$$

$$9 - 6 - 3 = ?$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

آیا هر دو جواب این معادله می توانند طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای باشند که قبل از درباره آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

**خیر - اضلاع مثلث نمی توانند مقدار منفی داشته باشند پس فقط جواب  $x = 3$  قابل قبول است.**

#### کار در کلاس

معادله های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب های خود را آزمایش کنید.

$$3t^2 - t = 0 \Rightarrow t(3t - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3t^2 - t = 0 \xrightarrow{t = 0} 3(0)^2 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = 0 \xrightarrow{x = 0} 0^2 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$3t^2 - t = 0 \xrightarrow{t = \frac{1}{3}} 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x^2 - 3x = 0 \xrightarrow{x = -3} (-3)^2 - 3(-3) = 0 \Rightarrow 9 + 9 = 0 \Rightarrow 18 = 0 \quad \text{False}$$

$$x^2 - 3x = 0 \xrightarrow{x = 3} (3)^2 - 3(3) = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

## فصل ۲۰: معادله درجه دوم

## حل معادله درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

## فعالیت

معادله درجه دوم  $x^2 - 25 = 0$  را درنظر بگیرید.

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

۲ از دو طرف معادله  $x^2 - 25 = 0$ , ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل  $x = \pm 5$  می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های بدست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

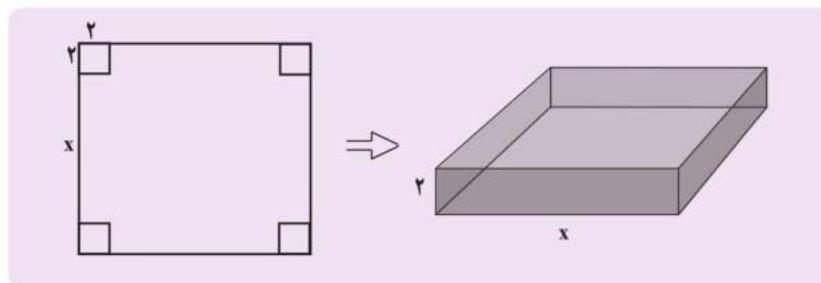
۳ اگر  $a = x^2$  یک معادله درجه دوم باشد که در آن  $a$  یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت  $x = \pm \sqrt{a}$  نوشت؟ توضیح دهید.

اگر  $a$  یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم  $a = x^2$  عبارت اند از :

$$x = -\sqrt{a} \text{ و } x = \sqrt{a}$$

## مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوش‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{حجم} = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

از آنجا که حجم جعبه،  $200$  سانتی متر مکعب باید باشد، داریم:  $2x^2 = 200$ . بنابراین  $x^2 = 100$  و با محاسبه ریشه های دوم این معادله، جواب های  $\pm 10 = x$  به دست می آید. و چون طول نمی تواند منفی باشد، تنها  $x = 10$  مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه  $= 10 + 4 = 14$  سانتی متر است.

### کار در کلاس

جواب هر یک از معادله های زیر را در صورت وجود به روش ریشه گیری به دست آورید.

$$(r-2)^2 = 16$$

$$\Rightarrow r-2 = \pm 4$$

$$\begin{cases} r-2=4 \Rightarrow r=6 \\ r-2=-4 \Rightarrow r=-2 \end{cases}$$

$$t^2+7=0$$

که این غیر ممکن است  
و معادله جواب ندارد.

$$\Rightarrow t^2 = -7$$

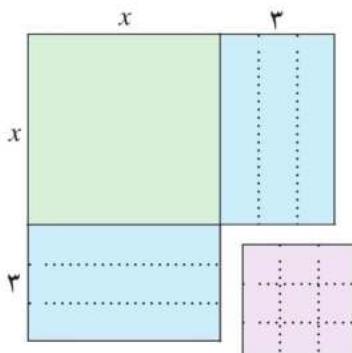
$$5x^2 = 20$$

$$\begin{array}{r} \div 5 \\ \hline x^2 = 4 \\ \Rightarrow x = \pm 2 \end{array}$$

### حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

#### فعالیت

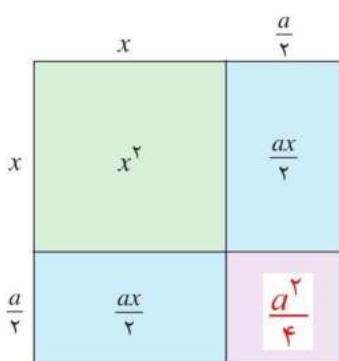
- ۱) دو جمله ای  $x^2 + 6x + 9$  را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله ای اضافه شود تا چند جمله ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.



$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته اید، چه ارتباطی با شکل روبرو دارند؟  
قطعه ای چهارشنبه در شکل ۹ قسمت مربع دارد یعنی مربع  $3^2$ ، و در تساوی  $3^2$  را درون پرانتز و مربع آن یعنی  $9$  را در سمت چپ نوشته ایم.

- ۲) اگر  $a$  یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله ای  $x^2 + ax$  چه جمله ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.



$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = (x + \frac{a}{2})^2$$

#### مثال

معادله  $x^2 - 6x + 4 = 0$  را به روش مربع کامل حل می کنیم.

معادله درجه دوم

به دو طرف معادله،  $-4$  را اضافه کرده ایم

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

سمت چپ را به شکل مربع کامل می نویسیم

از دو طرف معادله، ریشه دوم می گیریم

به دو طرف معادله عدد  $3$  را اضافه کرده ایم

بنابراین جواب ها یا ریشه های این معادله عبارت اند از  $5 + \sqrt{5}$  و  $3 - \sqrt{5}$ .

## کار در کلاس

معادله های زیر را به روش مریع کامل حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{ت) } 2r^2 + r - 2 = 0 \\ & 2r^2 + r = 2 \\ & \xrightarrow{\div 2} r^2 + \frac{1}{2}r = 1 \\ & \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16} \\ & \Rightarrow (r + \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16} \\ & \Rightarrow r + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4} \\ & \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{پ) } n^2 - 4n + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} & n^2 - 4n = -5 \\ & \Rightarrow n^2 - 4n + 4 = -5 + 4 \\ & \Rightarrow (n - 2)^2 = -1 \\ & \text{غیر ممکن است} \\ & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{aligned}$$

$$t^2 + 3t = 3$$

$$\begin{aligned} & t^2 + 3t + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4} \\ & \Rightarrow (t + \frac{3}{2})^2 = \frac{21}{4} \\ & \Rightarrow t + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \\ & \Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ & , \quad x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x = 24$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 1 = 25 \\ & \Rightarrow (x + 1)^2 = 25 \\ & \Rightarrow x + 1 = \pm 5 \\ & \Rightarrow x = 4, \quad x = -6 \end{aligned}$$

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

## فعالیت

در بخش های قبل، روش هایی برای حل معادله های درجه دوم فرا گرفته اید. اکنون می خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  که در آن  $a \neq 0$  است، پیدا کنیم.

دانش آموز: آیا با روش مریع کامل می توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟  
معلم: بله. برای حل معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  با این روش مراحل زیر را انجام می دهیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

دو طرف معادله را بر  $a$  تقسیم می کنیم

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به دو طرف معادله،  $-\frac{c}{a}$  را اضافه کرده ایم

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

به دو طرف معادله،  $\frac{b^2}{4a^2}$  را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مریع کامل شود

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را ساده کرده ایم

$$\text{اکنون قرار می دهیم } .(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \Delta = b^2 - 4ac ; \text{ پس :}$$

آیا می توانید با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب های آن را به دست آورید؟

دانش آموز: اگر  $\Delta > 0$  باشد، از سمت راست نمی توان ریشه دوم گرفت.

معلم: آفرین؛ پس اگر  $\Delta$  یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه ای ندارد. اگر  $\Delta = 0$  باشد، آیا می توانید ریشه های این معادله را به دست آورید؟

دانش آموز: بله. کافی است از دو طرف معادله  $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$  ریشه دوم بگیریم:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

دانش آموز: اگر  $\Delta = 0$  باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟

علم: بله و این ریشه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

دانش آموز: پس در حالت  $\Delta = 0$  معادله تنها یک ریشه به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  دارد.

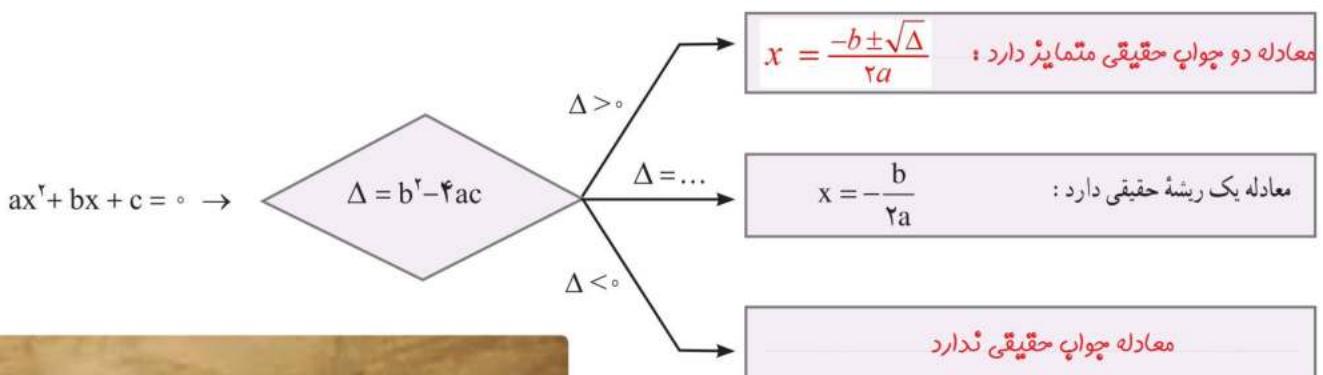
علم: این ریشه از معادله  $(x + \frac{b}{2a})^2 = (x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0$  به دست آمده است و چون

هر دو معادله  $x + \frac{b}{2a} = 0$  و  $x + \frac{b}{2a} = 0$  جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه

مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.

### کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.



۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف)  $x^2 - x + 1 = 0$

معادله جواب حقیقی ندارد  $\Rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4(-2) \times 3 = 25 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

پ)  $-x^2 + 4x - 4 = 0$

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$$

شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

از یک رشته سیم به طول  $5^{\circ}$  متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت  $144$  متر مربع بسازیم.  
طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با  $s$  و  $t$  باشند، با توجه به اینکه محیط آن  $5^{\circ}$  متر است، پس  $2(s+t) = 5^{\circ}$ . از ساده کردن این معادله به معادله  $s+t = 25$  می‌رسیم؛ بنابراین  $t = 25 - s$ .

از سوی دیگر  $st = 144$ . با جایگذاری  $t$  بر حسب  $s$  در این معادله به شکل  $s(25-s) = 144$  می‌رسیم که بعد از ساده شدن، معادله درجه دوم  $s^2 - 25s + 144 = 0$  به دست می‌آید.  
در این معادله  $a = 1$ ,  $b = -25$ ,  $c = 144$ ؛ بنابراین

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

پس  $\Delta > 0$  و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + 7}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

و چون  $s = t = 25 - s$ ، پس برای  $t$  نیز دو جواب به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 25 - 16 = 9 \\ s_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 25 - 9 = 16 \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع  $9$  و  $16$  سانتی متر به دست می‌آید.



## تمرین

۱) معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$1) x^2 - 11x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 10 \end{cases} \quad 2) 5t^2 - 2 = 0 \Rightarrow 5t^2 = 2 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow 5(t-2)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$3) 5a^2 - 7a = 2a(a-3) \Rightarrow 5a^2 - 7a = 2a^2 - 6a \Rightarrow 3a^2 - a = 0 \Rightarrow a(3a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a-1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$4) 4k^2 - 12k + 8 = 0 \Rightarrow 4(k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k-1 = 0 \Rightarrow k = 1 \\ k-2 = 0 \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

$$1) n^2 - 2 = 26 \Rightarrow n^2 = 28 \Rightarrow n = \pm\sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7} \quad 2) x^2 + 12 = 3 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow \text{غیر ممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد}$$

$$4) 3 - 2k = 2k(2k-1) \Rightarrow 3 - 2k = 6k^2 - 2k \Rightarrow 3 = 6k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳) معادله‌های زیر را به روش مرمع کامل حل کنید.

$$1) x^2 - 6x = 7 \quad 2) s^2 - 3s + 3 = 0 \quad 3) r^2 + 4r + 4 = 0 \quad 4) 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9 \quad s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3 + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow (r+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow 2a^2 + \frac{5}{2}a = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 16 \quad \Rightarrow s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3 + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow r+2 = 0 \quad \Rightarrow (a+\frac{5}{4})^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow x-3 = \pm 4 \quad \Rightarrow (s-\frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow r = -2 \quad \Rightarrow a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \quad \text{غیر ممکن است} \quad \Rightarrow a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -3 \quad \Rightarrow a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow x-3 = -4 \Rightarrow x = -1 \quad \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \quad$$

## فرسنه مطالعه درجه یازدهم روش حل معادله های

۱) هر یک از معادله های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$1) 4x^2 - 13x + 3 = 0 \quad \Delta = 169 - 48 = 121 \rightarrow x = \frac{13 \pm 11}{8} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{4}$$

$$2) r - r^2 = 3 \Rightarrow r^2 - r + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 \Rightarrow$$

$$3) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \Rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0 \quad \Delta = 48 \rightarrow a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$4) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad \times 6 \rightarrow 2t^2 - 3t - 9 = 0 \quad \Delta = 81 \rightarrow t = \frac{3 \pm 9}{4} \rightarrow t_1 = 3, t_2 = -\frac{3}{2}$$

$$5) 2x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 125 \Rightarrow x = \pm\sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$$

۶) هر یک از معادله های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

$$1) 9 - 6z + z^2 = 0 \Rightarrow (z - 3)^2 = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$$

$$2) 4a^2 + 3a = 1 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 1 = 0 \quad \Delta = 25 \rightarrow a = \frac{-3 \pm 5}{8} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = -1$$

$$3) b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0 \quad \Delta = 18 \rightarrow b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}$$

۷) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی  $2n+1$  است. این دو عدد را پیدا کنید. گیریم آن دو عدد  $k+2$  و  $k$  باشند، پنابداین:

$$k^2 + (k+2)^2 = 2n+1 \Rightarrow k^2 + k^2 + 4k + 4 = 2n+1 \Rightarrow 2k^2 + 4k + 4 = 2n+1 \Rightarrow k^2 + k - 143 = 0 \Rightarrow (k+13)(k-11) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k = -13 \Rightarrow \\ k = 11 \Rightarrow \end{cases}$$

$4a+3$

۸) طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$$S = a(4a+3) = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0 \quad \Delta = 729 \rightarrow a = \frac{-3 \pm 27}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{15}{4} \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{عرض مستطیل } 3 \text{ و طول آن } 5 \text{ است}$$

۹) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶ شود، سن هر کدام حقدر است؟

$$\begin{array}{l} x = \text{سن پدر کوچک} \\ x+4 = \text{سن پدر پدر} \\ \left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} \\ \xrightarrow{\text{پدر کوچک ۲ ساله و پدر پدر ۶ ساله اند.}} \end{array} \right\} \Rightarrow (x+4)(x+8) = 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60 \Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+14) = 0 \\ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم}} \\ \xrightarrow{\text{پدر کوچک ۲ ساله و پدر پدر ۶ ساله اند.}} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ x = 2 \end{cases} \end{array}$$

۱۰) یک عکس به اندازه  $15 \times 10$  سانتی متر درون یک قاب با مساحت  $300$  سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

$$\text{طبق شکل، طول مستطیل } 15 + 2x \text{ و عرض آن } 10 + 2x \text{ است. پنابداین طبق فرمول مساحت:}$$

$$(2x+15)(2x+10) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \quad \Delta = 1225 \rightarrow x = \frac{-25 \pm 35}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{طول قاب عکس } 15 + 2 \times \frac{5}{2} = 20 \text{ و عرض آن } 10 + 2 \times \frac{5}{2} = 15 \text{ می باشد.}$$

۱۱) در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را بدست آورید.

اگر تعداد بازی های تیمگان  $N$  و تعداد تیم ها  $n$  باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید.

اگر تعداد تیم ها  $n$ ، هر تیم با  $-1$  تیم  $n-1$  دارد، پس با توجه به اینکه پین هر دو تیم تنها یک بازی صورت میگیرد و اصطلاحاً حرارت پرگشتی نیست.

$$\text{تعداد کل بازی های پدرابد } \frac{n(n-1)}{2} \text{ است. پنابداین:}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n^2 - n = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -9 \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow \text{تیمگان مورد نظر دارای ۱۰ تیم است.}$$

۱۲) فشار خون نرمال یک شخص مذکور، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه  $P = 120 + 0.6S^2 - 0.2S$  محاسبه می شود که در آن،  $S$  فشار خون نرمال یک فرد با سن  $s$  است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید).

$$P = 125 \Rightarrow 125 = 120 + 0.6S^2 - 0.2S \Rightarrow 0.6S^2 - 0.2S - 5 = 0 \quad \Delta = -1204 \rightarrow S = \frac{0.2 \pm \sqrt{-1204}}{1.2} = \frac{0.2 \pm 34.69}{1.2}$$

$$\begin{cases} S = 30.575 \\ S = -27.241 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{شخص مورد نظر تقريباً 30 سال و 207 روز سن داشته است.} \\ \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

توجه: قرارداد کرده ایم که  $S$  پر حسنه سال است.

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افسین ملاسعیدی

فصل ۲۰: مسابقه پرش ارتفاع

## درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقه پرش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.

مسیر طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می‌تواند توسط معادله  $y = ax^2 + bx + c$  محاسبه شود که در آن  $a$ ,  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند و البته  $a \neq 0$  است.



## فعالیت

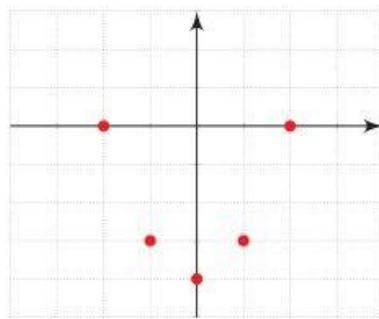
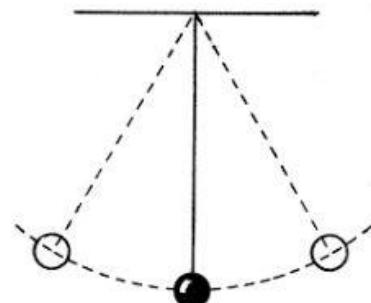
معادله  $y = -x^2 - 4$  را در نظر بگیرید.

(الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

$x$	$y = x^2 - 4$	$(x, y)$
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	(-2, 0)
-1	$y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	(-1, -3)
0	$y = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	(0, -4)
1	$y = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	(1, -3)
2	$y = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	(2, 0)

نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های رو به رو).

(ب) پایین‌ترین نقطه این نمودار چه نقطه‌ای است؟ (0, -4)



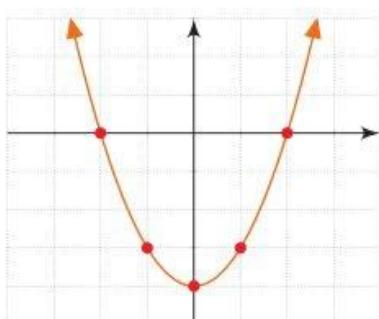
آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ **محور y** یا **محور x** تقارن این شکل است.

(پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ **۵ نقطه**

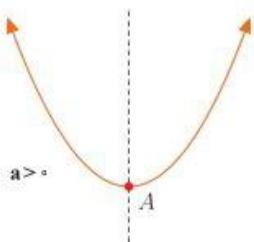
آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ **پله پاسه نقطه نیز امکان پذیر است**

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور  $x$ ‌ها در چه نقاطی است؟

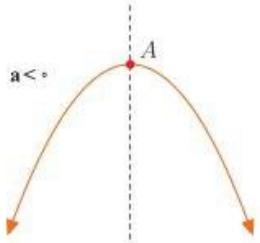
**طبق شکل در نقاط (2, 0) و (0, -2) منحنی با محور x‌ها برخورد دارد.**



## گرایش ۲: مساحت



نمودار هر معادله به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  را که در آن  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند و  $a \neq 0$  یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:



محور تقارن

نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.  
اگر  $a > 0$  باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر  $a < 0$  باشد، A بالاترین نقطه سهمی است.  
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

## فعالیت

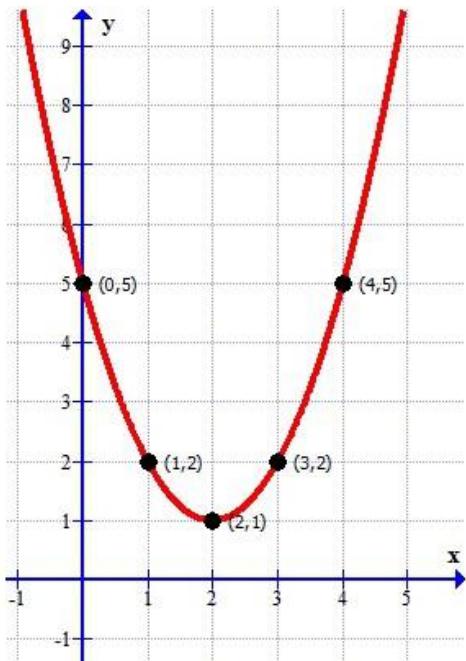
معادله یک سهمی به صورت  $y = x^2 - 4x + 5$  است.

**الف** سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 1$$

**ب** ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$



x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x,y)
0	$y = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$	(0, 5)
1	$y = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$	(1, 2)
2	$y = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4^2 - 4 \times 4 + 5 = 5$	(4, 5)

**پ** پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

**ت** آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطه این سهمی را از معادله آن به شکل  $y = (x-2)^2 + 1$  به دست آورید؟

طول این نقطه ریشه عبارت درون پرانتز است یعنی 2

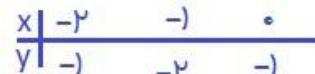
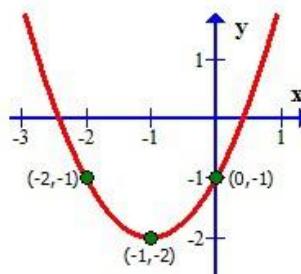
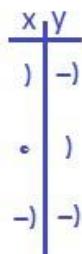
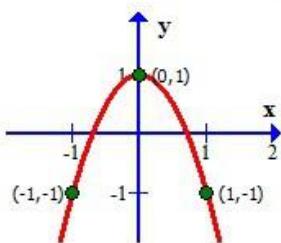
و عرض آن همان عدد تنهای پیرون پرانتز است یعنی 1

هر سهمی به صورت  $y = a(x-h)^2 + k$  است، رأسی به مختصات  $(h, k)$  و خط تقارنی با معادله  $x = h$  دارد.

در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

کار در کلاس

ب)  $y = -2x^2 + 1$  رأس سهمی نقطه‌ی  $(0, 1)$  است.



الف)  $y = (x+1)^2 - 2$

رأس سهمی نقطه‌ی  $(-1, -2)$  است.

### فعالیت

معادله سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر بگیرید. الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید :

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \Rightarrow y = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$\Rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c \Rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$  و خط تقارن آن نیز  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

برای این سهمی  $y = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$  معور تقارن  $S(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$  است.

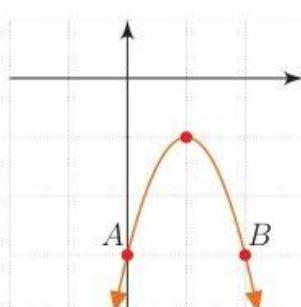
### مثال

سهمی  $y = -2x^2 + 4x - 3$  را رسم می‌کنیم.

در این سهمی  $a = -2$ ,  $b = 4$  و  $c = -3$  است. مختصات رأس سهمی را بدست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.



x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x,y)
0	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	(0, -3)
1	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	(1, -1)
2	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	(2, -3)

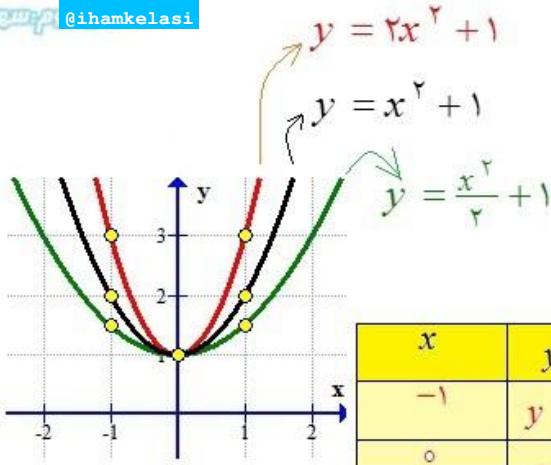
بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

دقیق نکنند نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط  $x = 1$  قرینه‌اند.

۱- عرض رأس سهمی یعنی  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  را می‌توانید از فراردادن  $x = -\frac{b}{2a}$  در معادله سهمی بدست آورید.

معادله دو سهمی به صورت  $y = \frac{x^2}{2} + 1$  و  $y = 2x^2 + 1$  است.

**الف** مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه  $A(1, 1)$  است.



x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)
-1	$y = 2(-1)^2 + 1$	(-1, 3)
0	$y = 2(0)^2 + 1$	(0, 1)
1	$y = 2(1)^2 + 1$	(1, 3)

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x, y)
-1	$y = \frac{(-1)^2}{2} + 1$	(-1, 1.5)
0	$y = \frac{(0)^2}{2} + 1$	(0, 1)
1	$y = \frac{(1)^2}{2} + 1$	(1, 1.5)

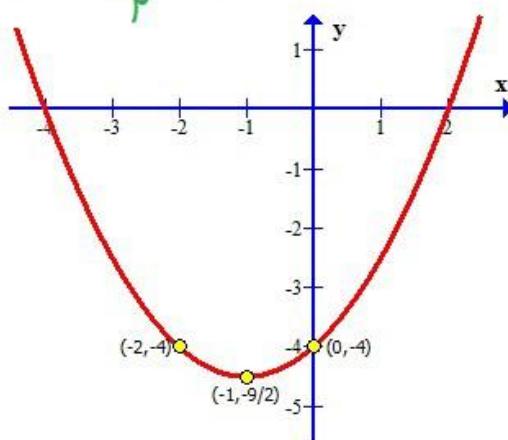
$$y = x^2 + 1 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

**ب** ضرایب  $x^2$  در معادلات سهمی هایی که رسم شده اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

اگر ضریب  $x^2$  مثبت باشد، با زیاد شدن آن دهانه هی سهمی تنگ تر می شود.

### تمرین

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & -4 & -9/2 & -4 \\ \hline \end{array}$$



$$y = \frac{x^2}{2} + x - 4$$

$$(t)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/4 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$y = x - x^2$$

$$(b)$$

نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید.

$$y = 3x^2 - 2$$

$$(a)$$

$$y = -(x+1)^2 - 3$$

$$(c)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & y \\ \hline -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$y = 3x^2 - 2$$

$$(b)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & y \\ \hline -2 & -4 \\ \hline -1 & -3 \\ \hline 0 & -4 \\ \hline 1 & -3 \\ \hline \end{array}$$

$$y = -(x+1)^2 - 3$$

$$(c)$$

**۱** اگر  $(-2, 5)$  و  $(0, 5)$  دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

با توجه په اینکه عرض نقاط یکسان است این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه هی یکدیگرند، په عبارت دیگر محور تقارن از وسط طول های این دو نقطه می گذرد

$$x = \frac{-2+0}{2} \Rightarrow x = -1$$

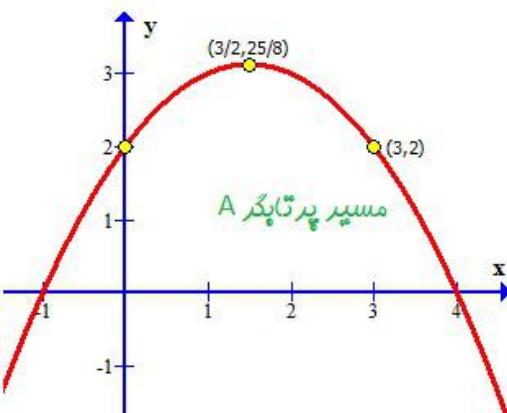
نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  را در نقطه ای به عرض ۲ و محور  $x$  ها را در نقاط به طول  $-1$  و  $2$  قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید

$$(0, 2) \Rightarrow 2 = c \quad (0, 2) \Rightarrow 2 = a - b + 2 \Rightarrow a - b = -2$$

$$(2, 0) \Rightarrow 0 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow 2a + b = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -2 + b = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$y = -x^2 + x + 2 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 2 & \frac{9}{4} & 2 \\ \hline \end{array}$$



۱) دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$  که  $\beta < \alpha$  است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویه  $\alpha$  را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$  به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویه  $\beta$  را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه  $y = -2x^2 + 3x + 2$  به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

(الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

(ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x‌ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

(پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0 \quad | \cdot 2 \rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \quad | \Delta = 25 \rightarrow x = -1, x = 4$$

محل پرخورد وزنه A با زمین در نقاط  $-1$  و  $4$  ہوده یعنی  $5$  متر مسافت پیموده است

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \quad | \Delta = 25 \rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 2$$

محل پرخورد وزنه B با زمین در نقاط  $\frac{1}{2}$  و  $2$  ہوده یعنی  $\frac{5}{2}$  متر مسافت پیموده است

بنابراین پرتابگر A مسافت بیشتری پیموده است.

۲) میزان ارتفاع، همان عرض نقطه‌ی راس سهمی است که در این مورد هر دو عرض یکسان است پس ارتفاع یکسانی پیموده شده است.

یعنی ارتفاع پیموده شده‌ی آنها  $\frac{25}{8}$  است.

طفو سی سخت - کھگلیوہ و بور احمد



۳) میزان ارتفاع، همان عرض نقطه‌ی راس سهمی است که در این مورد هر دو عرض یکسان است پس ارتفاع یکسانی پیموده شده است.

## درس سوم: تعیین علامت

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی

## درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطه  $P(x) = 5x - 200$  به دست می‌آید که در آن  $x$  تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار  $x$  نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله	-۱۵۰	-۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰
$P(x) = 5x - 200$					

همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت  $(x)$  برای  $x$ ‌های مختلف از جدول زیر به دست می‌آید.

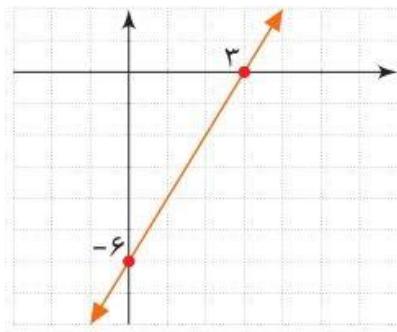
x	$x < 40$	$40$	$x > 40$
$P(x)$	-	+	

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

## تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

## فعالیت

- ۱ نمودار خط  $y = 2x - 6$  در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت  $y$  را در جدول زیر بنویسید.

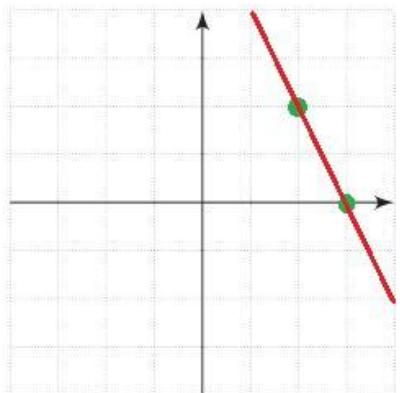


x	$x < 3$	$3$	$x > 3$
$y = 2x - 6$	-	+	+

۲ نمودار خط  $y = -2x + 6$  را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت  $y$  را برای  $x$  های مختلف تعیین می کند، کامل کنید.

$x$	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$y = -2x + 6$	+	○	-

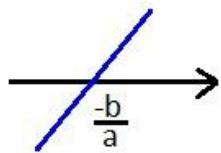
## فصل ۳: معادله ها و نامعادله ها



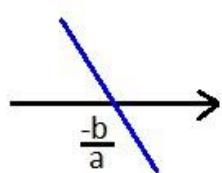
x  
y  
z

- ۲ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب  $x$  است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟
- اگر ضریب  $x$  مثبت باشد علامت قهل از ریشه منفی و پس از آن مثبت است
- اگر ضریب  $x$  منفی شود، علامت ها عکس مخواهد شد، یعنی قهل از ریشه مثبت و پس از آن منفی است.

۳ نشان دهید که علامت عبارت  $y = ax + b$ ، برای  $x$  های مختلف از جدول زیر تعیین می شود.



اگر  $a$  مثبت باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابله) با توجه به شکل، قهل از ریشه منفی و پس از آن مثبت است یعنی قهل از ریشه مخالف علامت  $a$  و پس از آن موافق علامت  $a$  است.



اگر  $a$  منفی باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابله) با توجه به شکل، قهل از ریشه مثبت و پس از آن منفی است یعنی قهل از ریشه مخالف علامت  $a$  و پس از آن موافق علامت  $a$  است.

$x$	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	موافق علامت $a$	مخالف علامت $a$	موافق علامت $a$

## مثال

عبارت  $y = 5x - 2$  را تعیین علامت می کنیم.

ریشه عبارت  $5x - 2 = 0$  از معادله  $5x - 2 = 0$  به دست می آید که برابر  $\frac{2}{5}$  است.

با توجه به اینکه علامت ضریب  $x$  : یعنی  $a = 5$  ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است :

$x$	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	○	+

مقدار  $y$  را برای  $x = 3$  و  $x = -1$  به دست آورید و صحبت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$x = -1 \Rightarrow y = 5(-1) - 2 = -7 \rightarrow \text{منفی}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 5(3) - 2 = 13 \rightarrow \text{مثبت}$$

**مثال** علامت عبارت  $(x-3)(2x-1) = A$  را برای  $x$  های مختلف تعیین می کنیم. جدول تعیین علامت برای هر کدام از عبارت های  $x-3$  و  $2x-1$  به صورت زیر است:

$x$	$x < 3$	$3$	$x > 3$	$x$	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$x-3$	+	◦	-	$2x-1$	-	◦	+

$x$	$x > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	$3$	$x > 3$
$2x-1$	-	◦	+		+
$x-3$	+		+	◦	-

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به صورت زیر می نویسیم:

بنابراین در سه ناحیه بالا که بارنگ های مختلف نشان داده شده، علامت هر کدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای  $x > 3$  عبارت  $2x-1$  مثبت است؛ ولی  $x-3$  منفی می باشد، پس علامت عبارت حاصل ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیه دیگر، جدول تعیین علامت  $(x-3)(2x-1) = A$  به صورت زیر است.

$x$	$\frac{1}{2}$	$3$
$2x-1$	-	◦
$x-3$	+	
$A$	-	◦

دقیق کنید که روی ستون های نیز قاعدة ضرب انجام شده است.

مقدار  $A$  را برای  $x=4$  و  $x=0$  به دست آورید و صحبت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$x = 0 \Rightarrow y = (+)(+)(-0) = -3 \rightarrow \text{منفی} \quad x = 4 \Rightarrow y = (-)(-)(-4) = -7 \rightarrow \text{منفی}$$

هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$A = (3x+1)(x-2)$$

$$B = (2x-3)^2$$

$x$	$\frac{3}{2}$
$B = (2x-3)^2$	+

$x$	$-\frac{1}{3}$	$2$
$3x+1$	-	◦
$x-2$	-	-
$A$	+	◦

$$D = \frac{x-1}{5-2x}$$

$x$	$1$	$\frac{5}{2}$
$x-1$	-	◦
$5-2x$	+	◦
$D$	-	+

$$C = x^r (V-x)$$

$x$	$0$	$V$
$x^r$	-	◦
$V-x$	+	◦
$C$	-	◦

۱- از نوشن حدود  $x$  در جدول تعیین علامت، صرف نظر می کنیم.

۲- تقسیم دو علامت با ضرب آنها تبیه مشابهی دارد. همچنین حاصل  $\frac{a}{b}$  است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می گوییم. ( $a \in \mathbb{R}$ ).

### فصل ۲۰: مسأله های معادله درجه دوم

#### تعیین علامت چندجمله ای درجه دوم

چند جمله ای درجه دوم  $P(x) = ax^2 + bx + c$  را در نظر می گیریم که در آن  $a, b, c$  اعداد حقیقی اند و  $a \neq 0$  است. برای حل معادله  $P(x) = 0$

$P(x) = a \left[ (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} \right]$  به شیوه مربع کامل،  $P(x)$  را به شکل رو به رو می نویسیم.

که در آن،  $\Delta = b^2 - 4ac$  و می دانیم که تعداد ریشه های معادله  $P(x) = 0$  به علامت  $\Delta$  بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت  $P(x)$  را در حالت های مختلف به دست می آوریم.

#### فعالیت

- ۱ فرض کنید که معادله  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  دو ریشه متمایز  $x_1 < x_2$  داشته و به شکل  $(x_1 < x_2)$  تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت  $P(x)$  را برای  $x$  های مختلف تعیین کنید.

$x$	$x_1$	$x_2$
$x - x_1$	-	+
$x - x_2$	-	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	+
$P(x)$	موافق علامت $a$	مخالف علامت $a$
	موافق علامت $a$	موافق علامت $a$

- ۲ اگر معادله  $P(x) = a(x - x_1)^2$  ریشه مضاعف برابر با  $x_1$  داشته باشد، می توانیم  $P(x) = a(x - x_1)^2$  را به شکل  $P(x) = a$  بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت  $P(x)$  را برای  $x$  های مختلف تعیین کنید.

$x$	$x_1$
$(x - x_1)^2$	+
$P(x)$	موافق علامت $a$

- ۳ اگر  $\Delta < 0$  باشد، در این صورت معادله  $P(x) = a(x - x_1)^2$  ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه علامت  $P(x)$  را در جدول زیر تعیین کنید.

$x$	$x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت $a$

- ۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر  $P(x) = a(x - x_1)^2 + \Delta$  مثبت باشد،  $a > 0$  و  $\Delta < 0$  علامتی دارند؟ برای وقتی که  $P(x)$  منفی است، نیز علامت  $a$  و  $\Delta$  را تعیین کنید.

## درس ساده‌ترین علامت

### مثال

عبارت  $-x^2 - x + 3 = A$  را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادله  $A = 0$  را در صورت وجود، به دست می‌آوریم.

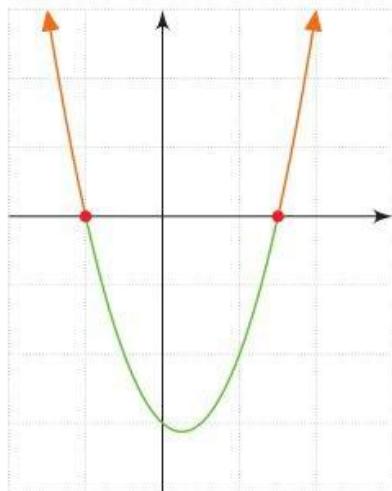
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 1 + 12 = 13$$

پس معادله  $A = 0$  دو ریشه متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

با توجه به اینکه  $a = 1$  است، بنابراین علامت  $P(x)$  طبق فعالیت بالا به صورت زیر مشخص می‌شود:

x	-	$\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$
$P(x)$	+	-



نمودار سهمی  $y = x^2 + x - 3$  در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت  $y$  را برای  $x$ ‌های مختلف تعیین کرد. برای  $x < -\frac{1}{2}$  و  $x > 1$ ، نمودار بالای محور  $x$  هاست؛ پس  $y$  علامت مثبت دارد و برای  $-\frac{1}{2} < x < 1$ ، نمودار پایین محور  $x$  هاست؛ پس علامت  $y$  منفی است.

### مثال

عبارت  $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$  را تعیین علامت می‌کنیم.

هر یک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = 1 \end{cases}$$

x	-2	0	1	3
x	-	-	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	0
$x^2+x-2$	+	0	-	0
$P(x)$	-	+	0	-

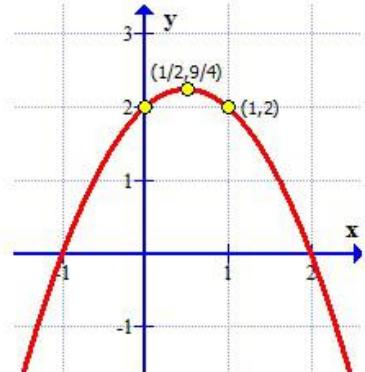
تعريف نشده

تعريف نشده

## کار در کلاس

۱) چندجمله‌ای  $y = -x^2 + x + 2$  را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های بدست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & & 2 \\ \hline y & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$



۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 9 &= 0 \quad \Delta = + \rightarrow x = 3 & B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3} \\ x^2 + x + 3 &= 0 \quad \Delta = -11 \quad \text{چون ندارد} \end{aligned} \quad \text{ب)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} -x^2 + 6x - 9 & - & 0 & - \\ x^2 + x + 3 & + & + \\ \hline B & - & 0 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x^2 - 9 & -\infty & 0 & \frac{1}{3} & \infty \\ \hline 3x - 1 & - & - & 0 & + \\ A & - & 0 & + & 0 & + \end{array}$$

$$\text{الف) } A = (x^2 - 9)(3x - 1)$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

## نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر  $A$  و  $B$  دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند :

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	کوچک‌تر از $B$ است.
$A \leq B$	کوچک‌تر یا مساوی $B$ است.
$A > B$	بزرگ‌تر از $B$ است.
$A \geq B$	بزرگ‌تر یا مساوی $B$ است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم :

## ۱- خاصیت جمع :

برای عبارت‌های جبری  $A$ ,  $B$ ,  $C$  و  $D$ ، اگر  $A < B$  سپس  $A + C < B + C$

## ۲- خاصیت ضرب

الف) اگر  $C > 0$  و  $A > B$  سپس  $AC > BC$

ب) اگر  $C < 0$  و  $A > B$  سپس  $AC < BC$

## درس سوم: نامعادله های یکومند

### مثال

نامعادله  $-7 \geq 3x - 1 \geq 5x - 1$  را حل می کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

$$2x - 1 \geq -7$$

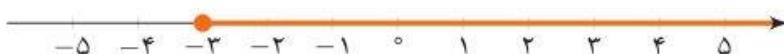
$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$

به دو طرف نامعادله،  $x - 3x$  را اضافه می کنیم.

دو طرف نامعادله را در  $\frac{1}{3}$  ضرب می کنیم.

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از  $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -3\}$  که با نماد بازه به شکل  $[-3, +\infty)$  نوشته می شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

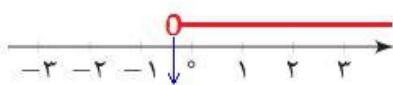


### فعالیت

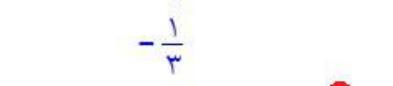
فرض کنید  $x$  متغیری باشد که هم‌مان در دو نامعادله زیر صدق می کند:

$$-2 < 3x - 1, 3x - 1 \leq 8$$

- ۱ هر کدام از نامعادله های بالا را حل کنید و مجموعه جواب های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.



$$-2 < 3x - 1 \xrightarrow{+1} -1 < 3x \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < x$$



$$3x - 1 \leq 8 \xrightarrow{+1} 3x \leq 9 \xrightarrow{\div 3} x \leq 3$$

به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب های به دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.

- ۲ می توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به صورت  $8 \geq 3x - 1 > -2$  بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

$$\text{به دو نامعادله } +1 \text{ را اضافه می کنیم. } -2 < 3x - 1 \leq 8$$

$$\text{دو نامعادله را در } \frac{1}{3} \text{ ضرب می کنیم. } -2 < 3x \leq 9$$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 3$$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده اید، مقایسه کنید.

نامعادله دوگانه فوق را به صورت دستگاه نامعادله های زیر نیز نشان می دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

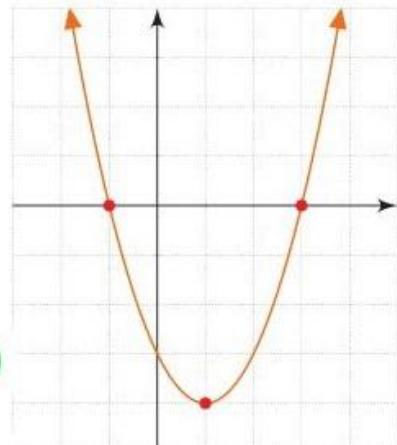
حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی گراد و رابطه‌ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی گراد (C) تبدیل می‌کند، به صورت  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را بر حسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید  $15 \leq C \leq 25$ ؛ سپس از رابطه داده شده، C را بر حسب F بتوسیب و نامعادله دوگانه بدست آمده را حل کنید).

سهمی  $y = -x^2 - 2x - 3$  را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

**الف** به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور «هاست؟

**ب** جدول تعیین علامت عبارت  $y = -x^2 - 2x - 3$  را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -1 & 0 & 3 \\ \hline y & + & - & + \\ \hline \end{array} \quad \text{په ازای } 3 < x < 0 \text{، } y \text{ منفی است.}$$

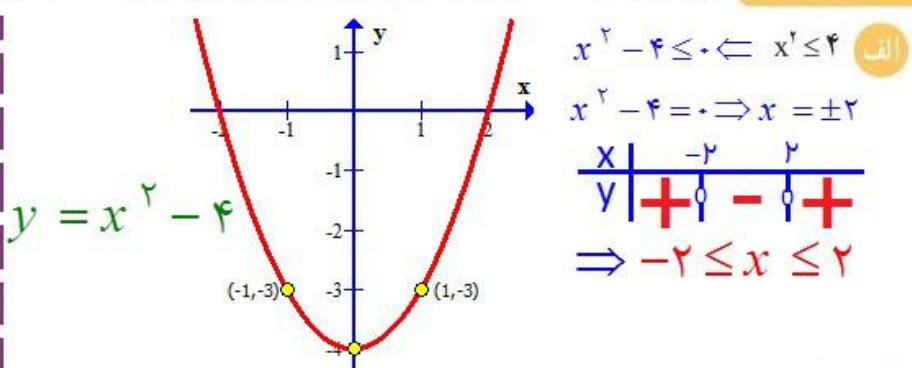
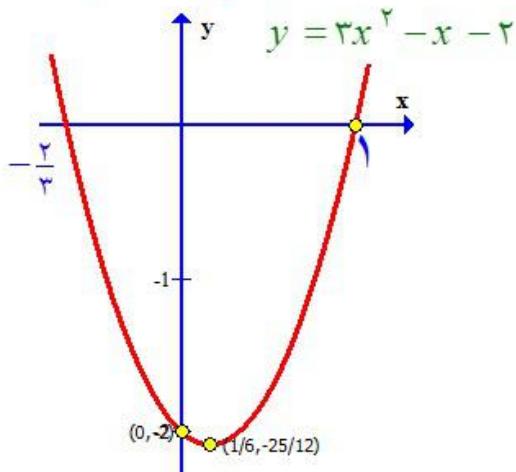


**پ** نشان دهید که از مجموعه جواب‌های بدست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادله  $-x^2 - 2x - 3 < 0$  استفاده کرد.

$x^2 - 2x - 3 < 0$  یعنی مجموعه مقادیری از x که په ازای آنها  $y$  پاشد که با توجه به نمودار  $-1 < x < 3$  مشخص شده است. همچنین به کمک جدول تعیین علامت نیز به همین جواب رسیدیم.

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 2 &\geq 0 \quad \text{ب} \\ 3x^2 - x - 2 = 0 \quad \Delta = 25 &\rightarrow x = 1, x = -\frac{2}{3} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ \hline y & + & - & + \\ \hline \end{array} &\Rightarrow \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$



مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت  $y = x^2 + mx + 1$  همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  همواره مقدار

مثبت داشته باشد، باید  $\Delta < 0$  باشد. در این عبارت،  $a = 1$  و  $b = m$  است:

بنابراین  $m^2 - 4 < 0$  است.

جدول تعیین علامت، برای  $m^2 - 4 < 0$  به صورت زیر است:

m	-2	2
$m^2 - 4$	+	-

بنابراین برای اینکه  $m^2 - 4 < 0$  منفی باشد، باید  $-2 < m < 2$ .

## درس سوم: تفییر علامت

## مثال

$$\frac{x^2 - 9}{2x+1} \geq 0 \text{ را حل می کنیم.}$$

برای حل این نامعادله، عبارت  $\frac{x^2 - 9}{2x+1}$  را تعیین علامت می کنیم. برای این کار ریشه های صورت و مخرج این کسر را پیدا می کنیم. ریشه های معادله  $x^2 - 9 = 0$ ، اعداد  $\pm 3$  هستند و ریشه معادله  $2x+1 = 0$ ، عدد  $-\frac{1}{2}$  است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

$x$	-3	$-\frac{1}{2}$	3
$x^2 - 9$	+	-	-
$2x+1$	-	-	+
$\frac{x^2 - 9}{2x+1}$	-	+	-

↑ تعریف نشده

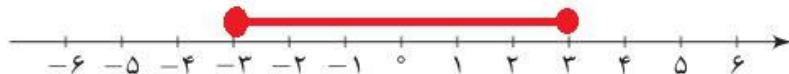
بنابراین اگر  $x < -\frac{1}{2}$  و یا  $x \geq 3$ ، عبارت  $\frac{x^2 - 9}{2x+1}$  بزرگتر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از:  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$ .

## نامعادله های قدر مطلقی

می دانیم که  $|x|$  همان فاصله  $x$  از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً  $|3| = 3$  و  $|-3| = 3$  زیرا فاصله هر دو عدد 3 و -3 از مبدأ برابر 3 است.

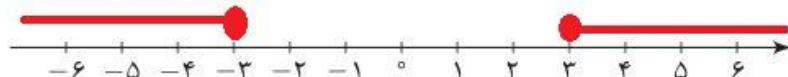
## فعالیت

۱) نامعادله  $3 \leq |x|$  را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی  $x$  است که فاصله آنها از مبدأ کوچکتر یا مساوی 3 باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرداید، به صورت بازه بنویسید.

۲) نامعادله  $3 \geq |x|$  را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی  $x$  است که فاصله آنها از مبدأ بزرگتر یا مساوی 3 باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



### فصل ۲۰: نامعادلهای مطلق

مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۲ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \\ [-2, 2] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \\ (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{array}$$

فرض کنیم  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $u$  یک عبارت جبری باشد. در این صورت<sup>۱</sup>

۱- اگر  $|u| \leq a$  سپس  $-a \leq u \leq a$

۲- اگر  $|u| \geq a$  سپس  $u \leq -a$  یا  $u \geq a$

### مثال

نامعادلهای زیر را حل می‌کنیم.

الف  $|x - 3| \leq 2$

ب  $|2x - 1| > 5$

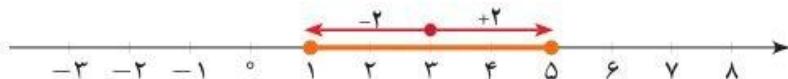
برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم:  $2 \leq x - 3 \leq -2$  اکنون داریم:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه  $[1, 5]$  است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



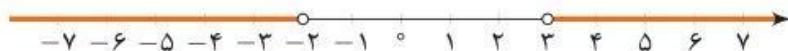
برای حل نامعادله  $2 \leq |x - 3|$  به روش هندسی باید نقاطی مانند  $x$  را روی محور بیندا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداقل دو باشد. بنابراین بازه  $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x - 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از:  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$  و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هر یک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

۱ در هر یک از نامعادلهای زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

$$b) 15 - 2x \geq 1 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 - 2x \geq 1 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5 - 2x \leq -1 \Rightarrow -2x \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$f) \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \Rightarrow -5 < x < -1 \Rightarrow (-5, -1)$$



یک نامعادله قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازه  $(1, 9)$  باشد.

با توجه به این که  $5$  وسط بازه  $(1, 9)$  است، این بازه مجموعه نقطای است که فاصله شان از  $5$  کمتر از  $4$  می‌باشد پنایداین  $4 < |x - 5|$  مجموعه جواب است.

توضیح؛ در حالت کلی، بازه  $(a, b)$  را می‌توان به صورت  $|x - \frac{b+a}{2}| < \frac{b-a}{2}$  نوشت.

یک نامعادله قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن  $(6, +\infty)$  باشد.

با توجه به این که  $\frac{9}{2}$  وسط فاصله  $[3, 6]$  است، شکل مجموعه نقطای است که فاصله شان از  $\frac{9}{2}$  پیشتر از  $\frac{9}{2}$  می‌باشد پنایداین  $\frac{9}{2} > |x - \frac{9}{2}|$  مجموعه جواب است.

توضیح؛ در حالت کلی، مجموعه  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  را می‌توان به صورت  $|x - \frac{b+a}{2}| \geq \frac{b-a}{2}$  نوشت.

تمرین

۱ در هر یک از نامعادلهای زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.



الف)  $1 < 2x - 3 \leq 2$

$$\xrightarrow{+3} 4 < 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} 2 < x \leq 3 \Rightarrow (2, 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 \leq 5 - x \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5 - x < 2x + 3 \Rightarrow -3x < -2 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{array} \right. \xrightarrow{\cap} \left( \frac{2}{3}, 2 \right)$$

$$x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$

$$\xrightarrow{\times 2} -4 < 5 - x < 0 \xrightarrow{-5} -9 < -x < -5 \xrightarrow{\times (-)} 9 > x > 5 \Rightarrow (5, 9)$$

$$-2 < \frac{5-x}{2} < 0 \quad (b)$$

$$x = 0, x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4) < 0 \quad \text{چون ندارد} \quad \text{ث)$$

$$\begin{array}{c|cc} x & - & + \\ \hline x^2 + 4 & + & + \\ \text{عبارت} & - & + \end{array} \quad \text{مجموعه جواب} = (-\infty, 0)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -\frac{1}{3} & 2 & & & \frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \\ \hline 4-2x & + & + & 0 & - & \\ 3x+1 & - & 0 & + & + & \\ \text{کسر} & - & + & 0 & - & \\ \hline -\frac{1}{3} & & 2 & & & \end{array} \quad x = 2 \leftarrow 4 - 2x = 0$$

مجموعه جواب =  $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$

$$x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \quad (ج)$$

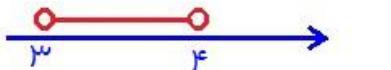
$$x^2 - 2x + 2 = 0 \\ \Delta = -4 \rightarrow \text{چون ندارد} \quad \begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 0 & 1 & & + \\ \hline x^2 - 1 & + & 0 & - & - & + \\ x^2 - 2x + 2 & + & + & + & + & + \\ \text{کسر} & - & 0 & + & 0 & + \end{array}$$

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1] \cup [0, 1] \quad \begin{array}{c|ccccc} & -1 & 0 & 1 & & + \\ \hline - & & - & 0 & + & + \\ + & + & 0 & - & - & + \\ 0 & 0 & + & + & + & + \\ \hline -1 & & 0 & 1 & & + \end{array}$$

$$|7 - 2x| < 1 \quad (ج)$$

$$-1 < 7 - 2x < 1 \xrightarrow{-7} -8 < -2x < -6$$

$$\xrightarrow{\div -2} 4 > x > 3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (3, 4)$$

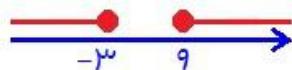


$$\xrightarrow{\xrightarrow{+1}} \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \xrightarrow{\xrightarrow{+1}} \frac{x-1}{2} \geq 4 \xrightarrow{\times 2} x - 1 \geq 8 \xrightarrow{\xrightarrow{+1}} x \geq 9$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3 \quad (ج)$$

$$\xrightarrow{\xrightarrow{+1}} \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \xrightarrow{\xrightarrow{+1}} \frac{x-1}{2} \leq -2 \xrightarrow{\times 2} x - 1 \leq -4 \xrightarrow{\xrightarrow{+1}} x \leq -3$$

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$$



۲) به ازای چه مقداری از  $k$ ، عبارت  $A = x^2 + 3x + k$  همواره مثبت است؟

$$\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \Rightarrow -4k < -9 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$$

پ) توجه په مثبت پودن  $a$  کافیست دلتا منفی باشد.

۳) به ازای چه مقداری از  $m$ ، سهمی  $y = mx^2 - mx - 1$  همواره پایین محور  $x$  هاست؟

از قردن سوال نتیجه می شود که پاید عبارت همواره منفی باشد پس پاید دلتا منفی و  $a$  منفی باشند.

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \quad \begin{array}{c} -4 \\ \hline m^2 + 4m \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ | \\ - \\ | \\ + \end{array} \Rightarrow -4 < m < 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{از طرفی } a \text{ منفی باشد} \\ m < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 < m < 0$$

۴) یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه  $t$  از رابطه

$h = -5t^2 + 18t + 13$  محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توب از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

$$h > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 13 > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t > 0 \quad \begin{array}{c} 18 \\ \hline -5t^2 + 18t \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ | \\ - \\ | \\ + \end{array} \Rightarrow (0, \frac{18}{5})$$

۵) تعداد ضربان قلب، پس از  $x$  دقیقه کار سنگین بدنسازی، طبق رابطه  $y = \frac{15}{8}x^2 - 3x + 200$  به دست می آید. در چه زمان هایی پس از یک کار سنگین بدنسازی،

تعداد ضربان قلب از  $110$  بیشتر است؟ آیا تمام جواب های به دست آمده قابل قبول اند؟

$$\Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 3x + 200 > 110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 3x + 90 > 0 \quad \begin{array}{c} \times 8 \\ \hline 15x^2 - 24x + 720 > 0 \end{array}$$

$$15x^2 - 24x + 720 = 0 \quad \Delta = 14400 \quad x = 12, x = 4$$

$$\begin{array}{c} 12 \\ \hline 15x^2 - 24x + 720 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ | \\ - \\ | \\ + \end{array}$$

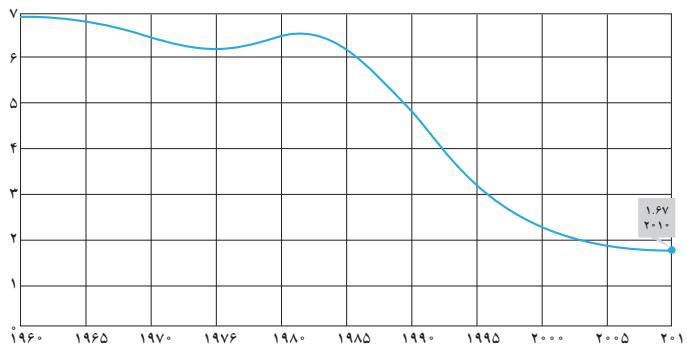
$$\Rightarrow x < 4 \quad \text{یا} \quad x > 12$$

از پین چوایی های پدست آمده آنها یکی که مثبت هستند قابل قبول نیستند

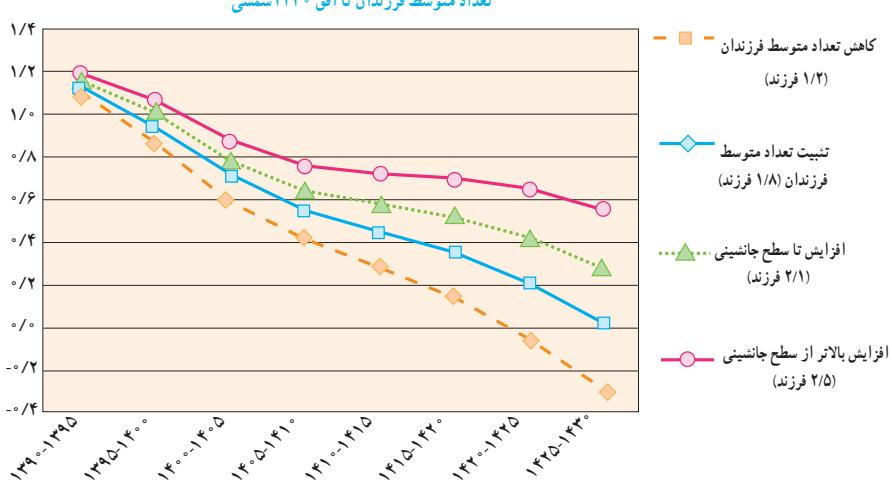
# تابع



نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران



تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارایی کاربردهای فراوانی است. تابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهای است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۴۹۴ جزء جوانترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت، کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در بی دارد.



**درس اول مفهوم تابع و بازنایی‌های آن**

**درس دامنه و برد توابع**

**درس سوابق توابع**

## درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

### درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

دما بر که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می‌شود.

قیمتی که به اجنبان یک فروشگاه نسبت داده می‌شود.

نمودهایی که به یک دانش‌آموز در دروس مختلف تعلق می‌گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می‌شود.



#### فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دمای را می‌توان به آن نسبت داد.

درباره بقیه جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خطکش	
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه	

کشور	ایران	انگلیس	ژاپن	قطر	لهستان
پایتخت	تهران	لندن	توکیو	دووه	ورشو

به یک ساعت معین فقط یک دمای را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

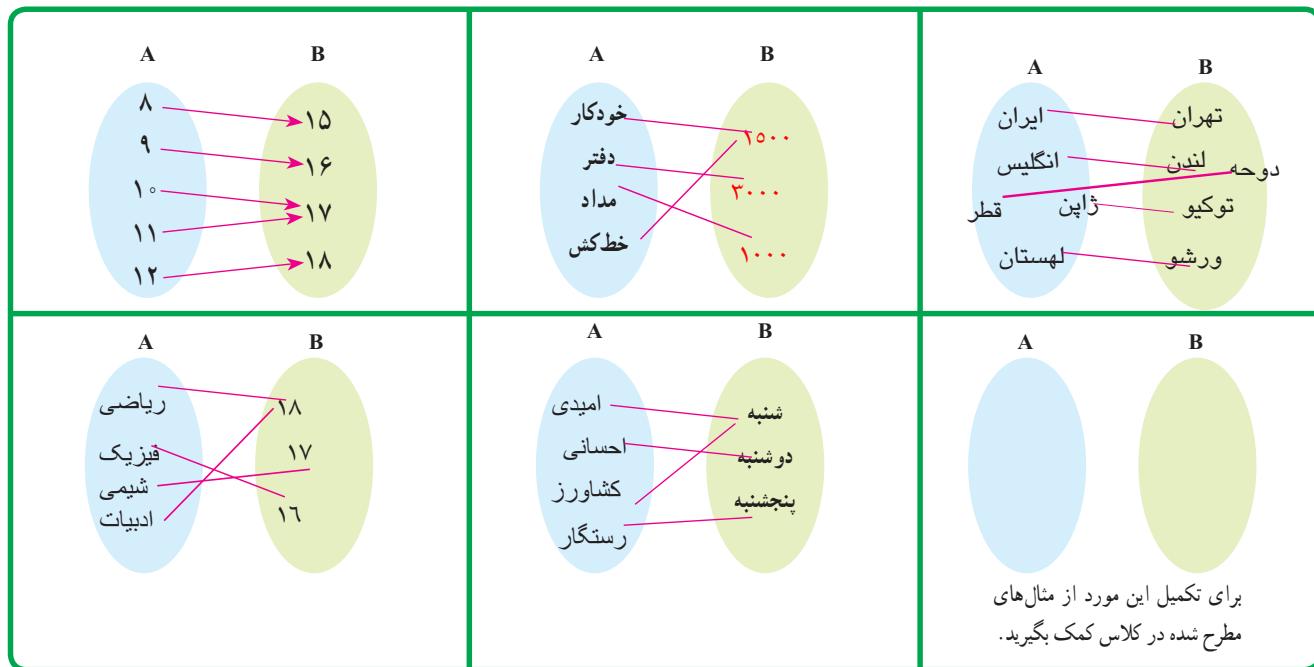
به یک کالای معین فقط یک قیمت را می‌توان نسبت داد.

به یک درس مشخص فقط یک نمره را می‌توان نسبت داد.

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

به یک کشور مشخص فقط یک شهر را به عنوان پایتخت نسبت دادیا هر مثالی که چنین رابطه‌ای در آن وجود داشته باشد.

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



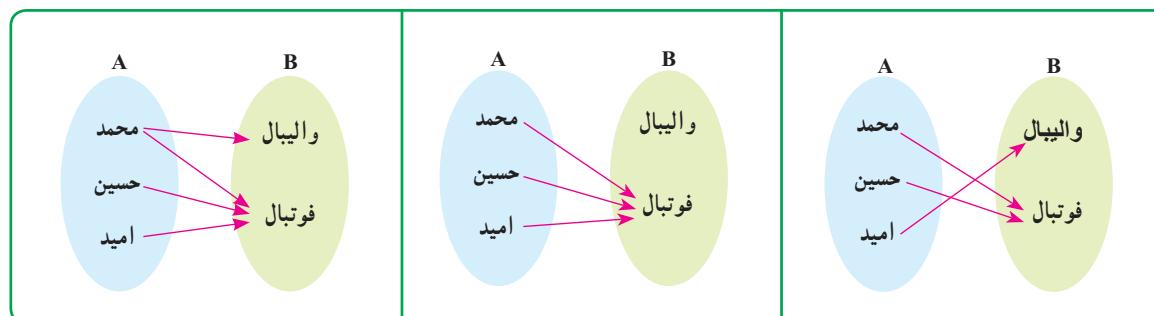
توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

در فعالیت ۱، همه مثال‌های ارائه شده تابع‌هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده‌اند.

### کار در کلاس

۱) مجموعه A شامل سه دانشآموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانشآموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



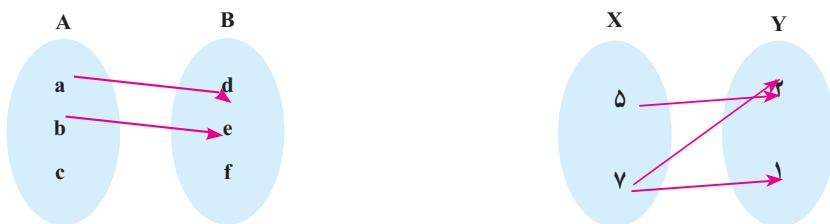
تابع نیست

تابع است

تابع است

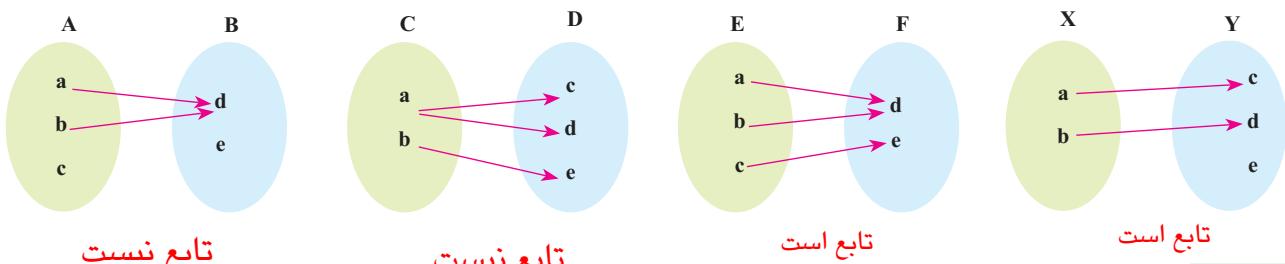
### درس اول: نمودار پیکانی و تابع و بازنایی های آن

۱) از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



بله در یک زمان مشخص ، افراد دارای سن مشخص و وزن مشخص می باشند.

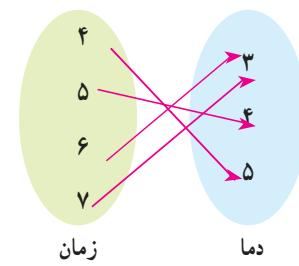
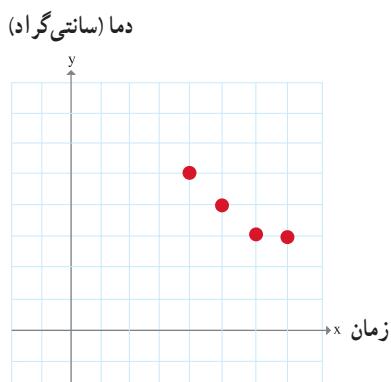
- ۲) (الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟  
 ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید. **خیر زیرا ممکن است یک فرد چند نوع غذا را دوست داشته باشد.**  
 ۳) کدامیک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



### فعالیت

#### نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد.  
 رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض درنظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد :

(۴ , ۵) , (۵ , ۴) , (۶ , ۳) , (۷ , ۳)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های  $(4, 5)$  و  $(5, 4)$  برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «**زوج مرتب**» می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند  $f$  و  $g$  استفاده می‌کنیم.  
 $f = \{(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2)\}$

در هر زوج مرتب عضو اول را «**مؤلفه اول**» و عضو دوم را «**مؤلفه دوم**» می‌نامیم. به طور مثال در زوج مرتب  $(3, 6)$ ، مؤلفه اول  $6$  و مؤلفه دوم  $3$  است. مجموعه  $f$  یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

### کار در کلاس

- ۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت	۸.....	۲۷.....	۱۷.....	۱۵.....	۱۵.....	۱۱.....	۵.....

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟ **بله** تابع است.



### چهارم: مفاهیم تابع و بازنگاری های آن

۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

توصیف رابطه	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار پیکانی	جدول یا نمودار
به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.	$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$		
به اعداد ۲ و ۳ او ۴، مربع آنها را نسبت می‌دهد.	$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$		مانند نمونه رسم شود.
به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.	$\{(\pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{7})\}$		مانند نمونه رسم شود.
به اعداد -۱ و ۰ و ۱، دو برابر آنها را نسبت می‌دهد.	$\{(-1,-2), (0,0), (1,2)\}$		مانند نمونه رسم شود.
مثال دلخواه			

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$$

$$f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$$

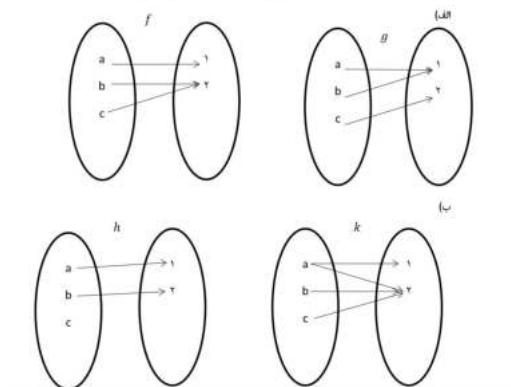
آن عدد ۲ به دو عدد ۹ و ۵ نظیر شده است. تابع است.

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن **دارای مولفه‌های اول یکسان** نباشند.

۱

- (الف) تابع است؛ به خلیع یک مربع فقط یک محیط را می‌توان نسبت داد.
- (ب) تابع است؛ در یک زمان معین به هر فرد فقط می‌توان یک دمای بدن را نسبت داد.
- (ج) تابع است؛ چون به هر فرد فقط یک گروه خونی می‌توان نسبت داد.
- (د) تابع نیست؛ ممکن است دانش‌آموزی بیش از یک دوست داشته باشد.
- (ه) تابع نیست؛ اعداد مثبت دارای دو ریشه‌ی دوم هستند.
- (و) تابع است؛ هر عدد حقیقی فقط دارای یک ریشه‌ی سوم است.



$$f = \{(2,1), (3,-5), (3,7)\}$$

$$h = \{(2,3), (3,2), (1,1)\}$$

$$r = \{(2,0), (-7,0)\}$$

۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

(الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

(ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

(ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

(د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

(ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

(و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌ی سوم آن را نسبت می‌دهد.

۲ مجموعه‌های  $\{a, b, c\}$  و  $\{1, 2\}$  داده شده‌اند.

(الف) به کمک نمودار پیکانی دورابطه از  $A$  به  $B$  ارائه کنید که تابع باشند.

(ب) دورابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

(ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

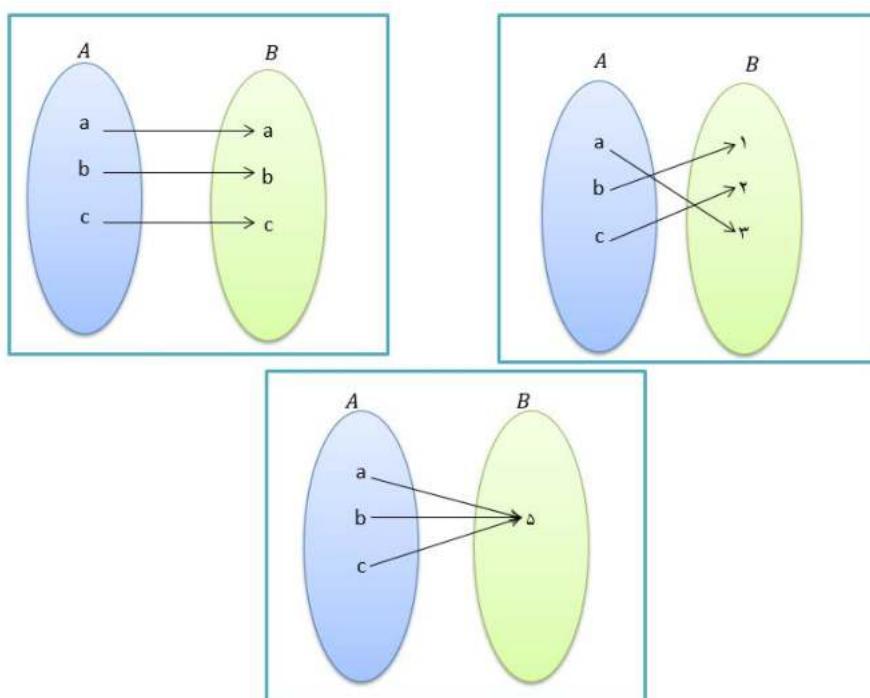
۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$$g = \left\{ \left( \frac{1}{2}, 1 \right), \left( \frac{3}{5}, 1 \right), (-5, 1), (8, 1) \right\}$$

$$k = \{(2,0)\}$$

$$l = \{(1,2), (2,4), (3,6), \dots\}$$

۴  $A$  و  $B$  مجموعه‌های غیر عددی‌اند، در شکل زیر در  $A$  و  $B$  اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از  $A$  به  $B$  به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



## درس دوم: دامنه و برد توابع

## فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	۱۸۰°	۳۶۰	۳۶۰	۵۴۰

این رابطه را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

$$f = \{(0, 54), (1, 360), (2, 360), (3, 180), (4, 36)\}$$

چرا  $f$  یک تابع است؟ زیرا زوچ های مرتب آن، مولفه اول یکسان ندارند.

مجموعه همه مؤلفه های اول زوچ های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه های دوم را «برد» آن تابع می نامند.

در فعالیت بالا :

$$\begin{aligned} &\{\text{پنج ضلعی}, \text{لوزی}, \text{مربع}, \text{مثلث}\} = \text{دامنه } f \\ &f = \{180^\circ, 360^\circ, 540^\circ\} \end{aligned}$$

## کاردر کلاس

- ۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳	۵
محیط	۲	۴	۶	۸	۱۲	۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوچ های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه:  $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 5\right\}$

تابع است زیرا مولفه اول یکسان ندارد. برد:

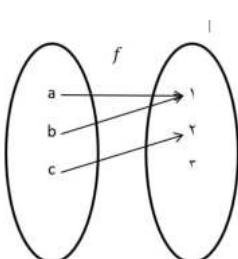
$$\{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$$

الف) تابعی مثل بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر زیرا شرط تابع بودن برقرار نمی شود.

۲ اگر  $f$  تابعی از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  باشد، می دانیم که دامنه  $f$  همان مجموعه  $A$  است. آیا همیشه برد تابع  $f$  با مجموعه  $B$  برابر است؟ مثال بزنید. خیر، همیشه برابر نیست.



## فعالیت

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:

شکل اول



شکل دوم



شکل سوم



شکل چهارم



...

...

جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	$n$	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	$2n-1$	...

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع: زیرا مولفه اول یکسان ندار  $\{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (n, 2n-1)\}$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه:  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید. برد:  $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$

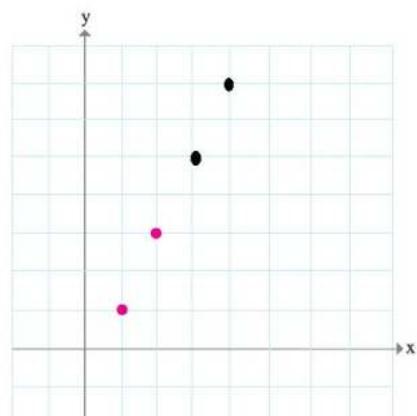
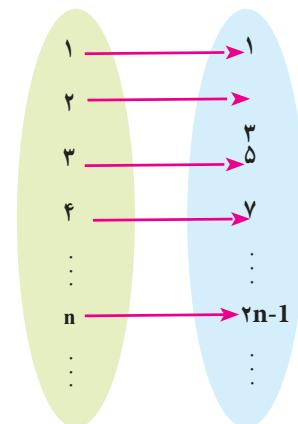
دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد طبیعی فرد است.

همان‌گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند  $f(1)=1, f(2)=3, f(3)=5, \dots$  و گفته می‌شود که مقدار تابع  $f$  در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع  $f$  در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1$$

رابطه بین دامنه و برد تابع  $f$  را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل ۱ نوشت که در آن  $n$  یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع  $f$  به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کیم. دامنه تابع  $f$  مجموعه اعداد طبیعی است.

در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.



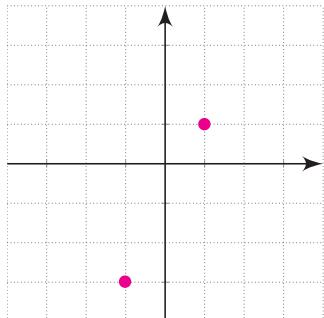
## کاردر کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری  $f(n) = n^2 + 1$  داده شده باشد و دامنه آن  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد، برد تابع  $f$  را به دست آورید.

$$\{2, 5, 10, 17\}$$

## جدول: دامنه و برد تابع

## کاردر کلاس



جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط  $y = 2x - 1$  استفاده کنید.

x	1	2	3	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
y	1	2	5	-3	-1	0	-2	-5

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را  $g$  بنامید. شباهت: رابطه بین اعضای دامنه و برد است. تفاوت: دامنه قبلي اعداد طبیعی است و دامنه این تابع اعداد حقیقی تابع است زیرا دارای مولفه اول یکسان نیست.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ این نمودار، نمودار یک خط است. نمودار قبلي نقطه ای بود. دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع  $y = 2n - 1$  مقایسه کنید.

$$D_g = \mathbb{R}, R_g = \mathbb{R}$$

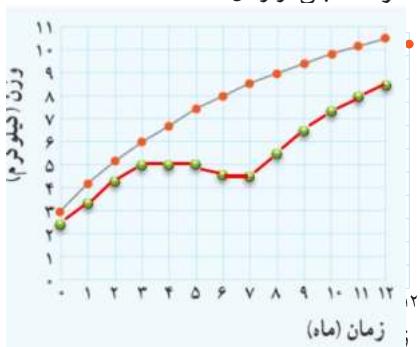
$$D_f = \mathbb{N}, R_f = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$g(-\frac{1}{5}) = -\frac{7}{5} \quad g(0) = -1 \quad g(\frac{2}{7}) = -\frac{3}{7} \quad g(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 1 \quad g(10) = 19$$

نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. در اینجا  $x$  یک عدد ..... حقیقی ..... است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل  $y = ax + b$  نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

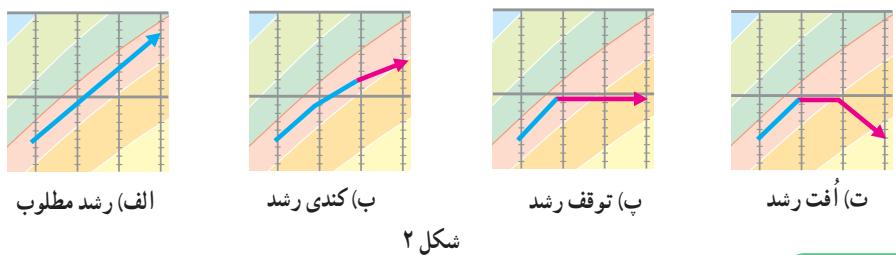
شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد. وزن یک کودک تابعی از زمان است.



شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

هنگامی که پژوهشکان می‌خواهند درباره رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخداد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲

## فعالیت

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که آن را پژوهش (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

وزن (کیلوگرم)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
زمان (ماه)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت شان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ رشد مطلوب

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ ۳ تا ۵ ماهگی

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

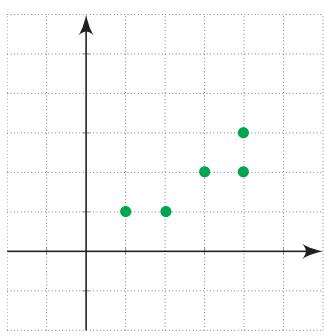
وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید. ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

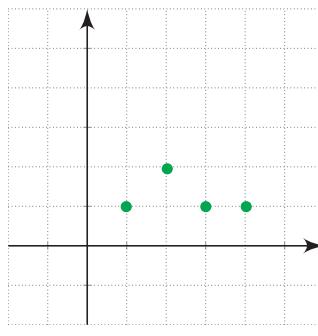
$$R = \{2/8, 3/2, 4/2, 5/4/8, 4/5, 5/5, 6/5, 7/2, 8, 8/5\}$$

### کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.



تابع نیست



تابع است

می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

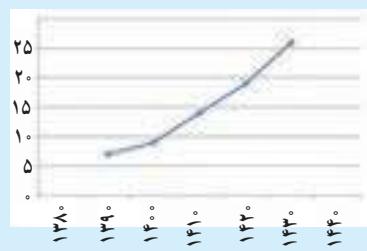
$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{1, 2\}$$

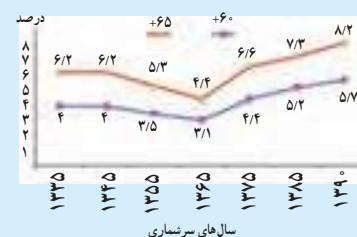
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداقل در یک نقطه قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالماندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالماندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت ثبات وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهد داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالماندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش‌بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات جمجمیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۰-۶۰ سال و بالاتر



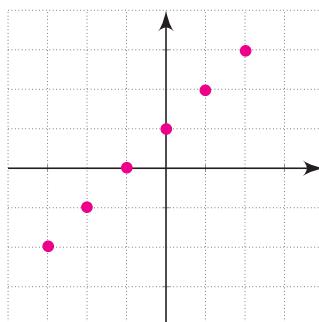
نسبت جمعیت سالماند ایران در طی سال‌های سرشماری



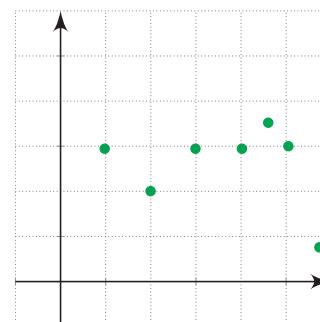
## گوشه‌های علمی

## کار در کلاس

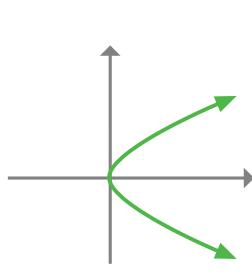
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



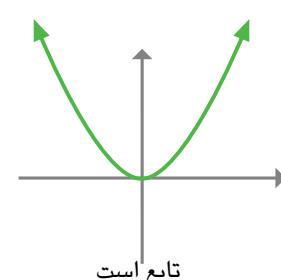
تابع است



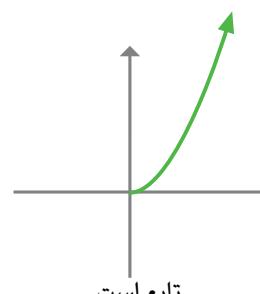
تابع است



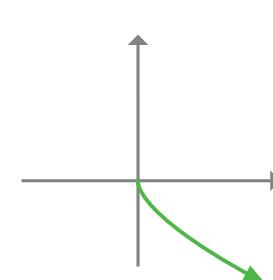
تابع نیست



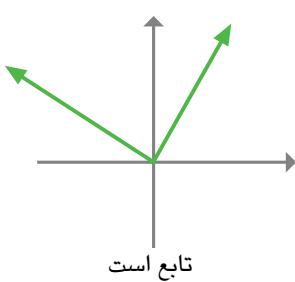
تابع است



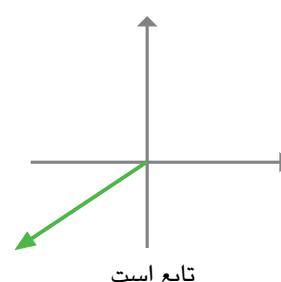
تابع است



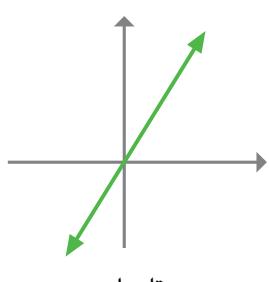
تابع است



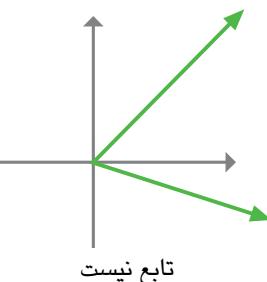
تابع است



تابع است



تابع است

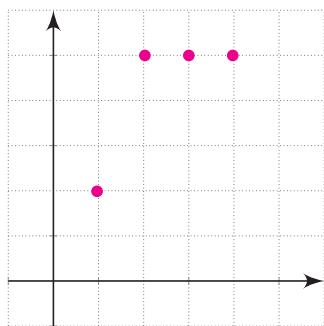


تابع نیست

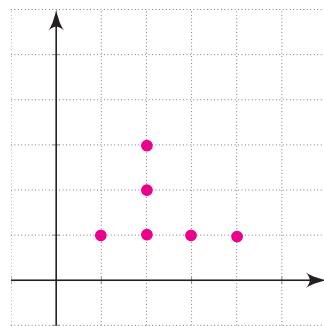
## تمرین

۱ کدام یک تابع است؟

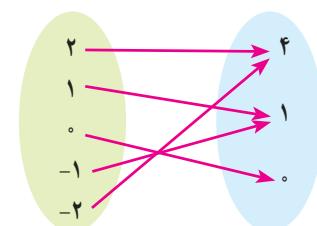
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



تابع است



تابع نیست



تابع است

۱۰۵

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{2, 5\}$$

$$D = \{1, 2, 0, -2, -1\}$$

$$R = \{4, 1, 0\}$$

۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

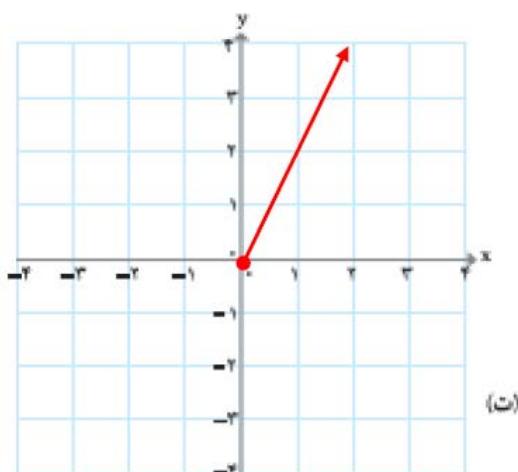
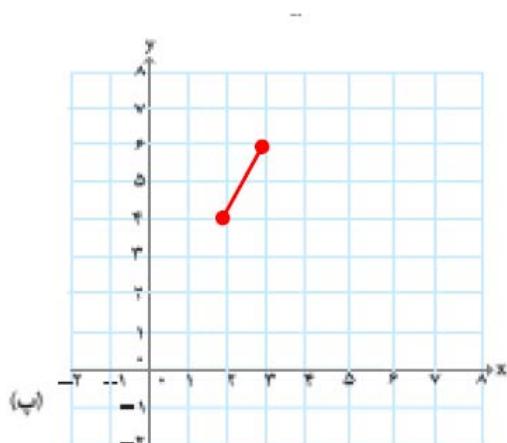
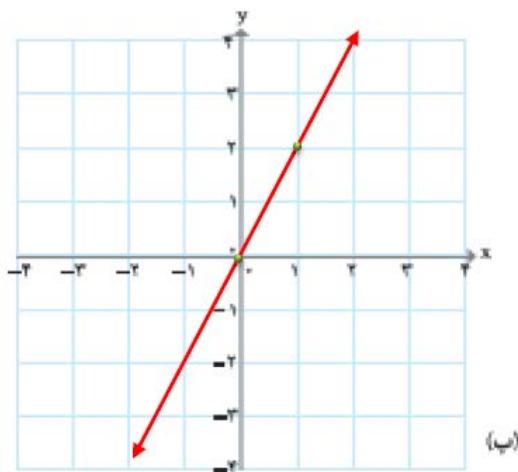
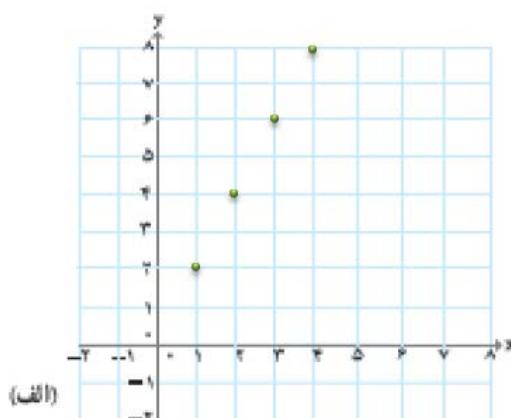
(الف)

(ب)

(پ)

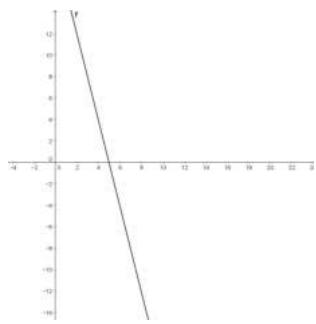
(ت)

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[4, 6]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی



## گوشه‌گفتار

۱) یک شمع  $20$  سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت  $4$  سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعت‌های مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.



x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

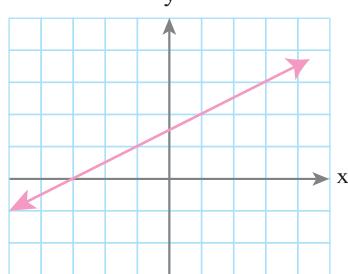
نمودار این تابع رارسم کنید.  
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن، خط راست است.

۵) آیا خط  $2 = x$  را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط  $5 = y$  را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟ خیر زیرا موازی محور عرض هاست و خط موازی این محور این خط را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

۶) نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه  $[ -3, 5 ]$  باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع وجود دارند؟ هر تعداد که بخواهیم.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x + 4, D_f = [-3, 5] \\g(x) &= x - 3, D_g = [-3, 5] \\h(x) &= -3x + 2, D_h = [-3, 5]\end{aligned}$$

۷) نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.  
از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟ نمایش جبری



$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

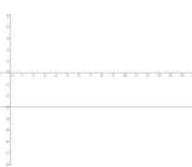
۸) جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق  $10$  کیلومتری زیرزمین است، بباید.

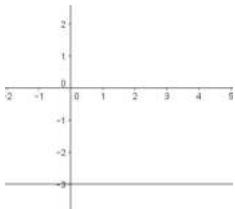


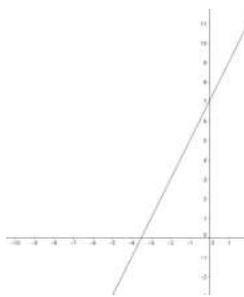
۹) الف) تابع  $f(x) = -3$  را رسم کنید و مقادیر  $(2)f$  و  $(10)f$  و  $(-5)f$  و  $(\sqrt{5})f$  و  $(-\frac{3}{4})f$  را به دست آورید.

چون تابع ثابت است، تمام مقادیر برابر  $-3$  است.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید. همان شکل فوق

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه  $[ -2, 5 ]$  باشد، نیز رسم کنید.





۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که:  $f(2) = 11$  و  $f(0) = 7$ . نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟ زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	9	15	25	36

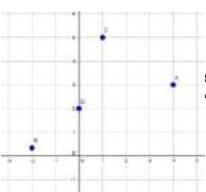
۱۲ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت  $1/\text{دقيقه}$  کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در  $t$  دقیقه طی می‌کند، با  $f(t)$  نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟ قسمت ب

(الف)  $f(t) = t - 1$

(ب)  $f(t) = 1/t$

(پ)  $f(t) = t + 1$

(ت)  $f(t) = 1/t$



۱۳ اگر درباره تابع  $g$  داشته باشیم:  $g(0) = 2$ ,  $g(1) = 5$ ,  $g(-2) = \frac{1}{3}$ ,  $g(4) = 3$ ;  $g$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$\left\{ \left( -2, \frac{1}{3} \right), \left( 0, 2 \right), \left( 1, 5 \right), \left( 4, 3 \right) \right\}$$

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی گراد» و «فارنهایت» استفاده می‌شود که با رابطه  $F = \frac{9}{5}C + 32$  به یکدیگر وابسته‌اند.

(الف) ۲۰ درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟ ۴ درجه

(ب) ۱۰ درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟ ۴ سانتی گراد

(پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی گراد را بر حسب فارنهایت به دست دهد.

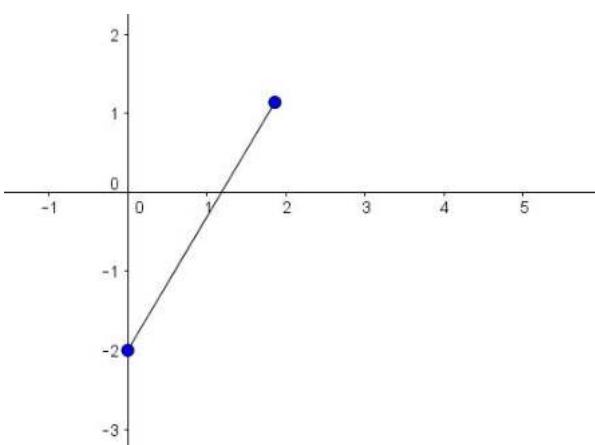
(ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟ بله، یک تابع خطی است.

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

$$P = 2(x+y) = 2(x+2+x) = 2(2x+2) = 4x+4$$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $[2, 0]$  و برد آن  $[1, -2]$  باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توان رسم کرد؟ هر تعداد که بخواهیم.



حل ۱۷:

حل ۱۶:

$$f = \{(2, 1), (3, 4)\}$$

$$g = \{(3, 1), (2, 4)\}$$

## درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

## فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۴	$2/5$	۱۰	۱۲	x
مساحت آن	$0/01$	$0/25$	۱	۹	۱۶	$6/25$	۱۰۰	۱۴۴	$x^2$

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	۱۰	r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	$4\pi$	$9\pi$	$25\pi$	$100\pi$	$r^2\pi$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از  $x = f(x) = x^2\pi$  قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از  $r = g(r) = r^2\pi$  قابل نمایش است.

چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را تابع درجه دوم می‌نامیم.

حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

تابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، تابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

تابع زیر همگی تابع چند جمله‌ای‌اند:

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت  $y = 2x^3 + 5x + 1$  نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

شیاهت: هر عدد دامنه به همان عدد نسبت داده می شود.  
دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟ تفاوت: دامنه ها و در نتیجه برد ها مقاومت هستند.

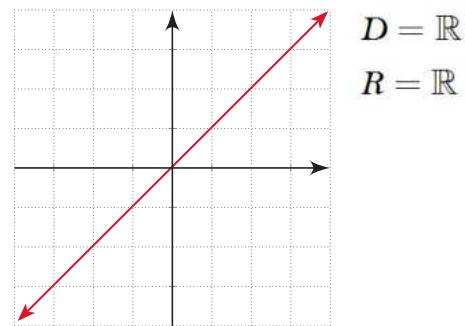
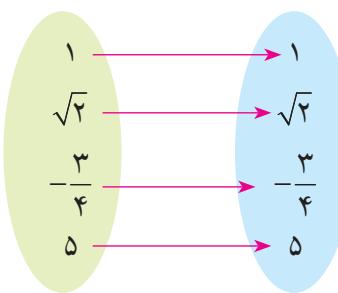
$$D = \left\{ 1, \sqrt{2}, -\frac{3}{4}, 5 \right\}$$

$$R = \left\{ 1, \sqrt{2}, -\frac{3}{4}, 5 \right\}$$

$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$

$$D_f = \{a, b, c\}$$

$$R_f = \{a, b, c\}$$



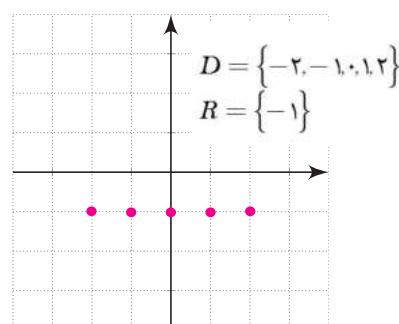
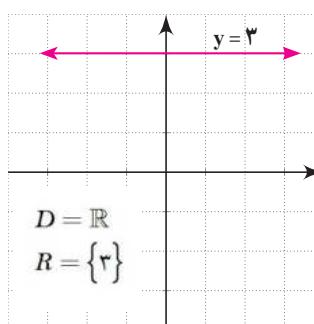
اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند.  
اگر دامنه تابع همانی را  $\mathbb{R}$  در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط  $y = x$  است که با معادله  $x = y$  نمایش داده می شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک اند؟ در هر سه تابع ، اعضای دامنه به یک عدد ثابت نسبت داده می شود.

ساعت	۸	۹	۱۰
دماي هوا	۱۹	۱۹	۱۹

$$D = \{8, 9, 10\}$$

$$R = \{19\}$$



تابعی مانند  $f$  را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم. اگر این عضو را  $k$  بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله  $f(x) = k$  نمایش می دهیم.

## کار در کلاس

$$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$$

$$\{(a,a), (\beta,\beta), (2,2), (5,5)\}$$

$$\{(1,3), (3,1)\}$$

$$\{(4,1), (3,1), (-2,1), (2,1), (5,1)\}$$

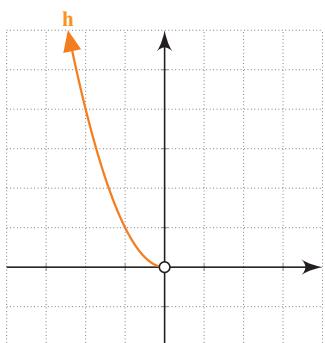
۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.  
مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید.

یک تابع همانی مثل بزنید که دامنه آن  $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$  باشد.  
یک تابع مثل بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.  
مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.  
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

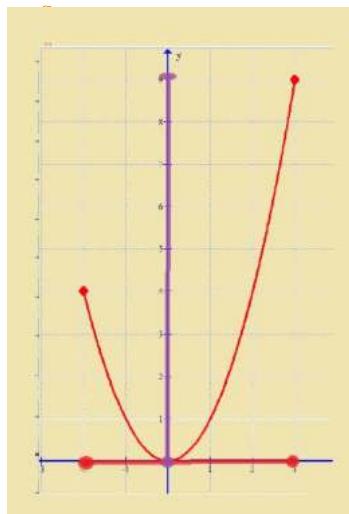
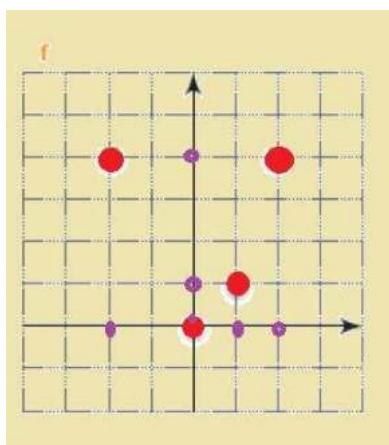
تابعی که دامنه اش افراد یک کلاس درس پایه دهم باشند و بردش دبیر ریاضی آن کلاس باشد.

## تکنیک های تابع

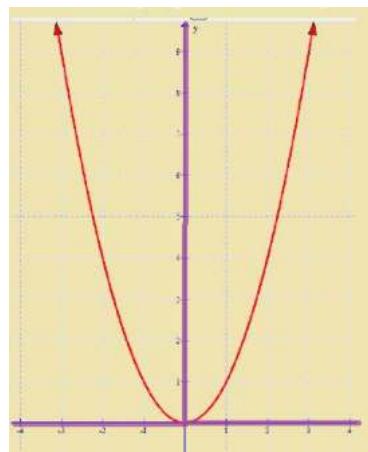
۱۱) نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع  $h$  رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x) = x^3$	$g(x) = x^3$	$h(x) = x^3$	$t(x) = x^3$
دامنه	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$[-2, 2]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد	$R = \{4, 0, 1\}$	$[0, 4]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$



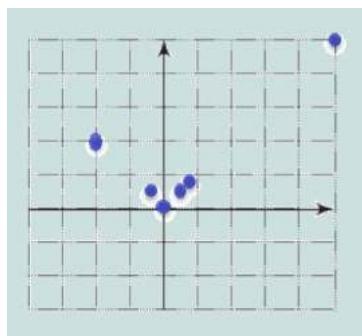
دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه ممکن را دامنه درنظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع  $x^3 = f(x)$  را مجموعه اعداد حقیقی درنظر می‌گیریم. در غیراین صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

## فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید. دامنه این تابع اعداد سطر اول و برد آن اعداد سطر دوم جدول زیر می‌باشند.



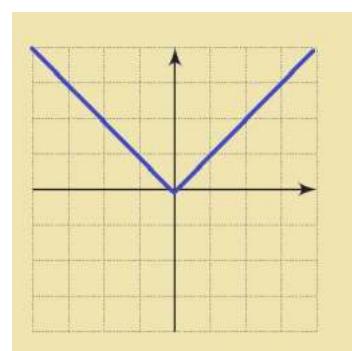
$x$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را با  $y = |x|$  نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$\text{تابع قدر مطلق را به صورت } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ نیز نمایش می‌دهند.}$$

با توجه به اینکه برای  $x \geq 0$  و  $x < 0$  تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

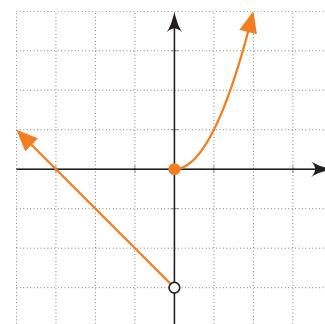


### مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی  $y = x^2$  است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط  $y = -x - 3$  برابر است. نمودار  $f(x)$  در شکل مقابل رسم شده است.

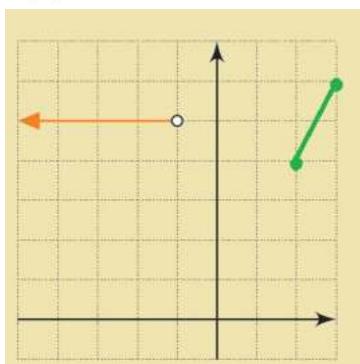


### فعالیت

توابع  $f$ ,  $g$ ، و  $h$  نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$h(x)$



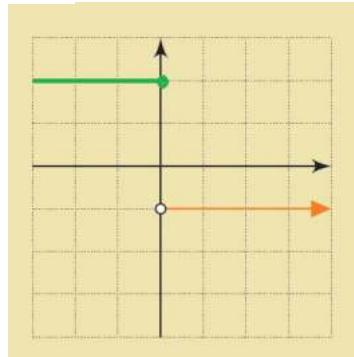
$$D_h = (-\infty, -1) \cup [2, \infty) \\ R_h = [-1, 2]$$

$$f(3) = -1 \quad g(-2) = 2 \quad f\left(-\frac{1}{5}\right) = 2$$

$$h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \quad g(\cdot) = \cdot$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$f(x)$

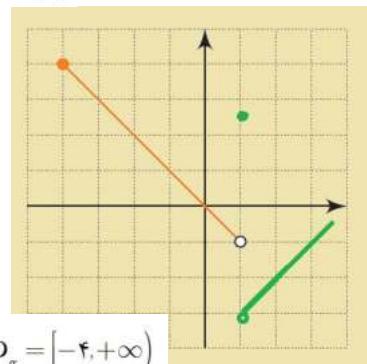


$$D_f = \mathbb{R} - \{\cdot\} \\ R_f = \{-1, 2\}$$

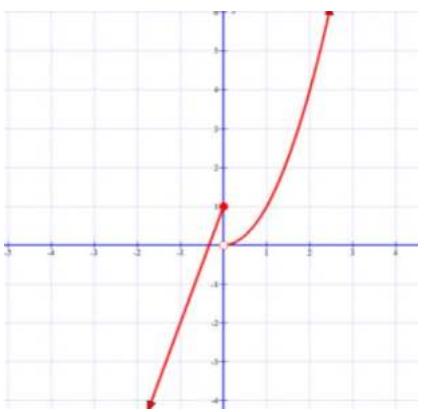
مقادیر  $(-\sqrt{5}, 0)$  و  $h(\sqrt{5})$ ،  $f(-\frac{1}{5})$ ،  $g(-2)$ ،  $f(3)$ ،  $g(\cdot)$  را بایايد.

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

$g(x)$



$$D_g = [-4, +\infty) \\ R_g = [-2, +\infty)$$



$$\begin{array}{ll} D_f = \mathbb{R} & D_g = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} & R_g = (-1, +\infty) \end{array}$$

نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

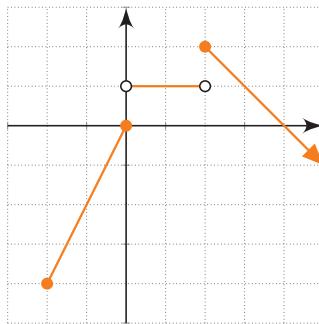
$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر  $f(0)$ ,  $f(-2)$ ,  $g(2)$ ,  $f(5)$ ,  $g(-\frac{1}{2})$  و  $g(-\frac{1}{5})$  را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} f(0) = 1 & g(0) = 1 & g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f(5) = 25 & g(2) = 1 & f(-2) = -5 \end{array}$$

نمودار تابع قطعه‌ای  $f$  داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & 2 \leq x \end{cases}$$

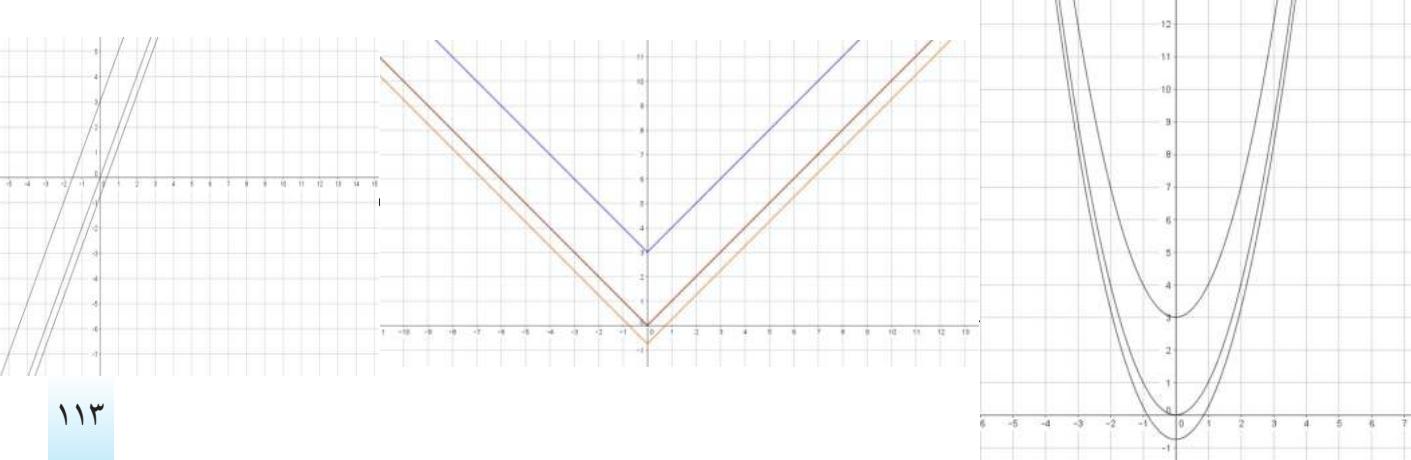


$$\begin{array}{l} D_f = [-2, +\infty) \\ R_f = [-4, 2] \end{array}$$

### رسم برخی توابع به کمک انتقال

#### فعالیت

نمودارهای توابع  $f(x) = 2x$  و  $g(x) = |x| + 3$  و  $h(x) = x^2 + 3$  و  $f(x) = 2x + 3$  داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس تابع  $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$  و  $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$  را به همین روش رسم کنید. سه واحد در راستای محور عرض‌ها در جهت مثبت انتقال داده شده‌اند.



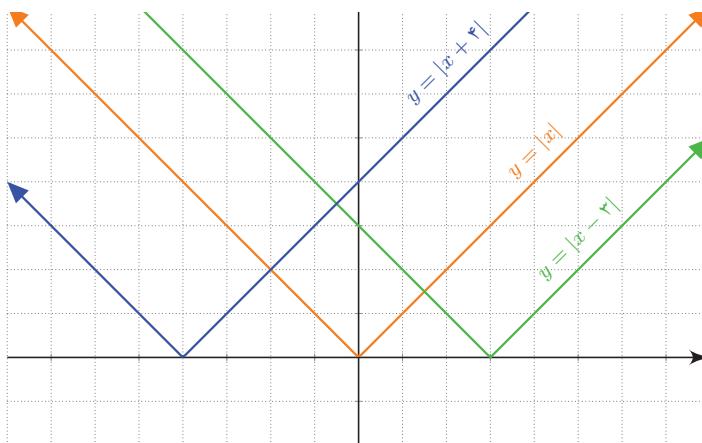
با داشتن نمودار تابعی مانند  $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع  $f(x) + k$  را با انتقال نمودار  $f(x)$  به اندازه  $k$  واحد در امتداد محور  $y$ ها به دست آورد. اگر  $k > 0$  باشد انتقال در جهت مثبت و اگر  $k < 0$  باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

## کار در کلاس

- ۱ در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع  $f(x) = |x|$  رسم شده‌اند، بباید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟ برای رسم نمودار تابع  $|x - 3|$ ، نمودار تابع  $|x|$  را به اندازه ۳ واحد در راستای محور طول‌ها در جهت راست انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع  $|x + 4|$ ، نمودار تابع  $|x|$  را به اندازه ۴ واحد در راستای محور طول‌ها در جهت چپ انتقال می‌دهیم.

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [0, +\infty)$$



برای رسم نمودار تابع  $f(x+k)$  کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در امتداد محور  $x$ ‌ها انتقال دهیم. اگر  $k > 0$  باشد، انتقال درجهت منفی و اگر  $k < 0$  باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

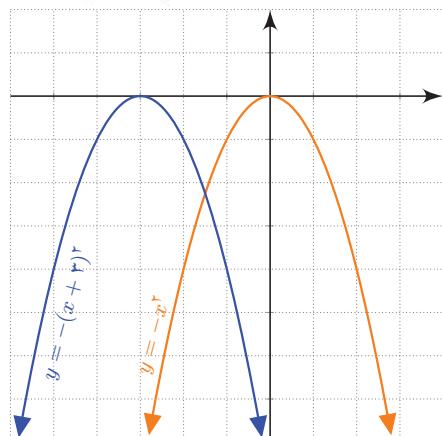
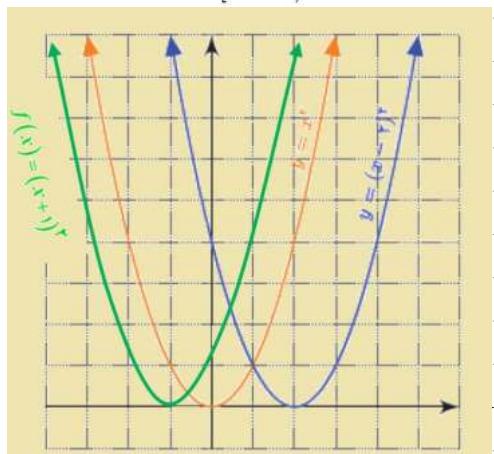
- ۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع  $f(x) = x^2$  و  $f(x) = -x^2$  نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بباید. نمودار

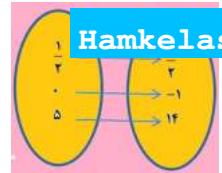
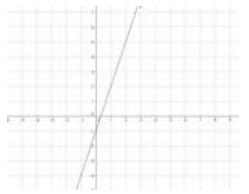
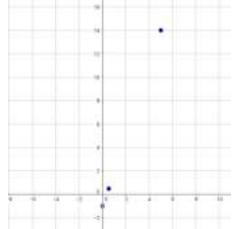
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [0, +\infty)$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, 1]$$





در شکل های زیر نمودار توابع درجه دوم  $f$ ,  $g$ ,  $t$  و  $h$  رسم شده اند.

$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می دهند؟

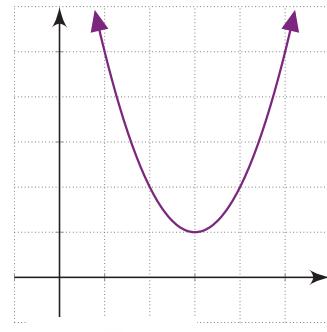
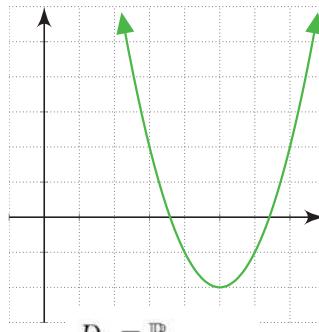
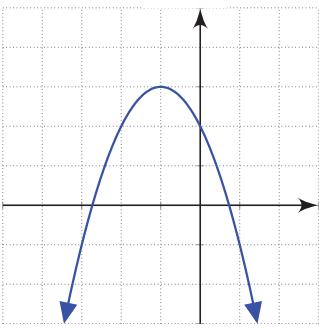
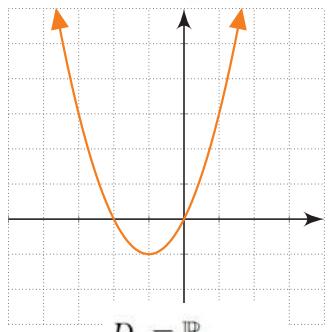
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:

$$g(x)$$

$$t(x)$$

$$f(x)$$

$$h(x)$$



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = [-1, +\infty)$$

$$D_t = \mathbb{R}$$

$$R_t = (-\infty, 3]$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [-2, +\infty)$$

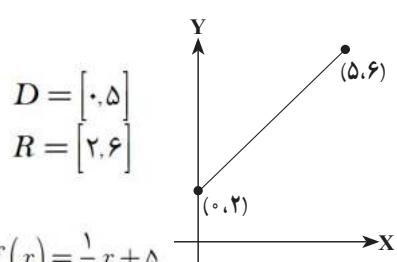
$$D_h = \mathbb{R}$$

$$R_h = [1, +\infty)$$

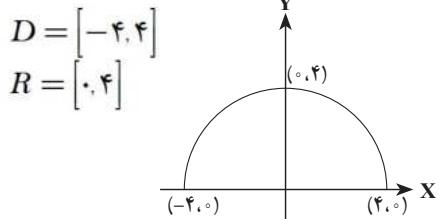
### تمرین

۱ تابع  $y = x^2 - 1$  را ده دامنه آن مجموعه  $\left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$  است، رسم نماید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودارها در بالای پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع  $\mathbb{R}$  باشد، پاسخها چگونه خواهد بود؟ برد نیز اعداد حقیقی خواهد بود.  
نمودارها در بالای همین صفحه است.

۲ در شکل های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



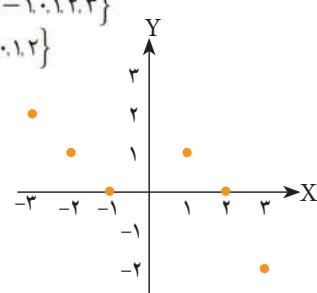
(الف)



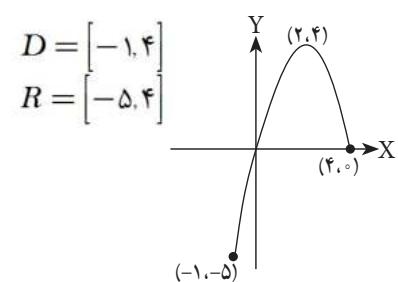
(ب)

$$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

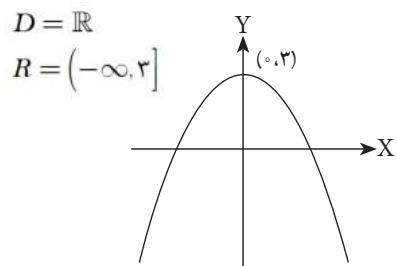
$$R = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$$



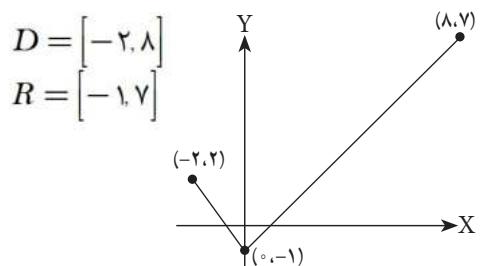
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x - 1 & -4 \leq x \leq -1 \\ x - 1 & -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

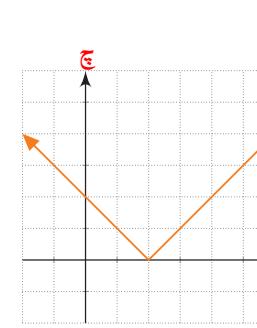
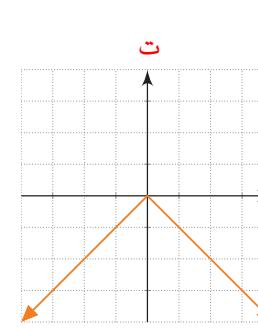
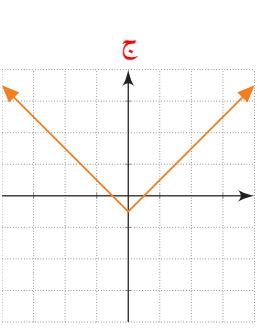
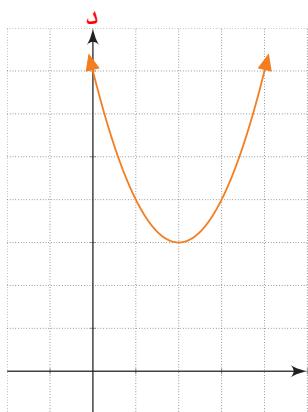
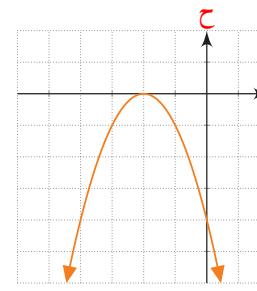
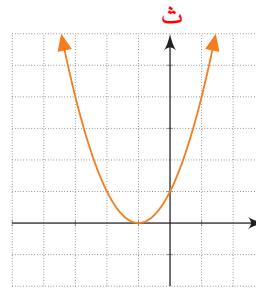
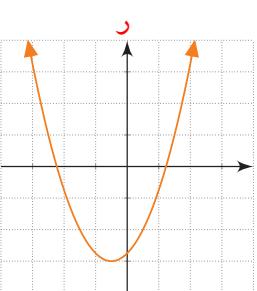
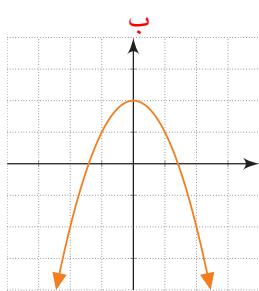
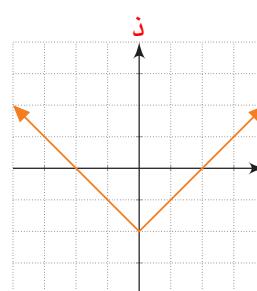
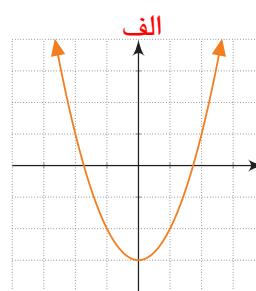
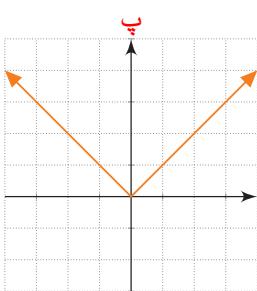
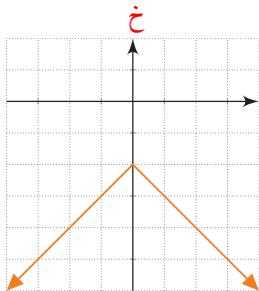
۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) دامنه تابع  $f(x) = x^2 - 1$  برابر  $(-\infty, +\infty)$  و بُرد آن نیز  $(-\infty, +\infty)$  است. نادرست
- ب) دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  همه اعداد حقیقی و بُرد آن  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  است. نادرست
- پ) دامنه تابع ثابت  $f(x) = 2$  برابر  $(-\infty, +\infty)$  است. درست

ت) اگر  $f(1) = 2x+1$  آنگاه،  $f(2) = \frac{f(2)}{2}$ . نادرست

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دونیم کره به شعاع ۲ در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳ متر باشد، حجم  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^3$  تانکر را بر حسب تابعی از  $r$  بنویسید.

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



(الف)  $y = x^2 - 3$

(ب)  $y = -x^2 + 2$

(پ)  $y = |x|$

(ت)  $y = -|x|$

(ث)  $y = (x+1)^2$

(ج)  $y = |x| - \frac{1}{2}$

(چ)  $y = |x-2|$

(ح)  $y = -(x+2)^2$

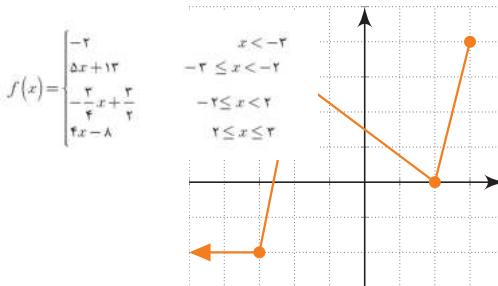
(خ)  $y = -|x|-2$

(د)  $y = (x-2)^2 + 3$

(ذ)  $y = |x|-2$

(ر)  $y = (x+\frac{1}{2})^2 - 3$

$$\begin{array}{ll} [-\infty, -1] & [-1, 0] \\ [-1, 1] & [1, \infty) \\ [-\infty, -2] & [-2, 0] \\ [-2, 0] & [0, 1] \\ [0, 1] & [1, \infty) \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] & [0, \frac{\pi}{2}] \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] & [0, \infty) \end{array}$$



- ۶ فرض کنیم دامنه هریک از توابع تمرين ۵ به بازه  $[2, 3]$  محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

- ۷ نمودار تابع  $f$  داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید. تعريف نشده:  $f(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} - 8$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$ ,  $f(6)$

$$f(6) = \frac{3}{2}, \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

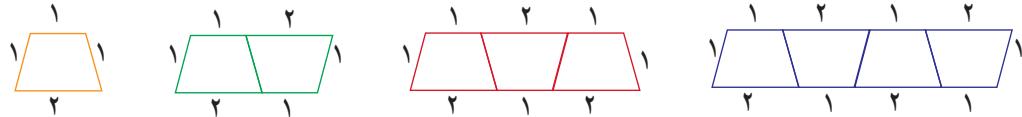
- ۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط  $(4, 3)$  و  $(0, 3)$  می‌گذرد.  $f(-4)$  و  $f(-1)$  را به دست آورید.

- ۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را بر حسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

- ۱۰ کدامیک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.  $f(x)$  تابع نیست زیرا اگر خطی به موازات محور عرض ها رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- ۱۱ الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد ذوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$

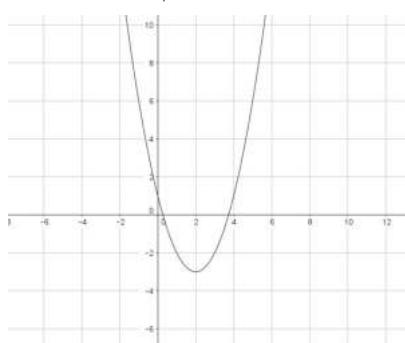
- ب) چرا رابطه بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید زیرا سطر اول، اعداد تکراری ندارد. دامنه اعداد سطر اول و برد اعداد سطر دوم است.

- ۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط  $(-2, 1)$  و  $(2, 1)$  می‌گذرد و محور y-ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جزئی این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

$$y = x^4 - 4x + 1$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-3, +\infty)$$



# شمارش، بدون شمردن

۹۶

وَإِنْ تَعْدُوا بِعْدَةَ اللَّهِ لَا تُخْصُّهَا «سوره ابراهيم آية ۳۴»  
و اگر بخواهید نمی توانید نعمت های خدا را بشمارید.



داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی هم رنگ نباشند؟

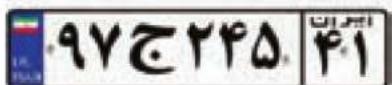
درس اول شمارش

درس دوم جایگشت

درس سوم ترکیب

## درس اول: شمارش

شاید شمارش در نظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ اما آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟



می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌های به صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟

## اصل جمع و اصل ضرب

## فعالیت

۱ امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آبمیوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آبمیوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آبمیوه هویج، سیب و بر تقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

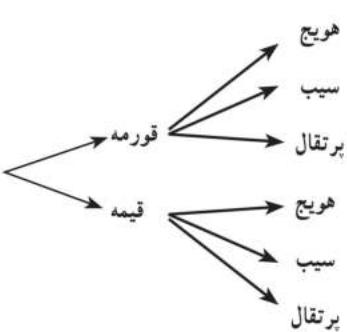
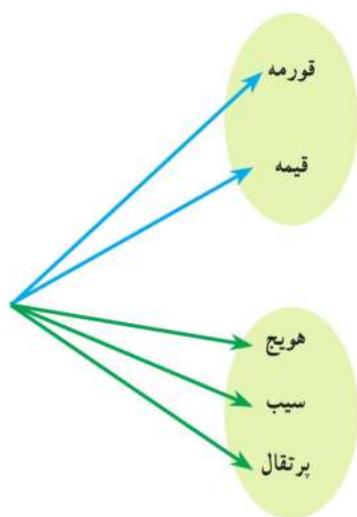
## طبق نمودار روبرو ۵ انتخاب وجود دارد

۲ هفته بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آبمیوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آبمیوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

## با توجه به نمودار روبرو ۶ انتخاب خواهد داشت

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول امین فقط به یکر از دو روسرکار را انعام می‌دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکر از دو غذا را انتخاب می‌کند و یا آنکه به آب میوه فروش رفته و یکر از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سوال دوم پوریا هر دو مکان را خواهد رفت که در اول ۲ انتخاب و در دوم ۳ انتخاب دارد.



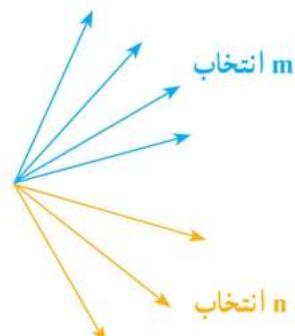
۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آبمیوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

**در سوال اول**  $5 = 2+3$  حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب

مرکزد، ولی در سوال دوم  $6 = 2 \times 3$  حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که

در مقابل، هر انتخاب در مکان اول،  $3$  انتخاب در مکان دوم دارد.

**اصل جمع:** اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول  $m$  انتخاب و در روش دوم  $n$  انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر  $m+n$  روش وجود دارد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار موردنظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آبمیوه‌فروشی» را انجام می‌دهد».

**تعییم اصل جمع:** اگر کاری را بتوان به  $k$  روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول  $m_1$  انتخاب، در روش دوم  $m_2$  انتخاب، ... و در روش  $m_k$  انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  روش وجود دارد.

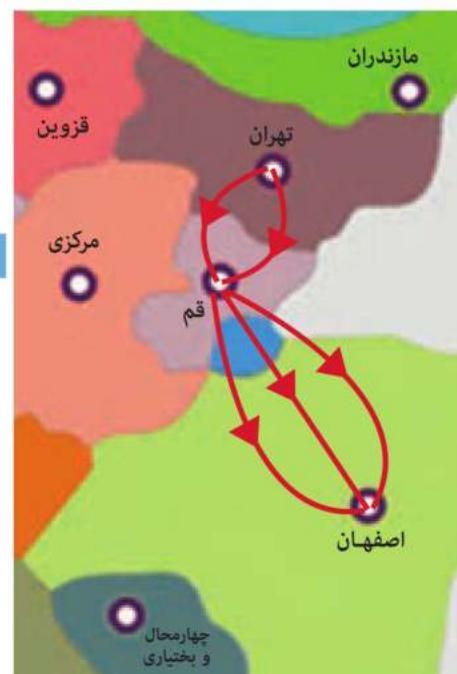
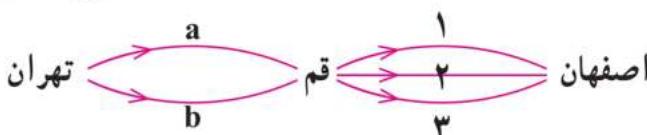
**اصل ضرب:** اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری‌که برای انجام مرحله اول  $m$  انتخاب و برای هر کدام از این  $m$  روش، مرحله دوم را بتوان به  $n$  روش انجام داد، در کل کار موردنظر با  $m \times n$  روش قابل انجام است.

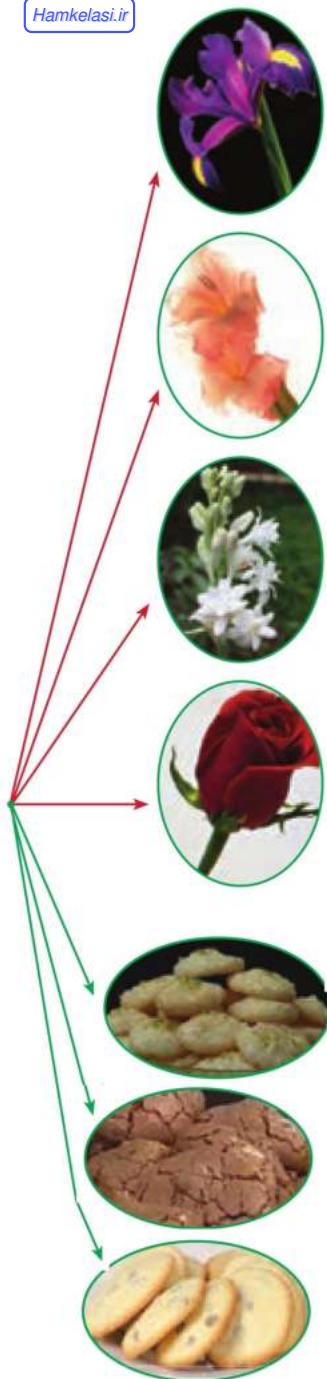
«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آبمیوه‌فروشی که مرحله دوم است، صورت می‌پذیرد».

### مثال

فردی می‌خواهد با اتوبوس خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر  $a$  و  $b$  و از قم به اصفهان سه مسیر  $1$  و  $2$  و  $3$  وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟  
حل: طبق اصل ضرب تعداد حالات  $6 = 2 \times 3$  است که عبارت‌اند از:

- |     |     |     |
|-----|-----|-----|
| a,۱ | a,۲ | a,۳ |
| b,۱ | b,۲ | b,۳ |





**تعیین اصل ضرب:** اگر انجام کاری شامل  $k$  مرحله باشد؛ بهطوری که برای انجام مرحلة اول  $m_1$  روش، برای انجام مرحلة دوم  $m_2$  روش، ... و برای انجام مرحلة  $k$  روش  $m_k$  وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحلة انتخاب تمام روش‌های آن مرحلة ممکن باشد)، کار موردنظر با  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$  روش قابل انجام است.

## کار در کلاس

۱) پژمانقصد دارد به عبادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارات انداز: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارات انداز: گردوبی، نارگیلی و کشمی. او چند انتخاب دارد؟  $4+3=7$  بنا بر این: ۷ انتخاب دارد

۲) هفته بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.  $3 \times 3 = 9$  بنا بر این: ۹ انتخاب دارد

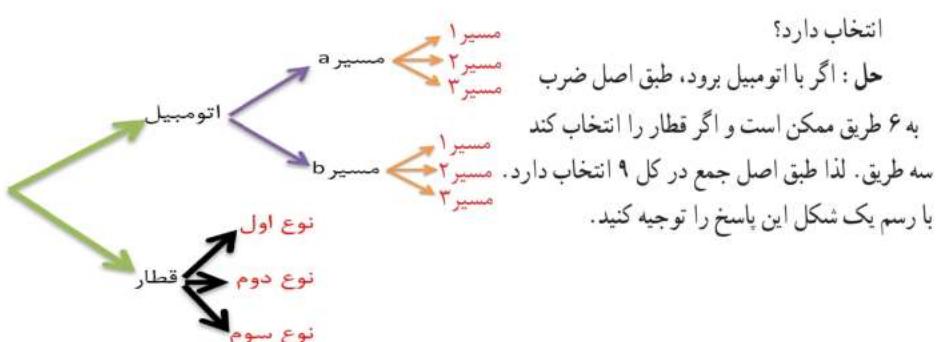
(مریم و گردوبی) و (مریم و نارگیلی) و (مریم و کشمی) و (گلایل و گردوبی) و (گلایل و نارگیلی) و (گلایل و کشمی) و (زنبق و گردوبی) و (زنبق و نارگیلی) و (زنبق و کشمی) و (رُز و گردوبی) و (رُز و نارگیلی) و (رُز و کشمی)

در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟  
در سوال (۱) پژمان مر تواند یک‌فراز دو روسری انتخاب کند که یک‌فرز و دیگر دیگر دارد.  
لذا طبق اصل جمع  $4+3=7$  انتخاب دارد و در سوال (۲) پژمان مر خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی را که طبق اصل ضرب  $3 \times 3 = 9$  انتخاب دارد.  
دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

**اصل جمع:** کتابخانه مردم راه راه ۴ کتاب در زمینه ریاضی و ۵ کتاب در زمینه سادیات دارد. اگر یک دانش‌آموز بخواهد یک‌فراز کتاب هار کتابخانه را در زمینه ریاضی یا سادیات انتخاب کند به چند راه مر تواند این کار را انجام دهد؟  $4+5=9$  بنا بر این: ۹ راه وجود دارد.  
**اصل ضرب:** لازم است ۳ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالار در یک رستوران به چند طریق مر توانی غذایی را همراه سالار سفارش کرد؟  $3 \times 5 = 15$  بنا بر این: ۱۵ نوع سفارش مختلف داریم در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

## مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند



مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل:

حالت اول: اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد:  $2 \times 2 \times 2 = 8$

حالت دوم: اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد:  $2 \times 2 \times 2 = 8$

تعداد حالات ممکن:  $8 + 8 = 16$

### کار در کلاس

**الف** با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۵۳ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتند عدد سه رقمی را به صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای بدست آوردن جواب، تعداد راههای پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب درهم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

$$5 \times 3 \times 3 = 27 \text{ تعداد حالت ها}$$

با نمودار درختی در سالهای پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای بدست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.

**ب** با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

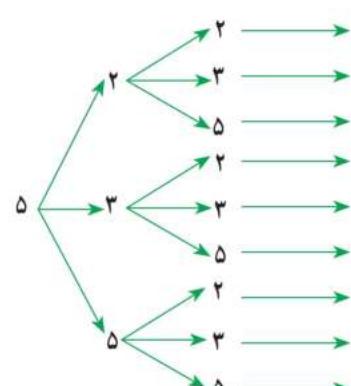
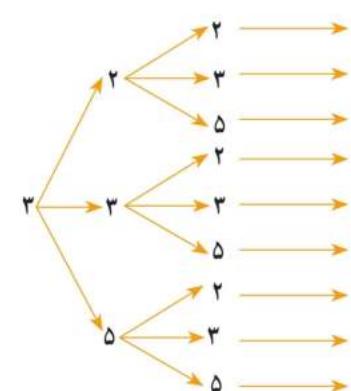
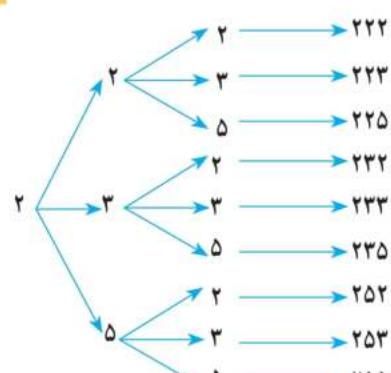


→ تعداد حالت ها ۳ حالت

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟



→ تعداد حالت ها



## درس اول: شمارش



۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟  
لذا  $6 = 1 \times 2 \times 3$ . عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

**b** با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ در اینجا **فقط عدد ۲ مرتباند** **قرار گیرد**، لذا ۱ حالت وجود دارد.

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟ در **جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد مرتباند** **قرار گیرند**، پس هر کدام لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با  $9 = 1 \times 3 \times 3$ .

**c** با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟



۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟ در **جایگاه سمت چپ فقط یک فقره از اعداد ۳ یا ۵ مرتباند** **باشد** پس ۲ حالت داریم

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟  
ب) **قرار گرفتن یک فقره از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ**، **فقط یک عدد** برابر **جایگاه وسط باقی ماند**، لذا در اینجا **فقط ۱ حالت داریم**.

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با  $2 = 1 \times 2 \times 1$ .

### مثال

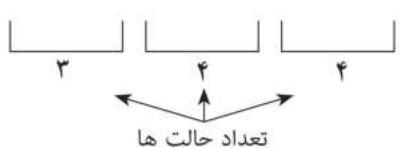
با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰.

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟



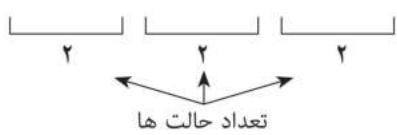
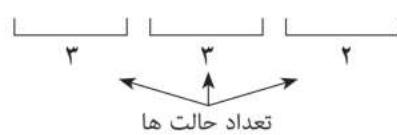
الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.

لذا  $48$  عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت.

$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

**حل :**

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند باید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین  $18$  عدد می‌توان نوشت.  
 $3 \times 3 \times 2 = 18$



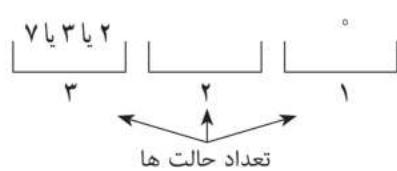
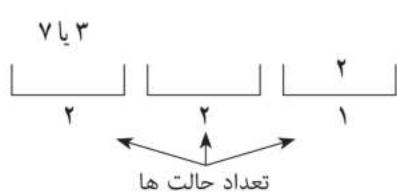
پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید  $3$  یا  $7$  باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

ت) چون عدد موردنظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید  $0$  یا  $2$  باشد و چون در حالتی که رقم  $2$  سمت راست باشد، رقم  $0$  سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول : اگر رقم سمت راست  $2$  باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

$$2 \times 2 \times 1 = 4$$



حالت دوم : اگر رقم سمت راست  $0$  باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به صورت مقابل است.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

لذا در کل  $10$  عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم : با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به صورت زیر جواب را حساب کرد :

$$\text{جواب قسمت (پ)} - \text{جواب قسمت (ب)} = \text{جواب قسمت (ت)} = 18 - 8 = 10$$

### تمرین

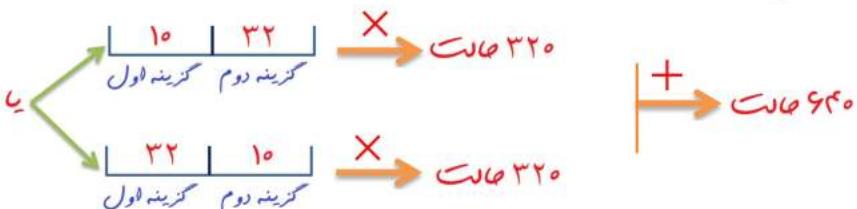
۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.  
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.  
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.  
**رمز یک‌گزینه از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ... و یا یک‌گزینه از ۳۲ صرف الفبا فارسی خواهد بود**

$$\text{بنابراین } 10 + 32 = 32 \text{ حالت داریم.}$$

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

گزینه دوم	$\times$	گزینه اول
-----------	----------	-----------

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

$$\begin{array}{c} \text{هر دو عدد باشند} \\ \text{یا} \\ \text{هر دو صرف باشند} \end{array} \quad 10 \times 10 = 100 \quad + \quad 779$$

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیرتکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیرتکراری اند.  $58500 \rightarrow 1019250$   $\times$  صروف اعداد

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

$$5 \times 8 \times 10 \times 20 = 8000 \quad \text{حداکثر} \quad 5 \times 8 \times 10 \times 30 = 18000 \quad \text{حداقل}$$

۳ می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برای اینکه راس A رنگ متفاوت با رنوسر B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبرو و دو راس دیگر قرمز باشند و بر عکس) به همین ترتیب برای راس متفاوت بودن رنوسر B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب  $2 \times 2 \times 2 = 8$  طریق دیگر این کار را امکان پذیر است.

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند. با توجه به اینکه هر راس به دو راس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نرس توافق دیگر را انجام دارد.

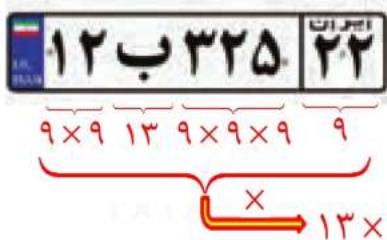
پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.  
حالت الف: با توجه به اینکه که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب های برای ایست با:

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی ۶ مرتبه زیر را با وجود سه راس و ۳

رنگ متسابق، خود به خود رنوسر هر رنگ نفواهند بود.

با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟



۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 300$$

رنده حجم موتور رنگ مدل

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل بارنگ مشکی تولید می شود؟

$$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 30$$

رنده حجم موتور رنگ مدل

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتماتیک تولید می شود؟

$$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 15$$

رنده حجم موتور رنگ مدل

۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر :

(الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ بار}} \quad \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{5 \text{ بار}} = 2^{25}$$

سؤالات دو گزینه / سؤالات چهار گزینه /

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

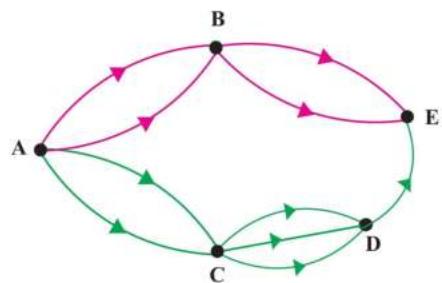
$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ بار}} \quad \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{5 \text{ بار}} = 5^{10} \times 3^5$$

سؤالات دو گزینه / سؤالات چهار گزینه /

۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

$$\left. \begin{array}{l} ABE : 2 \times 2 = 4 \\ ACDE : 2 \times 3 \times 1 = 6 \end{array} \right\} + 1.$$

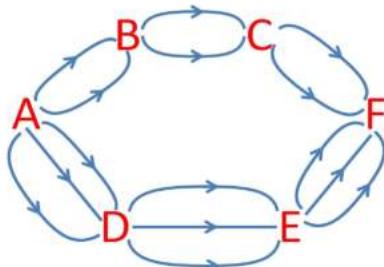
مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.  
مسئله : چند عدد دورقمی زوج می‌توان نوشت؟ به طوری که ... از عدد ... بزرگتر با مساوی آن باشند؟



حل : تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۸ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد .

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



مسئله برای سوال ۹ : اگر شکل مقابل نشان دهنده سڑک‌های سیم شهرهای F,E,D,C,B,A باشد و همه سڑک‌های یک طرفه فرض شوند ، به چند طریق مرتبه از شهر A به شهر F رفت ؟



## درس دوم: جایگشت

## جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

## فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a



۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ **خیر**

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

$$\begin{array}{cccc} & \times & & \\ 6 & & & \\ \hline & 1 & 2 & 3 \\ \text{درگاه سوم} & \text{درگاه دوم} & \text{درگاه اول} & \end{array}$$

## فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟ **۴**

– پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ **۳**

– حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ **۳** سومین و چهارمین مربع را چطور؟

**سومین مربع به ۲ روش و چهارمین مربع به ۱ روش**

– حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

❷ به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  و  $\theta$  (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

❸ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

❹ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد رقیقی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1$$

❺ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

$$n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

### معوفی یک نماد

اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز را با یک حاصل ضرب  $(n)$  فاکتوریل نمایش می‌دهیم. به طور مثال  $1! = 1 \times 2$   $2! = 1 \times 2 \times 3$   $3! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$  و الی آخر قرار داد:  $0! = 1$ .

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز برابر است با ..

### کار در کلاس

❶ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

$$\underbrace{5!}_{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5!$$

$$(ب) 8! = 8 \times 7!$$

$$(پ) 10! = 10 \times 9!$$

$$(ت) n! = n \times (n-1)!$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(الف) \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

$$(ب) \frac{10!}{9!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10.$$

$$(پ) \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$(ت) \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{6!} = 56$$

$$(ث) \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{8!} = 90.$$

$$(ج) \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-2)!} = n(n-1)(n-2)$$

$$(د) \frac{\lambda!}{5!} = \frac{\lambda \times \gamma \times \beta \times \alpha \times 5!}{5!} = 120$$

$$(خ) \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720.$$

$$(ح) \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(در) \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \dots (n-k+1)}{(n-k)!}$$

$$(د) \frac{n!}{(n-5)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

حاصل ضرب های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$9 \times 8 = \frac{9!}{7!} \quad (الف) \quad 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!} \quad (ب)$$

$$11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!} \quad (پ) \quad 8 = \frac{8!}{7!} \quad (ت)$$

$$n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!} \quad (ث)$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!} \quad (ج)$$

### فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان

نوشت؟ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با  $7!$

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با

همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به دست آوریم.

• برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه سه حرفی چند انتخاب داریم؟

برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟ **برای انتخاب صرف ۶ انتخاب و برای رسوسیم ۵ انتخاب داریم.**

• بنابراین تعداد کلمات سه حرفی موردنظر برابر است با  $7 \times 6 \times 5$

در واقع آنچه به دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی  
تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به دست آورید.  $9 \times 8 \times 7 \times 6$

۴ اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.  
**مرحله دوم:**  $9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{4!}$

۵ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آن را با استفاده از

فاکتوریل بنویسید.  
$$\frac{n!}{(n-3)!}$$

۶ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ( $n \leq r$ ) را به دست آورید و آن را با

استفاده از فاکتوریل بنویسید.  
$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب

قرار گرفتن مهم باشد، با  $P(n,r)$  نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

## مثال

با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

- الف** چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟
- ب** چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟
- پ** چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟
- ت** چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟
- ث** چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
- ج** چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

## حل :

الف) برای نوشنام کلمات ۸ حرفی بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمايز را به دست آوریم؛ لذا جواب برابر ۸ است.  
در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت‌ها روی هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر ۷ است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالت «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیانند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند، کافی است این دو حرف را یک حرف در نظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمايز را به دست آوریم که برابر است با  $7!$ . چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با  $2 \times 7! = 14!$ .

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش تایی از هشت شیء متمايز  
يعني  $P(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!}$  در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اينكه چهار حرف آخر مشخص‌اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشنام دو حرف اول توسط حروف کلمه «جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دو تایی از چهار شیء متمايز؛ يعني  $P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$

ت) چهار حرف اول، حروف کلمه «جهان» هستند که به  $4!$  حالت می‌توانند بیانند. حال  $4$  حرف آخر را باید با  $4$  حرف باقی‌مانده (گردی) نوشت که این کار را هم به  $4!$  روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمه مورد نظر به  $4! \times 4!$  روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «جهان» در کنار هم برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی  $4!$ . حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که درنظر بگیریم، برای نوشتن کلمه  $8$  حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با  $5!$ . پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با:  $4! \times 5!$ .

ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس  $3$  انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هر کدام از این  $3$  حرف برای چینش  $7$  حرف دیگر  $7!$  وجود دارد بنابراین جواب برابر است با:  $3 \times 7!$ .

## کار در کلاس

۱) یک مری فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مری وجود دارد؟

$$P(6,4) = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 360$$

با عدد های  $5$  و  $3$  و  $2$  و  $1$  چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

$$P(4,3) = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!} = 24$$

## تمرین

۱) در یک لیگ فوتبال  $18$  تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

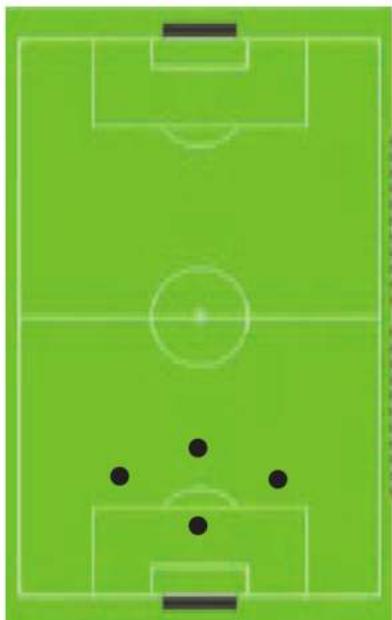
$$P(18,3) = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 4896$$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار  $210$  تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

$$P(n,3) = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$$

۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$6! = 3! + 3!$	$6! = 6 \times 5!$
نادرست	درست
$8! = 4! \times 2!$	$2 \times 3! = 6!$
نادرست	نادرست
$(3!)^2 = 9!$	$4! = \frac{8!}{2!}$
نادرست	نادرست



۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فسردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$P(20,3) = 13680$

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟  $6!$  چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟  $P(6,4) = 360$

پ) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$$2 \times 3 \times 4 \times 3$$

ت) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

جابه جایی کلی گ یا ل و پیرا

$$4! \times 2 \times 2 = 96$$



## درس سوم: ترکیب

## فعالیت

۱ همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد  $= 6 = \frac{5!}{(5-3)!}$  عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌انداز:

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۲۵	۱۴۵	۲۲۴	۲۲۵	۲۴۵	۲۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۲۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۲۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۲۲۵	۴۲۵	۴۲۵
۲۲۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۲۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۲۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۲۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۵۴۱	۴۲۲	۵۲۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

عدد ها موجود در هر ستون دارای سریع هستند و فقط جایگشت های مختلف ارقام صورت گرفته است.

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

کافیست ارقام انتخاب شده در هر ستون را به عنوان یک زیرمجموعه انتخاب کنیم. بنابراین ده زیرمجموعه رسه عضو سه عضو دارد.

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را تمایز کرد؟

در فعالیت (۱) ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم بود و در فعالیت (۲) ترتیب قرار گرفتن ارقام اهمیت نداشت.

۳ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعه سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟ یک زیرمجموعه

۴ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟

این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟

هر سه عضو از اعضا سه زیر مجموعه را به  $= 3!$  طریق ممکن در ترتیب های مختلف نوشت و اعداد مقاوتر ساخت.

نتیجه: همان‌طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرار گرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینش هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعه سه عضوی از مجموعه A را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعه ۳ عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو موردنظر اهمیت دارد.

از طرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء از  $n$  شیء متمایز برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی از  $n$  شیء متمایز برابر

است با :

$$\frac{P(n,r)}{r!}$$

به هر انتخاب  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی

به هر زیرمجموعه  $r$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی، یک ترکیب  $r$  تایی از  $n$  شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز را معمولاً با  $C(n,r)$  یا  $\binom{n}{r}$  نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

### مثال

از میان شش کتاب مختلف

**الف** به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

**ب** به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

**حل:**

(الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های

$$چهارتایی از شش شیء متمایز؛ یعنی ۳۶ = \frac{6!}{(6-4)!}$$

(ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد

که برابر است با :

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

### مثال

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر :

**الف** کمیته ۴ نفره باشد؟

**ب** کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

**ب** کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

**ت** کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

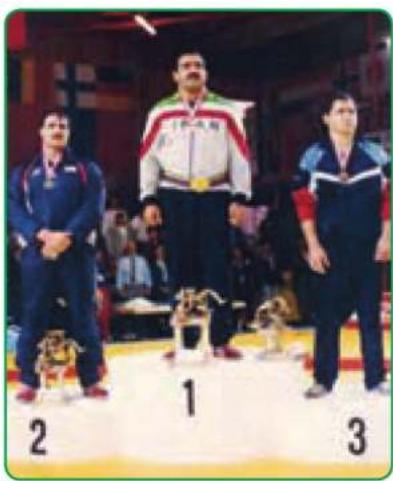
**ث** کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

**ج** کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟



غلامرضا تختی، قهرمان جهان

حل :



علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین وزن جهان

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با :

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با :  $\binom{4}{1} = 4$ . به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با :

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

پ) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با :  $\binom{4}{2} = 6$ . حال ۳ داور دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که به  $\binom{5}{3} = 10$  حالت می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین

طبق اصل ضرب، تعداد روش‌های انجام کار برابر است با :

$$6 \times 10 = 60$$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی که داوران ایرانی

۳ نفر باشند، این داوران به  $\binom{4}{3} = 4$  حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفر دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به  $\binom{5}{2} = 10$  طریق می‌تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب  $4 \times 10 = 40$  روش وجود دارد.

در حالتی که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به  $\binom{4}{4} = 1$  روش صورت می‌گیرد و یک داور دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به  $\binom{5}{1} = 5$  طریق می‌تواند صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت  $5 \times 1 = 5$  روش وجود دارد و جواب کل برابر است با  $40 + 5 = 45$ .

ث) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با :  $\binom{4}{3} = 4$ ، تعداد روش‌های انتخاب

۲ داور ژاپنی برابر است با :  $\binom{3}{2} = 3$  و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با :

$$\binom{2}{2} = 1 \quad \text{لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با : } 4 \times 3 \times 1 = 12$$

ج) می‌دانیم تعداد کل کمیته‌های ۵ نفره که می‌توان انتخاب کرد، برابر است با  $\binom{9}{5} = 126$ . از طرفی این کمیته‌های ۵ نفره به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند :

دستهٔ اول : حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دسته دوم: هیچ داور ایرانی در آنها نیست.

جمع افراد این دو دسته برابر  $126$  می شود و از آنجا که محاسبه دسته دوم آسان تر است، کافی است تعداد دسته دوم را محاسبه کنیم و از  $126$  کم کنیم.

$$\text{اما تعداد افراد دسته دوم برابر } 1 = \binom{5}{5} \text{ است. چرا؟}$$

با توجه به این که مرضوه‌هایم داور ایرانی درون گنج نباشد، هر  $5$  نفر از  $5$  نفر داور زبانی و روسی انتخاب مرکنیم لذا تعداد افراد دسته اول برابر است با:  $126 - 1 = 125$

### کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های

$n$  شیء از  $n$  شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های  $n$  تایی از  $n$  شیء متمایز مشخص شود؟

(الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون حرفاً تکراری با  $5$  حرفاً متمایز (بامعنى و بى معنى). **ترتیب مهم است**.

(ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز. **ترتیب مهم نیست**

(پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت دفاع که همگی

در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند. **ترتیب مهم است**

توجه: به نظر بندۀ حقیر بیشتر بود منم قسمت (پ) به صورت زیر نوشته مرشد، تا خالص از هرگونه ابهام باشد:

انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط، به ترتیب گفته شده، از بین هفت دفاع که همکثر در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند. **ترتیب مهم نیست**

(ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. **ترتیب مهم نیست**

(ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های

طلاء، نقره و برنز داده شود. **ترتیب مهم است**

در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده‌کردن جواب نیست)

$$P(5,3) \quad (\text{الف})$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$P(7,3) \quad (\text{پ})$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ث})$$

$$P(10,3) \quad (\text{ج})$$

۲ از میان  $8$  ریاضی‌دان و  $6$  فیزیک‌دان و  $5$  شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب

شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{8}{2} = 10 \times 15 \times 28 = 4200 \quad \text{(الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند?}$$

$$\binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{8}{1} = 5 \times 6 \times 8 = 240 \quad \text{(ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند?}$$

$$\binom{8}{1} \times \binom{11}{1} + \binom{8}{2} = 88 + 28 = 116 \quad \text{(پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد?}$$

### فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

به جواب‌های چند دانش آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.

محمد: از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته سوم کسی انتخاب نشود؛  
لذا سه حالت زیر را می‌توان درنظر گرفت:

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{0} = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{0} \binom{2}{1} = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

پس در کل  $4+4+4=12$  حالت امکان دارد.

پژمان: می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های

انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به  $\binom{3}{2}$

راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشته انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب

$$\binom{3}{2} \times 2 \times 2 = 12$$

کرد؛ لذا جواب برابر است با:

حمدید: ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن را حل کرد.

اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشته او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر است با  $6 \times 4 = 24$  حالت است.

– دو نفر مدرس ریاضی را  $M_1$  و  $M_2$ ، دو نفر مدرس فیزیک را  $P_1$  و  $P_2$ ، و دو نفر مدرس شیمی را  $C_1$  و  $C_2$  در نظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.

پاسخ صیده با توجه به نمودار درختی روی رو غلط نیست.

### فعالیت

۱) می‌دانیم که همان تعداد زیر مجموعه‌های اتالی از یک مجموعه  $n$  عضوی است.  
حال  $\binom{n}{r}$  و  $\binom{n}{n-r}$  را یکبار با توجه به این تعبیر از

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{و} \quad \binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!r!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!r!} = n \quad \text{و} \quad \binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!r!} = n$$

به زمین نمی‌روند	به زمین می‌روند
۱, ۲, ۳	۴, ۵
۱, ۲, ۴	۳, ۵
۵ و ۱	۳ و ۶
۳ و ۱ و ۱	۲ و ۵
۵ و ۳ و ۱	۳ و ۶
۵ و ۳ و ۱	۳ و ۶
۳ و ۳ و ۲	۴ و ۱
۳ و ۳ و ۲	۴ و ۱
۵ و ۳ و ۲	۴ و ۱
۳ و ۳ و ۲	۴ و ۱
۵ و ۳ و ۲	۴ و ۱

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

اُبانت به کمک فرمول:

۲ جاهای خالی را پرکنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با:

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست

$$\binom{۲۶}{۵}$$

برابر است با:

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست،

$$\binom{۲۵}{۵}$$

برابر است با:

$$\binom{۲۶}{۵} = \binom{۲۵}{۳} + \binom{۲۵}{۵}$$

ت) بنابراین:

۲ فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ( $a \in A$ )

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه A برابر است با:

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با:

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

ت) بنابراین:

۱) یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، خودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۲) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

۳) در یک کلاس تعدادی از دانشآموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ **فرمکنیم تعداد داوطلبان n نفر باشد بنابرایم:**

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow n = 8$$

۴) گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 120 + 210 + 252 = 582$$

۵) یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$4 + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

**چون میکنیم ابتدا میزان ترکیب رنگ‌ها یکسان باشد به طور مُنْعَلِی یکباره  $\frac{1}{5}$  از یک رنگ و  $\frac{4}{5}$  از رنگ دیگر استفاده شود و با این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.**

۶) هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{7}{3} = 35$$

۷) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص

درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

$$\binom{10}{3} = 120 \quad \text{الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟}$$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

اگر اینم دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقیماند انتخاب فواهد شد و در نتیجه:

$$\binom{8}{1} = \text{تعداد حالات وجود دو ادویه با هم}$$

$$\binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112 \quad \text{پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟}$$

$$\binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119 \quad \text{ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟}$$

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20 \quad \text{هر سه ادویه باید از دسته راول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته سوم انتخاب شوند. بنابراین:}$$

۸) مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

$$\binom{5}{3} \times \binom{6}{2} \quad \text{الف) مسئله: به چند طریق مرتولان از بین ۵ مرد و ۶ زن، ۵ نفر انتخاب کرد به طور که در این انتخاب ۳ زن و ۲ مرد وجود داشته باشد؟}$$

مسئله: احتمال مرتولان با پول هارفلکشن ۳ مداد یا ۳ پاک کم ( فقط یکراز اینم دو نوع) را خریدار نکند. اگر در مقاذه سروازم لنتسر بر فروش فقط ۶ نوع مداد و ۵ نوع پاک کم موجود باشد، احتمال چند انتخاب بر هارفلکشن دارد؟

اشترانکوه، لرستان



تهیه کنندگان:

جلبر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افшин ملاسعیدی



# آمار و احتمال



امروزه آمار و احتمال به عنوان یک علم پرکاربرد در همه علوم از جمله علوم پزشکی، علوم فنی و مهندسی، هواشناسی، محیط زیست و ... استفاده می شود.



آمار و احتمال در پزشکی



آمار و احتمال در کشاورزی



آمار و احتمال در مهندسی کامپیوتر



آمار و احتمال در محیط زیست

درس اول احتمال یا اندازه‌گیری شناسی

درس دوم مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

درس سوم متغیر و انواع آن

## درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شناسی

### مقدمه

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما از چگونگی رخ دادن آنها اطلاع نداریم. به عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکردایم، نتیجهٔ پرتاب سکه (پشت یا رو آمدن آن)، مشخص نیست. چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجهٔ آن به طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد؛ اما از همهٔ حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم. به عنوان مثال نتیجهٔ یک بازی فوتبال از قبل، قابل پیش‌بینی نیست؛ اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد. همان‌طور که در سال قبل خواندید، مجموعهٔ شامل همهٔ این حالت‌های ممکن، فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود. اگر این مجموعه را  $S$  بنامیم، هر زیرمجموعهٔ  $S$  مانند  $A$  را یک پیشامد تصادفی در  $S$  می‌نامیم.



### پیشامدهای تصادفی

#### فعالیت

- اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سوال‌ها پاسخ دهید :

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)



۲) قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟ پیشامد هایی که در آن بصیر دو عدد رو شده برابر ۷ باشد.

۳) خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هائیور بزنید؛ چه الگویی به دست می‌آید؟ هر دو حالت ۱۸ موردن را باشند، ۹ موردن هر دو عدد رو شده زوج و ۹ موردن هر دو عدد رو شده فردند باشند.

۴) با توجه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

مسئله: تعداد حالت‌هایی را بنویسید که در آن اعداد رو شده برابر باشند. جواب: ۶ حالت وجود دارد.

۵) با توجه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است) مجموع دو عدد رو شده  $= x_i$  و تعداد  $n =$

$x_i$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱



$$n(x_i) = \begin{cases} x_i - 1 & x_i = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 13 - x_i & x_i = 8, 9, 10, 11, 12 \end{cases}$$

کاردرگلاس

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱) آیا می‌توانید نتیجه حاصل را به صورت قطعی بیان کنید؟ ضریر

۲) آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟ بدء، تعداد فراتر از زیر نتیجه را کن قبل از وقوع قابل پیش‌بینی نیست.

۳) همه حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

۴) عرو در ۴ و ۳ ر و ۲ ر و ا رو ع پ و ۵ پ و ۴ پ و ۳ پ و ۲ پ و ا پ

۵) تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به دست آورید.  $2 \times 6 = 12$

۶) جدول  $2 \times 6$  یا  $6 \times 2$  مربوط به این آزمایش رارسم کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ع پ	۵ پ	۴ پ	۳ پ	۲ پ	۱ پ	
ع ر	۵ ر	۴ ر	۳ ر	۲ ر	۱ ر	

مثال ۱

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ اما از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجه به اصل ضرب تعداد همه حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از:  $2^4 = 16$ . حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید.

پیشامد های زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف) پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» = A

{(د، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، د)}

ب) پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» = B

{(پ، پ، پ، پ) و (د، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، د، پ، د)}

پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» =  $C = \{(p, p, d), (p, d, p), (d, p, p), (d, d, p), (p, p, p)\}$

پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد» =  $D = \{(p, p, p), (p, p, d), (p, d, p), (p, d, d), (d, p, p), (d, p, d), (d, d, p)\}$

### مثال ۴

در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از  $\binom{5}{3} = \dots$  زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = \{R_1 R_2 R_3, R_1 R_2 B_1, R_1 R_2 B_2, R_1 R_3 B_1, R_1 R_3 B_2, R_2 R_3 B_1, R_2 R_3 B_2, B_1 B_2 R_1, B_1 B_2 R_2, B_1 B_3 R_1, B_1 B_3 R_2, B_2 B_3 R_1, B_2 B_3 R_2\}$$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت:

$$A = \{B_1 R_1 R_2, B_1 R_1 R_3, B_1 R_2 R_3, B_2 R_1 R_3, B_2 R_2 R_3, B_3 R_1 R_2\}$$

$$B = \{B_1 R_1 R_2 R_3, R_1 R_2 R_3\}$$

$$C = \{R_1 R_2 R_3\}$$

اگر S را مجموعه مرجع فرض کنیم، متمم A' یعنی 'A با کدامیک از مجموعه‌های B یا C برابر است؟ ستم A' یعنی  $A' = C$  است.

### پیشامدها و برخی اعمال روی آنها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت هر یک از پیشامدهای (A-B)، (A ∩ B)، (A ∪ B) در فضای نمونه‌ای S به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند:

**(الف) اجتماع دو پیشامد:**

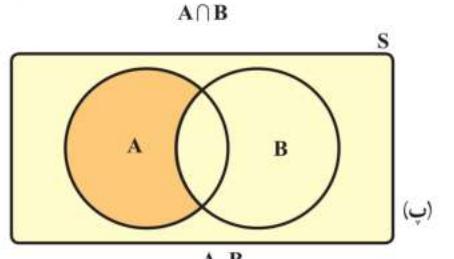
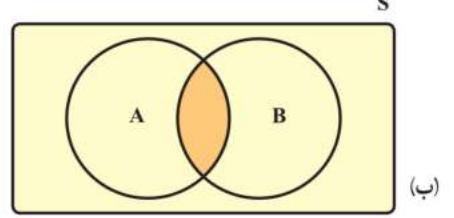
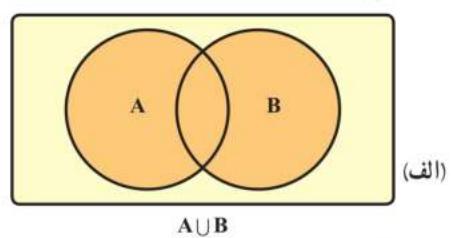
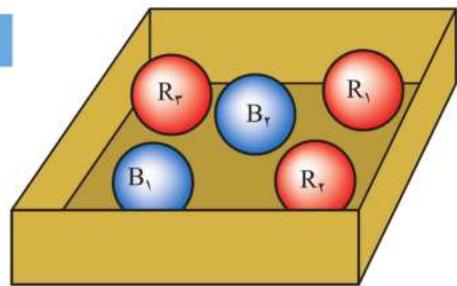
پیشامد  $A \cup B$  وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد.  
(یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند).

**(ب) اشتراک دو پیشامد:**

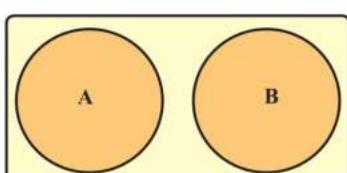
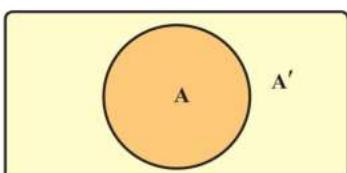
پیشامد  $A \cap B$  وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد).

**(پ) تفاضل دو پیشامد:**

پیشامد  $A - B$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.



## درس اول: اختلال بر اندامگیری شناس



**ت) متمم یک پیشامد:**  
اگر  $A$  یک پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشد، متمم پیشامد  $A$  که با ' $A'$  ( $A^c$ ) نمایش داده می‌شود، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد؛ بنابراین با توجه به نمودار واضح است  $A \cap A' = \emptyset$  و  $A \cup A' = S$

**تعريف:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و  $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت  $A$  و  $B$  را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی‌دهند.

**تذکر:** با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند  $A$  و متمم آن یعنی  $A'$ ، دو پیشامد ناسازگارند.  
اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cap C = \emptyset$  و  $B \cap C = \emptyset$  باشد.

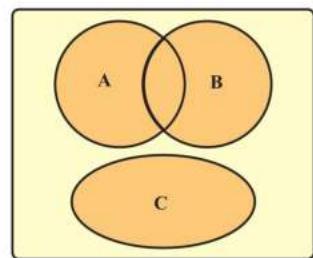
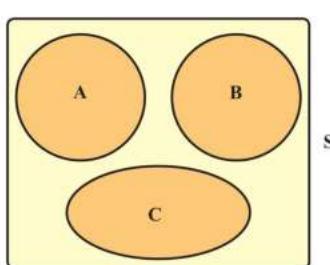
### مثال ۱

اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای «روشندن عدد بزرگ‌تر از ۴»، «روشندن عدد کوچک‌تر از ۳» و «روشندن عدد ۳ یا ۴» را به ترتیب  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعریف کنیم، در این صورت همواره، پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  دو به دو ناسازگارند و داریم:  
 (الف)  $A = \{5, 6\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{3, 4\}$   
 (ب)  $A' = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B' = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $C' = \{1, 2, 5, 6\}$

### مثال ۲

کدام یک از شکل‌های زیر سه پیشامد دو به دو ناسازگار را نشان می‌دهد؟

جواب  $\Rightarrow$



### کار در کلاس

- ۱ با توجه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پر کنید.
  - $A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$  = پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند
  - $B = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$  = پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد
  - $C = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$  = پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید

**الف** پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$$(A \cap B) = \{(1,5), (5,1), (3,3)\} \rightarrow n(A \cap B) = ۳$$

**ب** پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$$A \cup B = \{(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5)\}$$

**ب** پیشامد آنکه  $(A-C)$  رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی مجموع دو تاس  $\neq 6$  باشد». پس داریم:

$$A-C = \{(1,1), (1,3), (1,5), (5,5), (5,3), (1,5)\}$$

**ت** پیشامد  $(C-B)$  را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید. تا سرگیر ضرب ۳ باشد و در مجموع دو تاس  $\neq 6$  باشد.

$$C - B = \{(3,1), (3,3), (3,5), (3,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5), (6,6)\}$$

**ث** اگر پیشامد  $D$  را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد  $E$  را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم، آیا  $D$  و  $E$  ناسازگارند؟ چرا؟ بد ناسازگارند نزیرا:

$$D = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \\ E = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\} \quad D \cap E = \emptyset$$

**۲** تاسی را می اندازیم، روی فضای نمونه ای حاصل، پیشامدهای  $A$  و  $B$  و  $C$  را طوری تعریف کنید که:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5\} \quad \text{الف} \quad A \text{ و } B \text{ ناسازگار باشند.}$$

$$A = \{1\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{5, 6\} \quad \text{ب} \quad A \text{ و } B \text{ و } C \text{ دو به دو ناسازگار باشند.}$$

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{5, 6\} \quad \text{پ} \quad (A \cap B) \text{ و } C \text{ ناسازگار باشند.}$$

### مثال ۷

یک تاس و ۲ سکه را با هم می اندازیم:

**الف** فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

$$n(S) = 2 \times 2 \times \dots \times 6 = \dots \times 6$$



**ب** پیشامد آنکه «هر دو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

$$A = \{6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

**پ** پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ باید» را تشکیل دهید.

$$B = \{6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

### احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شанс)

می‌دانیم اگر  $S$  فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و  $A \subseteq S$  یک پیشامد در فضای  $S$  باشد، احتمال رخداد پیشامد  $A$  یعنی  $P(A)$  که به صورت  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  تعریف می‌شود،

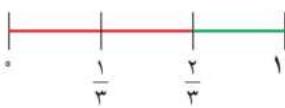
عددی است حقیقی که  $0 \leq P(A) \leq 1$ . همچنین می‌دانیم  $P(A)$  هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شанс رخداد  $A$  بیشتر و هر چقدر به صفر نزدیک‌تر باشد، شанс رخداد  $A$  کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبه  $P(A)$  شанс رخداد پیشامد  $A$  را اندازه‌گیری می‌کنیم.



## مثال ۱

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم:

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شناسی رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$$S = \{43, 34, 24, 42, 23, 32\}$$

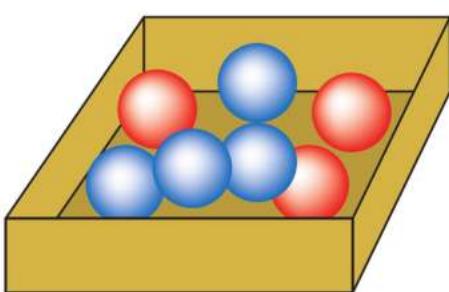
$$A = \{34, \dots, 55, \dots, 32\}, B = \{43, \dots, 53, \dots\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

واضح است که  $P(A) > P(B)$ ، پس شناسی رخداد پیشامد A از شناسی رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال تعداد عدددهای زوج از تعداد عدددهای فرد، بیشتر است)

## مثال ۲

در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:



$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

الف هر سه مهره آبی باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$$

ب هر سه مهره همنگ باشند.

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{35} = \frac{1}{7}$$

پ دقیقاً ۲ مهره همنگ باشند.

یا هر سه مهره آبی، یا هر سه قرمز

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} + \binom{3}{1} \times \binom{4}{2}}{35} = \frac{18+12}{35} = \frac{6}{7}$$

دو مهره قرمز و یک مهره آبی یا دو آبی و یک قرمز

## فعالیت

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضای نمونه باشند، در این صورت:

$$I) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$II) P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$$

$$III) \frac{n(A)}{n(S)} \leq P(A) \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0, P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

$$\text{III) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{زیرا: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{تفصیل طرفین بر } n(S)}$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

برای هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای نمونه‌ای  $S$ ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



آندری نیکولاویچ کولموجوروف ریاضی‌دان اهل روسیه بود که دستاوردهای برجسته‌ای در زمینه‌های احتمال دارد. او برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ میلادی اصولی تحت عنوان اصول احتمال را معرفی کرد.

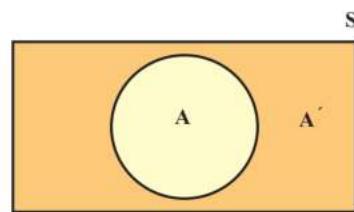
### کار در کلاس

اگر  $A'$  متمم  $A$  در فضای نمونه‌ای  $S$  باشد، ( $A$  و  $A'$  ناسازگارند) نشان دهید.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A \cup A') = P(S) = 1$$

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$



### مثال ۱

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

**الف** هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس  $n(S) = 36$ )

$$A = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

**ب** مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند

$$B = \{(3,5), (5,3), (6,2), (4,4)\}$$

$$C = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$



تو کز سرای طبیعت نمیروی بیرون  
کجا به کوی طریقت گذر توانی کرد

فرض کنیم تعداد دکمه‌های یک رایانه ۵۰ عدد باشد و کودکی که خواندن و نوشتن نمی‌داند، به صورت تصادفی شروع به تایپ کردن کند. چقدر احتمال دارد که یک کلمه مانند «طبیعت» را تایپ کند؟

از آنجایی که رایانه ۵۰ دکمه دارد احتمال انتخاب هر حرف مانند «ط» برابر است با  $\frac{1}{50}$ . چون این کلمه ۵ حرف دارد احتمال تایپ آن برابر است با

$$\frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{5^{10}}$$

اگر همین کودک بخواهد بیت بالا را به طور تصادفی تایپ کند احتمال آن چقدر است؟ این عدد چقدر کوچک است؟

حال اگر شعری که این بیت در آن قرار دارد بخواهیم تصادفی تایپ کنیم احتمال آن چقدر می‌شود؟ اگر کسی به شما بگوید به طور تصادفی کودکی کتاب حافظ را تایپ کرد شما باور می‌کنید؟ طبیعتی که در اطراف ما است بسیار پیچیده‌تر از شعر حافظ است، آیا می‌توان پذیرفت که به طور تصادفی به وجود آمده است؟

# دیده‌ای جهان

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{2}{36} =$$

$$(B \cap C) = \{(3,5), (5,3)\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{36}$$

**پ** مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشد؟

$$D = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \rightarrow \text{مجموع دو تاس ۷}$$

$$A = \text{هر دو تاس زوج} \rightarrow n(A) = 6, (A \cap B) = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(D \cup A) = P(D) + P(A) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{15}{36}$$

**ت** مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبه آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

$$A' = \text{پیشامد مجموع کمتر از ۱۱}$$

$$(A') = \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \quad (\text{پیشامد مجموع، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱})$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{3}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$$

**ث** حاصل ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

$$A = \{(2,6), (6,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36}$$

## مثال

اگر حروف کلمه جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد:

**الف** حرف «ای» آخر باشد؟

**ب** دو حرف «ای» و «د» کنار هم باشند؟

**پ** با حرف «ج» شروع و به حرف «ای» ختم شود؟

حل:

طبق مثال حل شده در فصل ۶ داریم:

$$P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8} \quad (\text{الف})$$

$$P(B) = \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{2}{8} \quad (\text{ب})$$

$$n(C) = 1 \times 2 \times \dots \times 6$$

$$P(C) = \frac{6!}{8!} = \frac{1}{56} \quad (\text{پ})$$

ج ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۱ ا

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم :

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$S^5 = 32$$

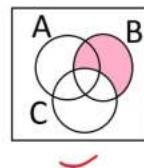
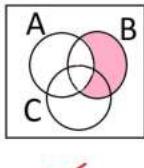
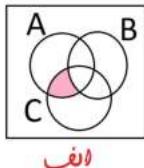
ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

$$A = \{4, 8\}$$

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.

$$A = \{4, 8\}$$

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.



الف) پیشامدهای A و C رخ بدنهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کيسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کيسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید :

$$\text{الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد } A \text{ که در آن «عدد روی کارت زوج باشد». } A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد».

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

$$S = \{ppp, ppd, pdp, dpp, pdd, dpd, ddp, ddd\}$$

$$E = \{ppd, pdp, dpp, pdd, dpd, ddp, ddd\}$$

پ) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$$\{(p,1), (p,2), (p,3), (p,4), (p,5), (p,6), (r,r,r), (r,p,r), (r,r,p), (r,p,p)\}$$

$$\{(p,2)(p,4)(p,6)\}$$

$$\{(r,r,r), (r,p,r), (r,r,p)\}$$

۵ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنسی روی میز انتخاب

کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{0} + \binom{3}{0} \times \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{3}{5}$$

پ)

۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

۷) یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر  $\frac{34}{100}$  درصد از مشتریان کارت نوع A و  $\frac{62}{100}$  درصد

کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{34}{100} + \frac{62}{100} - \frac{15}{100} = \frac{81}{100}$$

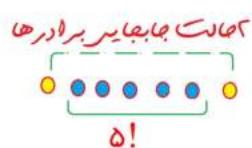
کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

۸) اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:



$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالت های دو برادر}}{5!} = \frac{5! \times 2!}{5!} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟



$$P(B) = \frac{\text{تعداد حالت های جایگایی برادرها}}{5!} = \frac{5! \times 2}{5!} = \frac{1}{2}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \xrightarrow{\div n(S)} \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



ماد عصر احتمال به سرمی برم

در عصر شک و شاید

در عصر پیش می‌بین وضع هوا

از هر طرف که باشد باید

در عصر قاطیت تردید

عصر جدید

عصری که بیچ اصلی

جز اصل احتمال، یقینی نیست

امان

بی نام تو

حتی

یک سخط احتمال ندارم

قصیر امین پور

تهیه کنندگان:

جلبر علمری، مریم غزنوی، آنلیتا کمیجانی، افشن ملاسعیدی

## درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه



آبا تاکنون به نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمره یک خانواده فکر کرده‌اید؟

خانواده‌ای را که شامل پدر، مادر و فرزندان است، در نظر بگیرید. اعضای این خانواده در فصل بهار، می‌خواهند به یک مسافرت تفریحی به یکی از شهرهای کشور بروند.

برای این منظور پدر و مادر خانواده با پیگیری اخبار هواشناسی، به دنبال تعیین مناسب ترین زمان برای مسافرت خود هستند. در این اخبار، کارشناس هواشناسی می‌گوید:

«براساس اعداد و ارقام جمع آوری شده، درباره میزان دمای هوا، رطوبت جوی و بارش باران طی ده روز گذشته و با استفاده از روش‌های مدل‌بندی هواشناسی، پیش‌بینی می‌شود، دمای هوا طی سه روز آینده ۵ درجه گرم‌تر شود و بدون تغییر در میزان رطوبت جوی، هوا صاف آفتابی باشد.»

آنها پس از شنیدن این گزارش، تصمیم می‌گیرند سه روز آینده را برای مسافرت انتخاب کنند.

بنابراین هرچه اطلاعات دقیق‌تر و کامل‌تر باشد و از روش‌های مناسب‌تری برای پیش‌بینی استفاده شود، تصمیم‌گیری‌های بهتری در خانواده گرفته می‌شود.

## تعريف آمار و علم آمار :

**آمار**، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاؤت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

تصمیم‌گیری را کشت انواح نفل با توصیه به میزان مخصوص آنها / تصمیم‌گیری را انتخاب رانشبورنسونه مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

جمع آوری اعداد و ارقام

سازماندهی و نمایش اعداد

تحلیل و تفسیر داده

نتیجه‌گیری و قضاوت

۲ با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

جمع آوری اطلاعات

سازماندهی و نمایش آمار مربوط به دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی

تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی

پیش‌بینی و تصمیم‌گیری در مورد وضعیت هوای روزهای آینده

۳ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ آمار، مجموعه از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار، مجموعه از روش‌ها است، لیکن روش‌ها عبارتند از جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تغییر و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پریده‌ها و آنزمایش‌های تصادفی

۴ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع آوری کرده است.



کارخانه لامپ‌سازی

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهنده چه چیزی است؟ **(فرایز تعداد لامپ‌ها) معیوب**

ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟ **راده ها (۱۸۰ و ۱۲۰ و ۹۰ و ۷۰ و ۵۰)**

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

وقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها  ادامه خط تولید لامپ‌ها



کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

- الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده هاست **درست**  
 ب) پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، نتیجه استفاده از «علم آمار» است **درست**  
 پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است **نادرست**

۷ به شکل رو به رو توجه کنید : آیا این شکل را می توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد ؟ اعداد و ارقام آن چگونه اند ؟ برای پاسخ به این سوالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید. **بله، کیفیت تصویر به کمک پیکسل هارگز**

### کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)



کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر

هر تصویر از تعداد زیادی مربع های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است.

در واقع هر تصویر از یک **جدول عددی** تشکیل می شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می دهد. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می توان به دست آورد. در اینجا نکته حائز اهمیت، کاربرد **پردازش تصویر** است.

«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال های اخیر مشهود بوده است.

با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی شناس مقایسه کرد.



۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

۳	۴	۵
۱	۲	۳
۲	۱	۰
۰	۳	۱

شکل

۱	۲	۳
۱	۲	۰
۲	۰	۱

جدول عددی

**الف** چاقی امروزه، به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینه سلامت افراد محسوب می‌شود. برای اطلاع بیشتر، کاربرد علم آمار در علوم پزشکی را مطالعه کنید.

### کاربرد علم آمار در پزشکی (چاقی)

یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای اینکه میزان چاقی یک فرد را بسنجیم، از معیاری تحت عنوان، معیار «شاخص توده بدن» استفاده می‌کنیم. این معیار از تقسیم وزن افراد (W) بر حسب کیلوگرم بر توان دوم قد افراد (H) بر حسب متر یا به عبارت دیگر  $\frac{W_{kg}}{(H_m)^2}$  محاسبه می‌شود و براساس آن نتایج زیر به دست می‌آید:



کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی

طبقه‌بندی	شاخص توده بدن
کم وزن	۱۸/۵
وزن طبیعی	۲۴/۹ تا ۱۸/۵
اضافه وزن	۲۹/۹ تا ۲۵
چاقی درجه یک	۳۴/۹ تا ۳۰
چاقی درجه دو	۳۹/۹ تا ۳۵
چاقی درجه سه	بیشتر از ۴۰

براساس علم آمار با استفاده از مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص توده بدن شناسایی می‌شود. به عنوان مثال، عواملی همچون «رزیم غذایی ناسالم» و «کم تحرکی» می‌توانند در بالا رفتن این معیار و ایجاد بیماری چاقی مؤثر باشند. بنابراین، امروزه با توجه به تغییر شیوه‌های زندگی، از جمله ماشینی شدن و استفاده از خوراکی‌های آماده، نیاز به استفاده از رزیم غذایی سالم، عدم مصرف خوراکی‌های مضر و همچنین ورزش و فعالیت بدنی، بسیار ضروری است. بهمین منظور، ورزش صبحگاهی و ایجاد بوفه سالم در مدارس، گامی کوچک؛ اما مؤثر در جهت سلامت افراد است.

## مثال ۱

همکار مصترم، این عذر به ۷۴ تصحیح شود.

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۴۷ سانتی متر باشد. شاخص توده بدن شخص به صورت زیر است:

$$\frac{100}{(1/74)^2} = \frac{100}{33/02} = \text{شاخص توده بدن}$$

- ۱ با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، درباره چاق بودن این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ **چاق (چاق در صد ۱)**
- ۲ درباره چاق بودن خودتان و اعضای خانواده خود اظهار نظر کنید.

- ب** شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می‌دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می‌باشند.



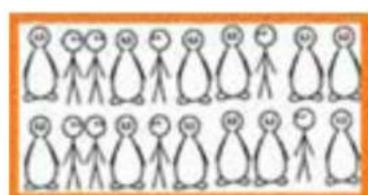
شكل الف – افراد یک شهر

با هدف به دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این کار به سادگی انجام می‌شود؟

همان گونه که احتمالاً حدس زده‌اید، جمع آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان گونه که در شکل «ب» دیده می‌شود، به جای شمارش کل افراد این شهر، می‌توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش‌بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق‌اند.

به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند.



شكل ب – افراد انتخابی از شهر

همان‌طور که می‌بینید این بار پاسخ به سوالات، با دقت بیشتر و آسان‌تر داده می‌شود و به راحتی درصد افراد چاق در زیر مجموعه انتخابی قابل محاسبه است.

### تعريف جامعه یا جمعیت

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، **جامعه یا جمعیت** نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را **عضو جامعه** می‌نامند.



### تعريف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازه جامعه یا حجم جامعه** گویند. به عنوان مثال، دانشآموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانشآموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

### تعريف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، **نمونه** گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** گویند.



### تعريف اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را **اندازه نمونه یا حجم نمونه** گویند. به عنوان مثال دانشآموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانشآموزان مدرسه هستند و هریک از دانشآموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

### کاردرکلاس

در نمودار رو به رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانه «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار رو به رو ارائه شده است. با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحه بعد را کامل کنید.

نمودار مربوط به تعداد قطعات تولیدی

تعداد کل قطعات تولیدی ■ تعداد نمونه های انتخابی



جامعه	عضو جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه
کارخانه الف	قطعات تولیدی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۱۰۰۰
کارخانه ب	قطعات تولیدی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۷۵۰

## تمرین



۱ می خواهیم درباره **کیفیت محصولات تولیدی** یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید :

جامعه	اندازه جامعه	اندازه نمونه	ویژگی مورد بررسی
کل قطعات تولید شده	۱۰۰۰۰	۱۰۰	کیفیت محصولات تولیدی

- ۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :
- الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است **نادرست**
  - ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند **نادرست**
  - پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است **درست**

۳ در شکل زیر، دانشآموزان یک مدرسه در صفحه صحبتگاهی مشاهده می شوند. هر صفحه افقی نشان دهنده تعداد دانشآموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

جامعه : کل دانشآموزان مدرسه  
اعضای جامعه : هر یک لاز دانشآموزان مدرسه  
نمونه :  
الف) دانشآموزان را که یک‌چهارم مدرسه هستند.  
ب) دانشآموزان را که ماه تولد آنها زوچ باشند.



## درس سوم: متغیر و انواع آن

## فعالیت



مزرعه هلو

شکل رویه رو محصولات هلوی یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد. میوه‌های هلوی این مزرعه را به عنوان اعضای جامعه در نظر بگیرید. یکی از میوه‌هارا انتخاب کنید. برای بررسی مرغوبیت این میوه، می‌توان به چند ویژگی از آن مانند وزن و کیفیت توجه کرد. به کمک یک ترازوی دیجیتالی، وزن آن به راحتی قابل اندازه‌گیری است.

**الف** برای اندازه‌گیری کیفیت میوه هلو چه باید کرد؟ آیا به کمک ابزار اندازه‌گیری می‌توان به این سؤال پاسخ داد؟ در صفحه بندر میوه هلو

**ب** آیا ترازو، پاسخ این سؤال را هم می‌دهد؟ ضیر

**پ** کشاورز چگونه می‌تواند کیفیت میوه هلوی تولیدی خود را بالا ببرد؟ در صفحه بندر میوه هلو

برای پاسخ به سؤالات «الف» و «ب» باید گفت که هیچ ترازو و یا وسیله‌ای که بتواند میزان کیفیت میوه هلو را اندازه‌گیری کند، وجود ندارد. با این حال کشاورزان با توجه به کیفیت آن، این میوه را به صورت «درجه یک»، «درجه دو» و «درجه سه» به بازار عرضه می‌کنند. به عبارت بهتر، عدد یک را به میوه‌های هلوی بسیار مرغوب و درست، عدد دو را به میوه‌های هلوی متوسط و عدد سه را به میوه‌های هلوی ریز نسبت می‌دهند. برای پاسخ به سؤال «پ»، کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را مطالعه کنید.

## کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی (طراحی و نحوه تولید محصولات)



علم آمار در مهندسی کشاورزی کاربرد بسیار زیادی دارد. یک مهندس کشاورزی همواره علاقه‌مند است تا کیفیت و کیفیت تولید محصولاتش به بیشترین حد ممکن برسد. برای این منظور، مهندس کشاورزی از انواع کودها مانند نیترات آمونیوم، فسفر و ... استفاده می‌کند. اما سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، آن است که چه میزان کود باید استفاده شود تا کیفیت و کیفیت تولید محصولات آن به بیشترین مقدار برسد؟ اینجاست که علم آمار با طراحی آزمایش‌هایی، به این سؤال پاسخ می‌دهد.

بدین منظور، قطعات مختلفی از زمین به طوری که از نظر رطوبت، حاصلخیزی خاک، نور و ... کاملاً یکسان باشند، در نظر گرفته می‌شود. سپس به مطالعه درصدهای مختلف کودهای مورد نظر در این قطعات زمین پرداخته می‌شود. به عبارت دیگر علم آمار در تعیین عوامل مؤثر مانند کودهای مورد استفاده در زمین کشاورزی و سطوحی از عوامل مانند درصدهایی از میزان استفاده کودها برای رسیدن به تولیدات بیشتر کشاورزی به مهندسان کشاورزی کمک می‌کند.

## تعریف متغیر و مقدار متغیر

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، **مقدار متغیر** می‌گویند.

به عنوان مثال در شکل «الف» وزن و کیفیت میوه هلو به عنوان دو متغیر مربوط به میوه هلوست و مقادیر آن در جدول زیر آمده است:



شکل الف

متغیر مربوط به میوه هلو	مقدار متغیر
وزن هلو	۲۰۰ گرم
کیفیت هلو	درجه یک (۱)، درجه دو (۲)، درجه سه (۳)

## کاردرکلاس

۱ شکل «ب» یک خودرو را نشان می‌دهد، برخی از ویژگی‌های این خودرو مانند سرعت، میزان بنزین مصرفی و رنگ خودرو در شکل مشخص شده است.



شکل ب

«سرعت خودرو» و «میزان بنزین مصرفی»، قابل اندازه‌گیری است. به عنوان مثال حداکثر سرعت این خودرو در جاده‌ها  $۱۲۰$  کیلومتر بر ساعت است. به عبارت دیگر مقدار متغیر «سرعت خودرو» برابر با  $۱۲۰$  کیلومتر بر ساعت است.

همچنین اگر خودرویی به عنوان مثال برای هر  $۱۰$  کیلومتر،  $۸$  لیتر بنزین مصرف کند؛ بنابراین مقدار متغیر «میزان مصرف خودرو» برابر با  $۸$  لیتر برای هر  $۱۰۰$  کیلومتر است.

ولی در این مثال رنگ خودرو قابل اندازه‌گیری نیست. می‌توان انواع رنگ‌های مشکی، سفید و ... را به عنوان مقادیر متغیر «رنگ خودرو» در نظر گرفت و آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد.

به نظر شما چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟ در سطوح‌های خالی مقدار هر یک از متغیرهای معرفی شده جدید را بیان کنید.

مقدار متغیر	متغیرهای یک خودرو
$۱۲۰$	حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده
$۸$	میزان بنزین مصرفی برای هر $۱۰$ کیلومتر
سفید	رنگ خودرو
	تاریخ تولید خودرو
	سوضت مصرف خودرو (بنزین، دوگانه)



۱ جدول زیر متغیرهایی را که درباره یک دانشآموز مطالعه شده است، نشان می‌دهد.  
مقدار این متغیرها را درباره خودتان در جدول زیر بنویسید.

متغیرهای یک دانش آموز	مقدار متغیر
سن دانش آموز	۱۵
نمره ریاضی نهم دانش آموز	۱۸
گروه خونی (A, O, B, AB)	B
قد دانش آموز	۱۴۰
وزن دانش آموز	۷۵

متغیر	مقدار متغیر
طول بدن	۱/۲ متر
ارتفاع شانه	۰/۵ متر
وزن	۶۰ کیلوگرم
طول دم	۰/۳ متر

۲ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول رو به رو بنویسید.

۳ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را بر اساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید. **متغیر: مهارت**

بسیار ماهر، ماهر، متوسط، ضعیف

۰ ۱ ۲ ۳

## کاربرد علم آمار و احتمال در محیط زیست



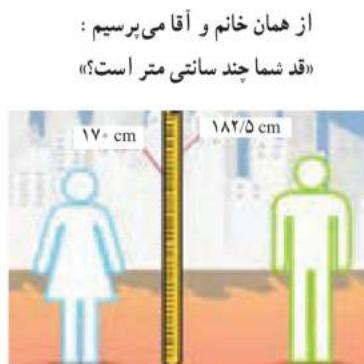
کاربرد علم آمار و احتمال در محیط زیست

علم آمار و احتمال در محیط زیست کاربرد دارد. به عنوان مثال با استفاده از این علم می‌توان به شناسایی و شناخت عوامل مؤثر بر زیستگاه‌های مطلوب حیوانات در حال انقراض اشاره کرد. این موضوع مدیران محیط زیست را در مدیریت و حفاظت از این زیستگاه‌ها یاری می‌کند. یکی از این حیوانات در حال انقراض «یوزپلنگ ایرانی» است. یوزپلنگ ایرانی یک زیرگونه به شدت در معرض خطر انقراض از یوزپلنگ است که اکنون تنها چند ده قلاده از آن در ایران یافت می‌شود. این جانور در مناطق بیابانی در سطح منطقه زندگی می‌کرد و سال‌هاست که نسل آن در معرض نابودی کلی قرار دارد. یوزپلنگ از خانواده گربه سانان به شمار می‌آید؛ اما به دلیل داشتن دست و پایی بلند، بدنه کشیده و باریک، و سینه‌های فراخ تا حدود زیادی به سگ‌های تازی شبیه است. در میان گربه‌سانان، یوز با داشتن ارتفاع شانه‌ای برابر با ۳۸ تا ۴۷ سانتی‌متر و وزنی بین ۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم از جمله گربه سانان کوچک جثه به شمار می‌رود. اندازه طول بدن آن به ۱/۲ متر می‌رسد و طول دم آن نیز میان ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر است. همچنین سر این جانوران به نسبت کوچک است.

## متغیرهای کمی و کیفی

## فعالیت

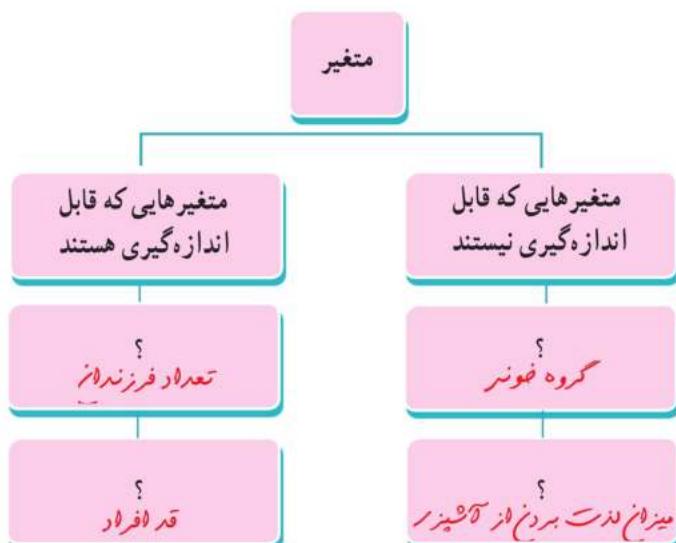
در یک شهر، با افراد مختلفی رو به رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال:



حال به سؤالات زیر پاسخ دهید:

**الف** با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

		نام متغیر
۲	-	تعداد فرزندان
۱۳۵	۱۴۵	قد افراد
A	B	گروه خونی
زیاد	کم	میزان لذت بردن از آشیزی



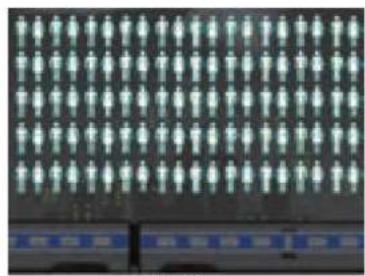
**ب** با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.

## تعريف متغیرهای کمی

متغیرهای را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

## تعريف متغیرهای کیفی

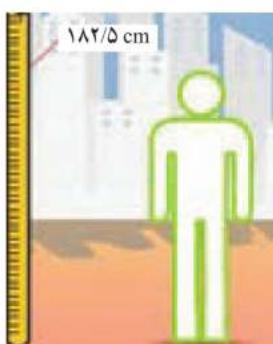
متغیرهای را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.



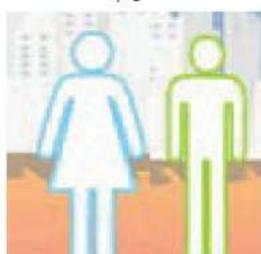
شكل الف



شكل ب



شكل پ



شكل ت

## کار در کلاس

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید:

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر **کمی** است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر **کیفر** است.

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر **کمتر** است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر **کیفر** است.

۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

(الف) انواع هوایپما (مسافربری، باربری، جنگنده)

(ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.

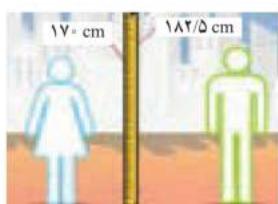
(پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای)

۳ جدول زیر را کامل کنید.

نوع متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	سؤال (متغیر)
<b>کیفر</b>	مشکی، قهوه‌ای، طلایی، سفید، قرمز	موی شما چه رنگی است؟
<b>کمتر</b>	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	وزن شما چه عددی است؟
<b>کیفر</b>	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی‌برم	چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟

## انواع متغیرهای کمی

## فعالیت



همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی‌اند.

۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم: چند فرزند دارد؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۰، ۱، ۲، ۳ و ...

۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹/۵ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...

۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعه دانش‌آموزان پایه دهم کشور به ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازه [۴۶، ۷۵] قرار می‌گیرد.

آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ **بله**

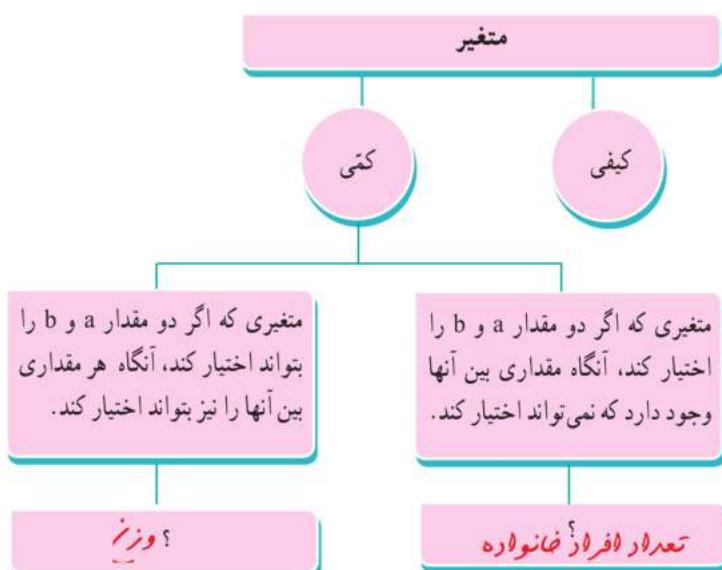
۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به ترتیب ۰ و ۲ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازه [۰، ۲] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهنده تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟ **خیر**

۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟ **کسر**

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟

**وزن متغیر کسر و اعشار پذیر است و تعداد افراد خانواده متغیر کمی و اعشار ناپذیر می‌باشد.**

۷ با توجه به قسمت‌های ۳ و ۴ در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.





انواع متغیر کمی:  
۱) متغیر پیوسته ۲) متغیر گسسته

#### تعريف متغیر پیوسته

متغیری است که اگر دو مقدار  $a$  و  $b$  را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند.  
به عنوان مثال وزن یک دانشآموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

#### تعريف متغیر گسسته

متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

#### کار در کلاس

- ۱) با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی  
زیر را مشخص کنید.
- ۲) سرعت خودرو یک متغیر **پیوسته** است. مقدار آن متغیر **کمی** **کیلومتر بر ساعت** است.
- ۳) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر **کسر پیوسته** و  
مقدار آن برای هر  $100$  کیلومتر  **$\frac{8}{10}$**  است.
- ۴) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر **کسر گسسته**  
است و این تعداد برابر با  **$4$**  است.

#### ۷ انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> پیوسته            | <input checked="" type="checkbox"/> گسسته | الف) تعداد ماهی‌های یک دریا                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته            | ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. |
| <input checked="" type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته            | پ) وزن افراد                                       |
| <input type="checkbox"/> پیوسته            | <input checked="" type="checkbox"/> گسسته | ت) تعداد دانشآموزان یک مدرسه                       |

در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

نوع متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	سوال (متغیر)
پیوسته	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی متر	قد شما چه عددی است؟
پیوسته	۸۰/۵ کیلوگرم	وزن شما چه عددی است؟
گسسته	.....، ۳، ۲، ۱، ۰	تعداد دوستان شما چند نفر است؟
پیوسته	۷۲، ۷۱، ۷۰ و ..... کیلوگرم	وزن دوستان چه عددی است؟
پیوسته	۳۲/۵، ۲۲، ۲۰ و ....	شاخص توده بدن خانواده شما چه عددی است؟
پیوسته	عده‌ی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی متر	ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟

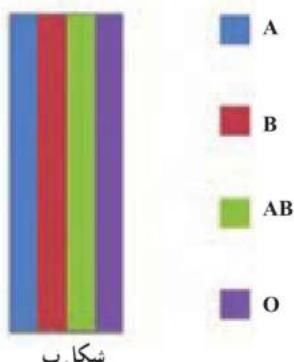
### أنواع متغيرات كيفي

#### فعاليت

به سؤال‌های زیر توجه کنید:



شكل الف



شكل ب

سؤال: از یک آقا و خانم می‌پرسیم: چقدر از آشیزی کردن لذت می‌بری؟

برخی از جواب‌های ممکن: خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم، خیلی کم

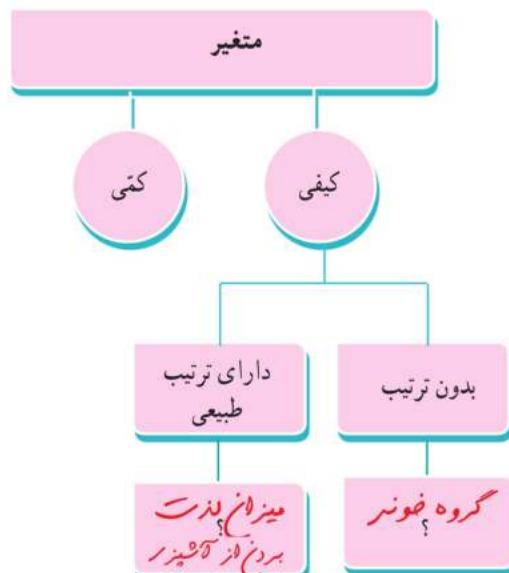
سؤال: گروه خونی خود را بگویید.

برخی از جواب‌های ممکن: گروه خونی A, B, O, AB

در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد: همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ

به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.

در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



متغیرهای ترتیبی و اسمی  
انواع متغیر کیفی:

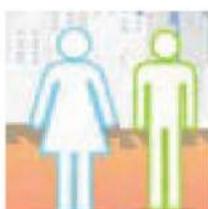
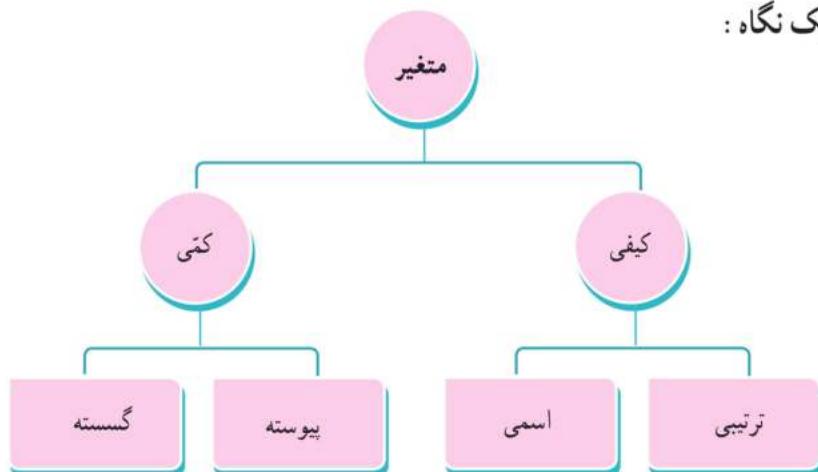
متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیرها به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

(۱) متغیر ترتیبی (۲) متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

**متغیر ترتیبی:** متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

**متغیر اسمی (غیر ترتیبی):** متغیری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیرها در یک نگاه:



شكل الف



شكل ب



شكل ب

دانه درگاه

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید:  
در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر **اسمی** است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به دست می‌آورد، یک متغیر **ترتیبی** است و مقادیر آن **مقام اول، مقام دوم و مقام سوم** است.

در شکل «پ»، میزان علاوه‌شما درباره خورش قیمه سوال شده است که یک متغیر **ترتیبی** است و مقادیر آن **بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم** است.



۱ با پر کدن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- |  |  |
|--|--|
| اسمی <input checked="" type="checkbox"/> | ترتیبی <input type="checkbox"/>            |
| اسمی <input type="checkbox"/>            | ترتیبی <input checked="" type="checkbox"/> |
| اسمی <input type="checkbox"/>            | ترتیبی <input checked="" type="checkbox"/> |
| اسمی <input checked="" type="checkbox"/> | ترتیبی <input type="checkbox"/>            |

(الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن سال)

(ب) تزاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)

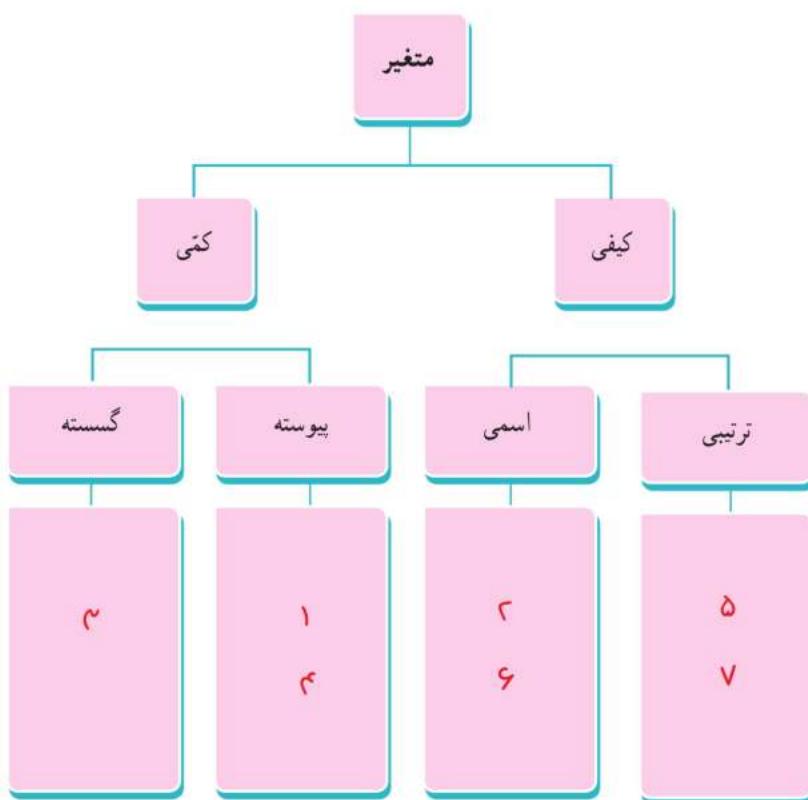
(پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)

(ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.



نوع متغیر	متغیر
کمتر پیوسته	۱- میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر
کیفر اسر	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
کمتر گستته	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
کمتر پیوسته	۴- میزان دمای هوا
کیفر ترتیبی	۵- شدت آلودگی هوا (ازیاد، متوسط، کم)
کیفر اسر	۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)
کیفر ترتیبی	۷- شدت بارندگی (ازیاد، متوسط، کم)



## درس سوم: متغیر و انواع آن

۲ جدول زیر متغیرهای دانشآموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گستته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانشآموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گستته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	X					
نمره ریاضی نهم		X				
جنسیت (دختر و پسر)		X				X
قد		X				
وزن		X				
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)	X					
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		X				
شاخص توده بدن		X				

### تعداد راه کلیار

اصلاح شود ۱۶۰

۱۶۰

۱۶۰

X

X

۳ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ اسانسی متر باشد.

الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.

$$\frac{۹۵}{(۱۶۰)^۲} = \frac{۹۵}{۲۵۶} = ۰.۳۷$$

ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گستته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ **کسر، پیوسته**  
(تکراری است که در جدول قوچ پرسیده شده است).

۴ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

؟	؟	؟
؟		؟
?	؟	?

شکل

۳؟	۳	۳
۲	۲؟	۲
۱؟	۱	۱

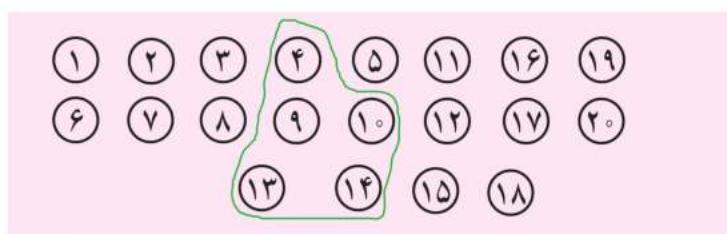
جدول عددی

۵ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

جامعه: مجموعه رسمام افراد یا اشیاء که در باره سریک یا چند ویزگر آنها تحقیق صورت گیرد. مانند دانشآموزان یک

نمونه: بفشار از جامعه را که براسطه انتخاب شود. مانند دانشآموزان یک کلاس که به عنوان یک نمونه از دانشآموزان مدرسه هستند.

۶ شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سوالات زیر پاسخ دهید:



{۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۹ و ۱۰}

الف) اندازه جامعه چه عددی است؟ **۲۰ نفر**

ب) اندازه نمونه انتخابی چه عددی است؟ **۵ نفر**

پ) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید.

جدول زیر را کامل کنید. ۸

نوع متغیر	متغیر
کمتر بیوسته	وزن بک هلو
کیفر ترتیب‌ر	کیفیت یک هلو
کمتر بیوسته	اندازه طول بدن بوزیلنگ ایرانی
کیفر اسر	اقوام ایرانی
کیفر اسر	وضعیت آب و هوا
کمتر بیوسته	دماهی هوا در قله
کمتر بیوسته	فشار هوا در قله کوه



کوه شیراز، شهرستان سمامان – استان چهارمحال و بختیاری

