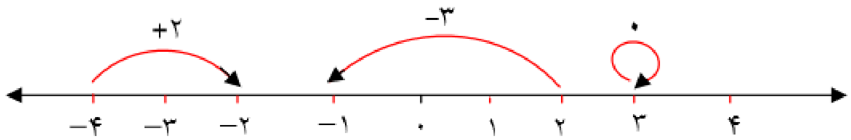
هم کلاسی

Hamkelasi.ir

فصل اول ریاضی هشتم: اعداد صحیح و گویا

حرکت بر روی محور:جابه جایی از یک نقطه به نقطه دیگر را حرکت گویند.و اگر این حرکت در جهت مثبت(سمت راست) باشد با علامت مثبت و اگر در جهت منفی (سمت چپ) باشد، علامت منفی خواهد داشت.



قرینه: به اعدادی که فاصله ان ها تا مبدا (صفر) با هم برابر،اما در جهت مخالف یکدیگر قرار دارند، دو عدد قرینه گویند.

$$-(+۷)=-۷ \quad , \quad -(-۱۲)=+۱۲$$

جمع و تفریق اعداد صحیح:

_اگر دو عدد هم علامت باشند،با هم جمع شده با علامت مشترک.
_اگر علامت های مختلف داشته باشند،از هم کم شده با علامت عدد بیشتری (بدون توجه به علامت،عدد بیش تر باشد)

$$(+۸۰)-(+۶۰)=۸۰-۶۰=۲۰ \qquad (-۱۲)+(-۵)=-۱۷$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح:

× یا ÷	+	-
+	+	-
-	-	+

$$(-۷)\times(-۵)=+۳۵$$

$$(-۶۰)\div(+۱۲)=-۵$$

حق تقدم محاسبات در ریاضی:پرانتز»»توان وجذر»»ضرب و تقسیم از چپ به راست»» جمع و تفریق از چپ به راست

$$۴+۶\div\underbrace{(-۵+۲)}_{-۳}\times۴-۷=۴+\underbrace{۶\div(-۳)\times۴}_{-۸}-۷=۴-۸-۷=-۱۱$$

جمع اعداد متوالی(پشت سر هم):اعداد را دوبار جمع می زنیم. یک بار از کوچک به بزرگ (صعودی) و بار دیگر از بزرگ به کوچک(نزولی) تا الگویی کشف شود. این روش را اقای گاوس در کودکی کشف نموده است.

مثال:مجموع اعداد طبیعی ١ تا ٥٠ را به دست اورید؟

$$\begin{array}{c} ١+٢+٣+٤+...+٤٨+٤٩+٥٠ \\ ٥٠+٤٩+٤٨+٤٧+...+٣+٢+١ \\ \hline ٥١+٥١+٥١+٥١+...+٥١+٥١+٥١ \end{array}$$

$$٥٠ \times ٥١ = ٢٥٥٠$$

$$٢٥٥٠ \div ٢ = ١٢٧٥$$

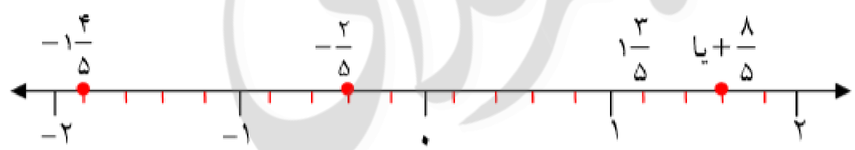
چون دوبار جمع زدیم پس تقسیم بر ٢ می کنیم.

معرفی عدد های گویا: به هر عددی که بتوانیم ان را به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر عدد صحیح بنویسیم به طوری که مخرج صفر نباشد، عدد گویا می گوییم.

هر کدام از عدد های طبیعی و صحیح نیز یک عدد گویا هستند.

$$-\frac{٥}{٦}\,,\ \frac{٨}{-٣}\,,\ ٠/٧\,,\ -٢\frac{١}{٣}\,,\ ١٨ \qquad\qquad ٥٠=\frac{+٥٠}{١}=+\frac{١٠٠}{٢}$$

نکته: هر عدد گویا را میتوانیم روی محور اعداد نشان می دهیم.



_قرینه ی اعداد گویا همانند عدد های صحیح هستند.

$$-(-\frac{٧}{٥})=+\frac{٧}{٥} \qquad\qquad -(+٢\frac{٣}{٤})=-٢\frac{٣}{٤}$$

نکته: برای نوشتن معکوس اعداد گویا،جای مخرج و صورت ان را عوض می کنیم.

$$-\frac{١١}{٦} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{٦}{١١} \quad , \quad -٤\frac{٢}{٣} \xrightarrow[-\frac{١٤}{٣}]{\text{معکوس}} -\frac{٣}{١٤}$$

نکته:علامت کسر می تواند در کنار،صورت یا مخرج نوشته شود.

$$-\frac{٢}{٣}=\frac{-٢}{٣}=\frac{٢}{-٣}$$

نکته: اگر بخواهیم کسرهایی مساوی با یک کسر بنویسیم، کافی است صورت و مخرج ان را در یک عدد غیر صفر ضرب می کنیم.

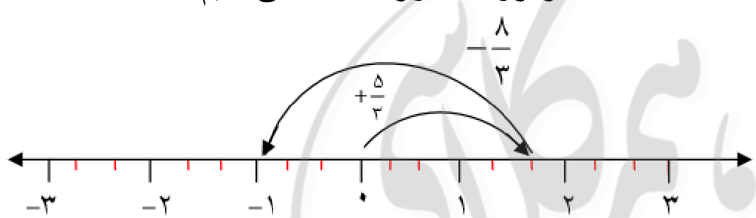
$$-\frac{۳}{۴}=-\frac{۶}{۸}=-\frac{۹}{۱۲}=-\frac{۱۲}{۱۶}=...$$

$\times ۲$

$\times ۲$

جمع و تفریق اعداد گویا:

الف) به کمک محور: از حرکت های علامت دار روی محور استفاده می کنیم:



$$(+\frac{۵}{۳})+(-\frac{۸}{۳})=-\frac{۳}{۳}=-۱$$

ب) بدون محور: اگر مخرج کسرها مساوی باشند، یکی از مخرج ها را نوشته و حاصل صورت ها را طبق علامت ها کم یا زیاد می کنیم و اگر مخرج ها مساوی نباشند ابتدا باید مخرج مشترک(ک.م.م) گرفته و سپس حاصل را به دست می اوریم.

$$(+\frac{۵}{۷})+(-\frac{۲}{۳})=\frac{+۱۵-۱۴}{۲۱}=\frac{۱}{۲۱}$$

$$(-\frac{۴}{۹})+(+\frac{۵}{۹})=\frac{-۴+۵}{۹}=\frac{۱}{۹}$$

۳۰=[۱۵ و ۱۰] ک.م.م

$$(-\frac{۳}{۱۰})-(-\frac{۴}{۱۵})=\frac{-۹+۸}{۳۰}=\frac{-۱}{۳۰}$$

ضرب اعداد گویا: ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می شود.

نکته:اعداد مخلوط را به کسر تبدیل می کنیم و قبل از ضرب چنانچه ساده شوند، ساده می کنیم.

تقسیم اعداد گویا:در تقسیم اعداد گویا،عدد اول خودش، علامت تقسیم را به ضرب وعدد دوم معکوس می شود و ادامه عملیات مانند ضرب است:

$$(-\frac{\cancel{۴}^{۱}}{\cancel{۱۵}_{۳}})\times(+\frac{\cancel{۵}^{۱}}{\cancel{۱۶}_{۴}}) = -\frac{۱}{۱۲}$$

$$(+۴\frac{۲}{۵}) \div (-\frac{۲}{۷}) = (+\frac{\cancel{۲۲}^{۱۱}}{۵})\times(-\frac{۷}{\cancel{۲}_{۱}}) = -\frac{۷۷}{۵}$$

نکته

$x<۲$ یعنی همه ی عددهای کوچک تر از ۲

$x>۲$ یعنی همه ی عددهای بزرگ تر از ۲

$x\geq ۲$ یعنی همه ی عددهای بزرگ تر از ۲ یا مساوی آن.

اشتباهات رایج

* بگوییم $-۲\frac{۳}{۵}$ یعنی ۲- واحد باضافه $-\frac{۳}{۵}$.

* نگوییم : $-۲\frac{۳}{۵}$ یعنی $-۲+\frac{۳}{۵}$.

* موقع ساده کردن، نمی توانیم عددهای صورت را باهم یا مخرج ها را باهم ساده کنیم. در ضمن حتماً باید عمل ضرب باشد.

روش دور در دور و نزدیک در نزدیک: در تقسیم دو کسر، اعداد دور را در هم ضرب ودر صورت مینویسیم و اعداد نزدیک را نیز در هم ضرب و در مخرج می نویسیم.

$$\frac{-\frac{۴}{۵}}{+\frac{۲}{۳}} = -\frac{۴\times۳}{۵\times۲} = -\frac{۱۲}{۱۰} = -\frac{۶}{۵}$$

تبدیل کسر به اعشار:

الف) صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم اگر باقی مانده صفر شود،ان را عدد اعشاری مختوم می نامند.

ب) اگر در تقسیم باقی مانده صفر نشود و اعداد اعشاری مرتب تکرار شود به ان متناوب ساده گویند.

ج)اگر اعداد اعشاری پس از چند رقم دوباره تکرار شوند، ان عدد را متناوب مرکب گویند.

$$\frac{۴}{۵} = ۰/۸ \qquad \frac{۱}{۳} \cong ۰/۳۳۳۳۳۳...... = ۰/\overline{۳} \qquad \frac{۷}{۱۵} \cong ۰/۴۶۶۶۶..... = ۰/۴\overline{۶}$$

پیدا کردن عدد گویای بین دو عدد گویا:

الف: هم مخرج کردن ب:جمع کردن صورت ها باهم و مخرج ها نیز با هم

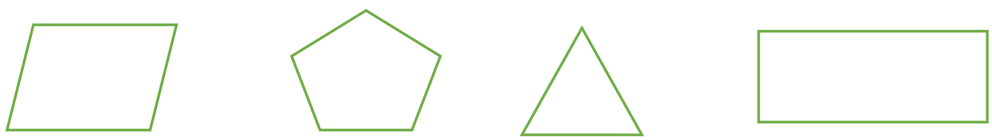
$$\frac{۳}{۴} = \frac{۳۰}{۴۰} \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۵} = \frac{۳۲}{۴۰} \qquad \frac{۳}{۴} < \frac{۳۱}{۴۰} < \frac{۴}{۵}$$

مثال بین $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{٤}$ یک کسر پیدا کنید.

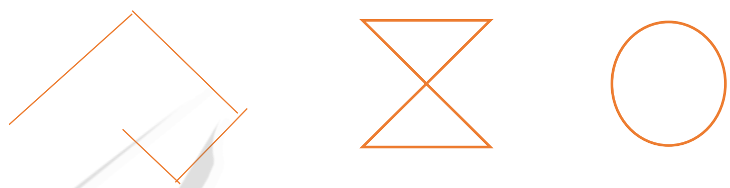
$$\frac{۱}{۴} < \frac{۱+۱}{۴+۳} < \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۴} < \frac{۲}{۷} < \frac{۱}{۳}$$

فصل سوم: چند ضلعی ها

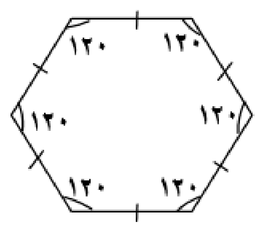
چند ضلعی: به هر خط شکسته ی بسته به شرطی که اضلاعش همدیگر را قطع نکنند، چند ضلعی می گوییم.



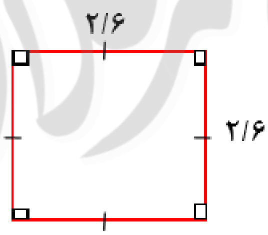
شکل های زیر چند ضلعی نیستند:



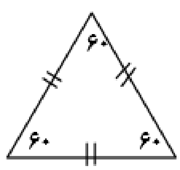
چند ضلعی منتظم: اگر در یک چند ضلعی،همه ی ضلع ها با هم وهمه ی زاویه ها با هم مساوی باشند،چند ضلعی را منتظم گویند.



۶ ضلعی منتظم

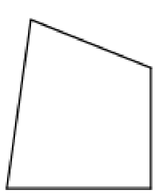
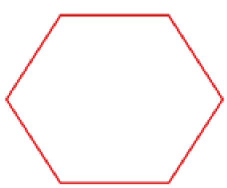


مربع

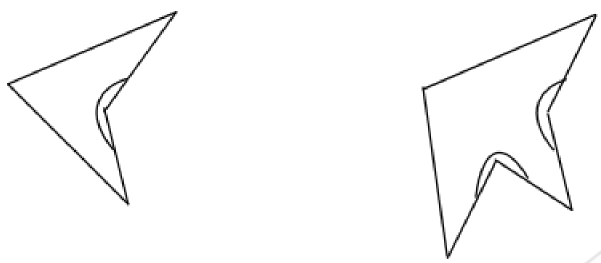


مثلث متساوی الاضلاع

چند ضلعی محدب(کوژ): به چند ضلعی که همه ی زاویه های ان کوچکتر از ۱۸۰ درجه باشد،چند ضلعی محدب(کوژ) گویند.

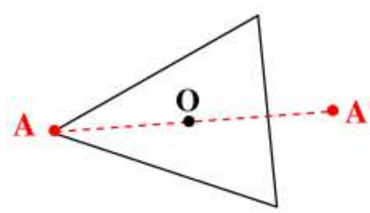



چند ضلعی مقعر(کاو):چند ضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰درجه باشد مقعر یا کاو گویند.

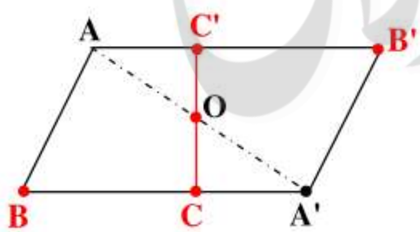


مرکز تقارن: اگر نتیجه دوران ۱۸۰ درجه ای یک شکل حول یک نقطه روی شکل قرار گیرد می گوییم شکل مرکز تقارن دارد.

تشخیص مرکز تقارن: برای اینکه مشخص می کنیم یک نقطه مرکز تقارن شکل است یا نه،از هر نقطه روی شکل به نقطه ی داده شده وصل کرده و به همان اندازه ادامه می دهیم. اگر نقطه ی حاصل روی شکل قرار گرفت،نقطه ی داده شده مرکز تقارن می باشد در غیر این صورت مرک تقارن نیست.



(O مرکز تقارن نیست)



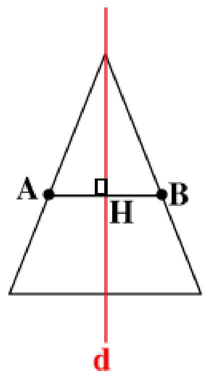
(O مرکز تقارن است)

در چند ضلعی های منتظم اگر تعداد ضلع ها زوج باشد،مرکز تقارن دارند و اگر تعداد ضلع ها فرد باشند، مرکز تقارن ندارند.

۸ ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد ولی ۵ ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

محور تقارن(خط تقارن):خطی است که اگر کاغذ را روی ان تا کنیم همه ی نقاط شکل روی هم قرار گیرند.

تشخیص محور تقارن: از هر نقطه روی شکل بر خط عمود کرده وبه همان اندازه ادامه می دهیم،اگر نقطه حاصل روی شکل قرار گرفت،خط رسم شده محور تقارن می باشد.

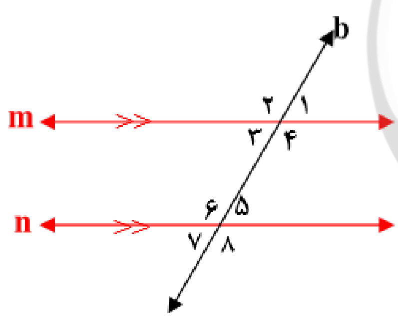


در مثلث متساوی الساقین خط d محور تقارن است زیرا $\overline{AH} = \overline{BH}$.

چند ضلعی های منتظم به تعداد ضلع هایشان محور تقارن دارند.

۵ ضلعی منتظم پنج محور تقارن و ۶ ضلعی منتظم شش محور تقارن دارد.

توازی و تعامد: اگرخطی مانند b دو خط nوm را چنان قطع کند که روی ان ها زاویه های مساوی ایجاد کند، می گوییم m باn موازی است. به خط b مورب گویند.



$\hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷}$ ، $\hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸}$

نکات:

اگر دو خط با هم موازی نباشند ان ها را متقاطع گویند.

اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند روی ان ۸ زاویه ایجاد میشود که ۴ زاویه تند ان با هم و چهار زاویه باز ان با هم مساوی اند.

دو خط موازی با یک خط با هم موازی هستند.

دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند.

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.

چهارضلعی ها»»»

متوازی الاضلاع: چهار ضلعی که ضلع های روبروی ان دو به دو با هم مساوی اند.

مستطیل:متوازی الاضلاعی است که زاویه های قائمه دارد.

مربع: متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه های قائمه دارد.

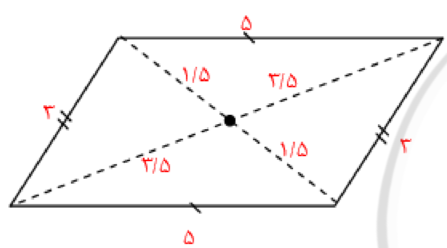
لوزی:متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع ان برابرند.

خاصیت های متوازی الاضلاع:

ضلع های روبرو با هم موازی و مساوی اند.

زاویه های روبرو با هم مساوی اند.

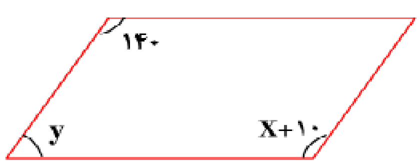
قطرها همدیگر را نصف می کنند و زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند.



مستطیل، لوزی و مربع همه ی خاصیت های متوازی الاضلاع را دارند.

ذوزنقه: چهار ضلعی است که فقط دو ضلع ان با هم موازی اند.

مثال) شکل زیر متوازی الاضلاع است مقدار xوy را بدست اورید؟

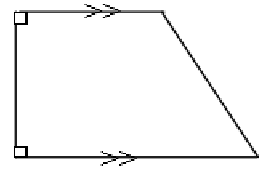


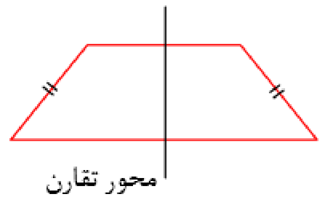
x + ۱۰ = ۱۴۰ → x = ۱۴۰ − ۱۰ = ۱۳۰

y + ۱۴۰ = ۱۸۰ ⇒ y = ۱۸۰ − ۱۴۰ = ۴۰

ذوزنقه ای که یکی از ساق ها بر قاعده ها عمود باشد، ذوزنقه ی قائم الزاویه نامیده می شود.

ذوزنقه ای که ساق های ان با هم برابر باشد، ذوزنقه ی متساوی الساقین نامیده می شود.





زوایای داخلی» مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

مجموع زوایای داخلی چند ضلعی:

$(\mathbf{n}-۲)\times ۱۸۰$ (n تعداد اضلاع)

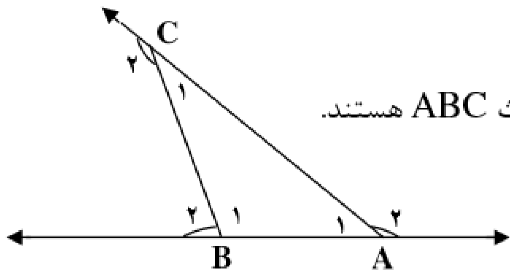
اندازه ی یک زاویه داخلی چند ضلعی منتظم:

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$$

مثال: اندازه ی یک زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم چقدر است؟

$$n=۸\Rightarrow \frac{(۸-۲)\times ۱۸۰}{۸}=\frac{۶\times ۱۸۰}{۸}=\frac{۱۰۸۰}{۸}=۱۳۵^\circ$$

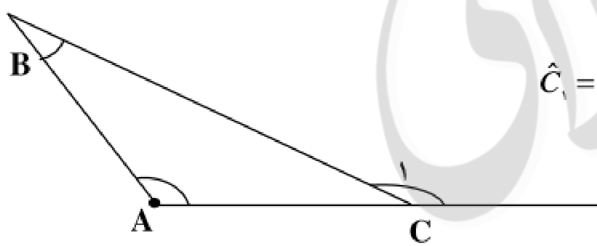
زاویه خارجی: زاویه ای که در هر راس یک چند ضلعی محدب،بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود، زاویه خارجی ان راس نامیده می شود.



زاویه های $\hat{A}_۲ , \hat{B}_۲ , \hat{C}_۲$ زاویه های خارجی مثلث ABC هستند.

مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی ۳۶۰ درجه است و اندازه یک زاویه خارجی در n ضلعی منتظم برابر است با ۳۶۰ درجه تقسیم بر n

در هر مثلث هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است.



$\hat{C}_۱ = \hat{A} + \hat{B}$

تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

مثال) یک شش ضلعی چند قطر دارد؟

$$\frac{۶\times(۶-۳)}{۲} = \frac{۶\times۳}{۲} = ۹$$

فصل چهارم ریاضی هشتم: جبر و معادله

جملات متشابه: جملاتی که قسمت حروفی وتوان ان ها عینا مثل هم باشد را متشابه گویند.

ساده کردن عبارت جبری:ابتدا جمله های متشابه را مشخص می کنیم، سپس ضرایب جملات متشابه را جمع یا تفریق کرده و جمله های غیر متشابه را به همان صورت می نویسیم.

$$\underline{۴m^{۲}} - ۵y + \underline{\underline{۲my}} - \underline{۶m^{۲}} + \underline{\underline{۱۰my}} = -۲m^{۲} - ۵y + ۱۲my$$

ضرب دو جمله ای: در ضرب دو جمله ی جبری، ضریب های عددی در هم و متغیرها را نیز در هم ضرب می کنیم.

$$۲a(۳b)=۶ab \quad , \quad -۵x(-۳x)=۱۵x^{۲}$$

در ضرب حروف،اگر حرف ها مثل هم باشند به صورت توان دار نوشته می شوند و در غیر این صورت به دنبال هم نوشته می شوند.

ضرب تک جمله ای در چند جمله ای:تک جمله ای در هر یک از جمله های چندجمله ای ضرب میشود.

$$۳a(۴a-۵b)=۱۲a^{۲}-۱۵ab$$

ضرب چند جمله ای در چند جمله ای:هر یک از جمله های چند جمله ای اول را در همه ی جمله های چند جمله ای دوم ضرب می کنیم.

$$(x+۵)(x-۳)=x^{۲}-\underline{۳x}+\underline{۵x}-۱۵=x^{۲}+۲x-۱۵$$

مقدار عددی یک عبارت جبری: برای پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت جبری،مقادیر داده شده را در عبارت جبری به جای متغیرها قرار می دهیم و با رعایت ترتیب انجام عملیات، مقدار عددی عبارت را به دست می اوریم.

$$t=۶, k=-۳ \Rightarrow t^{۲}+۵kt=۶^{۲}+۵(-۳)(۶)=۳۶+(-۹۰)=-۵۴$$

تجزیه عبارت جبری(تبدیل به ضرب):برای تبدیل یک عبارت جبری به ضرب دو عبارت طبق مراحل زیر عمل می کنیم.

الف) ب .م.م ضرایب را مشخص می کنیم.
ب)حروف مشترک را با توان کوچکتر همراه با ب.م.م ضرایب می نویسیم.
ج) هر جمله را بر جمله ی مشترک تقسیم کرده وحاصل را داخل پرانتز می نویسیم.

$۴۲xy^{۳}-۳۵x^{۲}y^{۲}=.......(..........)$

$(۴۲,۳۵)=۷$

حروف مشترک با توان کم تر : $xy^{۲}$

تک تک جملات را بر $۷xy^{۲}$ تقسیم می کنیم :

$$\frac{۴۲xy^{۳}}{۷xy^{۲}}=۶y,\frac{-۳۵x^{۲}y^{۲}}{۷xy^{۲}}=-۵x$$

$۴۲xy^{۲}-۳۵x^{۲}y^{۲}=۷xy^{۲}(۶y-۵x)$

حل معادله:

روش اول» مانند سایر معادله ها،ابتدا عدد های معلوم و جمله های مجهول را با جابه جایی مرتب کرده و سپس معادله را حل میکنیم.

$$\frac{۳}{۵}x-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$
$$\frac{۳}{۵}x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳+۲}{۴}=\frac{۵}{۴}$$
$$x=\frac{۵}{۴}\div\frac{۳}{۵}=\frac{۵}{۴}\times\frac{۵}{۳}=\frac{۲۵}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۲۵}{۱۲}$$

روش دوم» معادله را به روش غیر کسری درمی اوریم. ابتدا همه ی جمله های دو طرف معادله را در ک.م.م مخرج ها ضرب کرده،پس از ساده کردن کسرها، معادله معمولی بدون کسر به دست می اید.

$$30\left(\frac{2}{5}x-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\right)$$

$$\overset{6}{\cancel{30}}\times\frac{2}{\cancel{5}_1}x-\overset{10}{\cancel{30}}\times\frac{2}{\cancel{3}_1}=\overset{15}{\cancel{30}}\times\frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$12x-20=15$$

$$12x=15+20=35$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{35}{12}$$

۳۰= [۲ و ۳ و ۵]

اشتباهات رایج

۱) عبارتی مثل $3x+3y$ ساده نمی شود چون جمله های آن متشابه نیستند.

۲) جملات $2n$, $n+2$ باهم برابر نیستند.

۳) عددها فقط در جمله های داخل پرانتز ضرب می شوند و در عبارت های بعد از پرانتز ضرب نمی شوند.

$$5(3x-6y)+7t=15x-30y+7t$$

۴) عبارت $-7x^3y$ یک جمله به حساب می آید.

۵) $(a+b)^2 \neq a^2b^2$

۶) $\overline{ab} \neq ab$ زیرا ab یعنی a در b ضرب می شود و $\overline{ab}$ یعنی عددی دو رقمی .

۷) برای محاسبه ۵(-۴)(-۳) از چپ به راست ضرب می کنیم که می شود ۶۰ و نباید ۵ را هم در ۴- و هم در ۳- ضرب کرد.

مجموع یک عدد دو رقمی و مقلوبش بر ۱۱ بخش پذیر است.

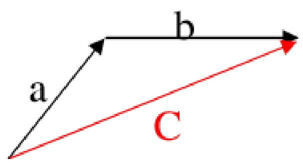
۵۷ $\xrightarrow{\text{مقلوب}}$ ۷۵ $\longrightarrow$ ۷۵+۵۷= ۱۳۲=۱۱×۱۲

تفاضل هر دو عدد دو رقمی از مقلوبش مضربی از ۹است.

۷۴ $\xrightarrow{\text{مقلوب}}$ ۴۷ $\longrightarrow$ ۷۴+۴۷= ۲۷=۳×۹

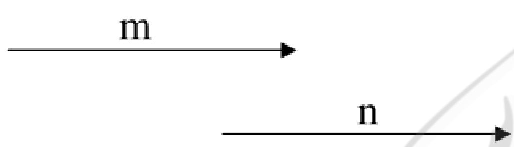
فصل پنجم ریاضی هشتم: بردار و مختصات

جمع بردارها(برایند):اگر دو بردار دنبال هم باشند، بردار حاصل جمع ان ها برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کند،که بیشتر به روش مثلثی معروف است.



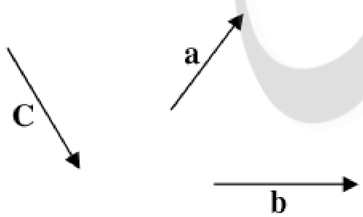
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{C}$$

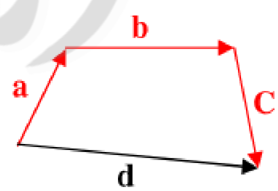
بردارهای مساوی:هرگاه چند بردار هم اندازه، هم جهت و هم راستا باشند، به انها بردارهای مساوی گویند.



$$\vec{m}=\vec{n}$$

حاصل جمع چند بردار:مساوی با هر بردار را طوری رسم می کنیم که بردارها دنبال هم باشند ان گاه بردار حاصل جمع برداری است که ابتدای اولی را به انتهای اخرین بردار وصل می کند.



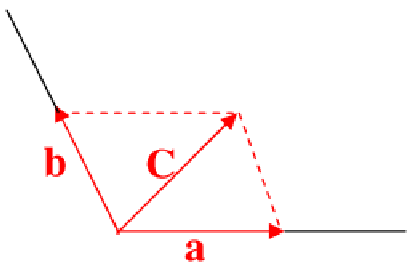


$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{C}=\vec{d}$$

بردارهای قرینه:دو بردار که هم راستا، هم اندازه ودارای جهت مخالف باشند، بردارهای قرینه هستند.

$$\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{O}$$

تجزیه بردار:اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم، از انتهای ان بردار به موازات راستای داده شده رسم می کنیم هر کجا این خطوط با امتدادها برخورد کند، انتهای بردارهای تجزیه شده می باشد.



$$\vec{C} = \vec{a} + \vec{b}$$

ضرب عدد در بردار: در ضرب یک عدد در بردار، ان عدد هم در طول و هم در عرض بردار ضرب می شود.

$$K \times \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kb \\ km \end{bmatrix} \qquad ۵ \times \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۲۰ \end{bmatrix} \quad , \quad (-۳)\begin{bmatrix} -۶ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

اگر $\vec{t} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{m} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مختصات $\vec{x} = -۲\vec{t} + ۳\vec{m}$ را به دست آورید.

$$\vec{x} = -۲\vec{t} + ۳\vec{m} = (-۲)\begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix} + ۳\begin{bmatrix} -۵ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱۵ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$$

حل معادله مختصاتی:

هر معادله برداری یا مختصاتی را مانند معادلات معمولی وبا مراحل زیر حل می کنیم:

الف) مجهول ها را در یک طرف تساوی و مختصات ها را در طرف دیگر تساوی می نویسیم.

ب)حاصل مجهول ها و حاصل عدد های معلوم را به دست می اوریم.

ج) طول و عرض مختصات حاصل را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$$۳\vec{x}+\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\+۳\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۹\div۳\\۳\div۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow\quad\vec{x}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}$$

بردارهای واحد مختصات:

بردار $\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ را بردار واحد طول و بردار $\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ را بردار واحد عرض می نامند. برای تبدیل مختصات یک بردار به بردارهای واحد کافی است عدد طول را ضریب $\vec{i}$ و عدد عرض را ضریب $\vec{j}$ قرار دهیم.

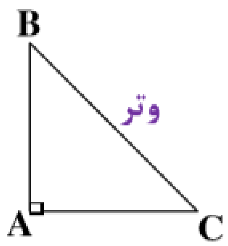
مثال) معادله زیر را حل کنید؟

$$۳\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\۱\end{bmatrix}$$

$۳\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{x}=-۵\vec{i}+\vec{j}$	$\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\۱\end{bmatrix}$
$۲\vec{x}=-۵\vec{i}+\vec{j}-۳\vec{i}-\vec{j}$	$۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$
$۲\vec{x}=-۸\vec{i}$	$۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۸\\۰\end{bmatrix}$
$\vec{x}=-۴\vec{i}$	$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۴\\۰\end{bmatrix}$

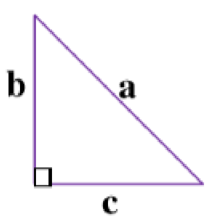
فصل ششم ریاضی هشتم: مثلث

مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است.زاویه A قائمه(راست)،ABوAC اضلاع قائم وBC وتر مثلث است.



رابطه ی فیثاغورس:در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر بیان میشود

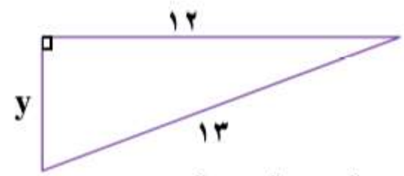
مربع ضلع قائم دیگر+ مربع یکی از ضلع های قائم=مربع وتر



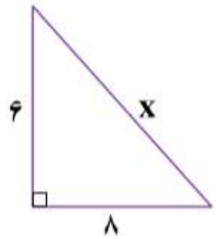
$$a^{۲} = b^{۲} + C^{۲}$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر ان برابر باشد، ان مثلث قائم الزاویه است.

مثال: در شکل های زیر مقدار x و y را به دست اورید؟

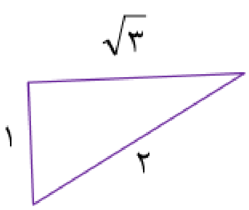


$$۱۳^۲ = y^۲ + ۱۲^۲$$
$$۱۶۹ = y^۲ + ۱۴۴$$
$$y^۲ = ۱۶۹ - ۱۴۴ = ۲۵$$
$$y = \sqrt{۲۵} = ۵ \Rightarrow \boxed{y=۵}$$



$$x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲$$
$$x^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$$
$$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Rightarrow \boxed{x=۱۰}$$

مثال) ایا مثلث زی قائم الزاویه است؟بله

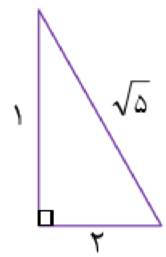


$$۲^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۱^۲$$
$$۴ = ۳ + ۱$$
$$۴ = ۴$$

رسم پاره خطی به طول b√: ابتدا دو عدد پیدا می کنیم که اگر به توان دو رسانده و با هم جمع کنیم، عدد زیر رادیکال به دست می اید. سپس مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع این دو عدد رسم می کنیم.وتر مثلث

به اندازه ی عدد داده شده می باشد.

پاره خطی به طول $\sqrt{۵}$ سانتی متر رسم کنید.

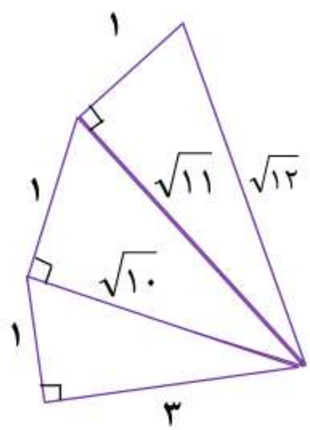


مثلثی به اضلاع ۱ و ۲ سانتی متر رسم می کنیم زیرا : $۱^۲ + ۲^۲ = ۱ + ۴ = ۵$ پس وتر مثلث جواب مسئله است.

مهسا با ماشین حساب $\sqrt{۵}$ را محاسبه کرد و حاصل تقریباً ۲/۳۶ شد سپس پاره خطی به طول ۲۳ میلی متر رسم کرد. آیا روش کار مهسا درست است؟

مثال) پاره خطی به طول $\sqrt{۱۲}$ سانتی متر رسم کنید؟

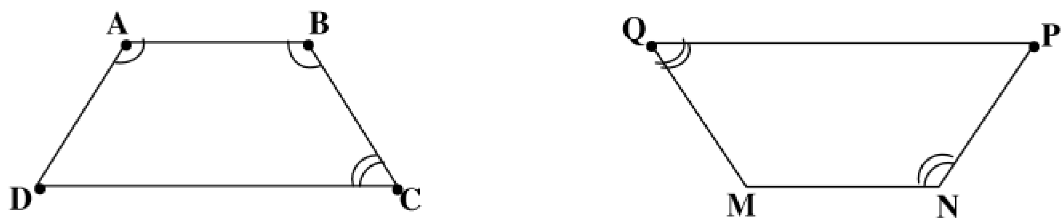
بزرگترین عددی که مجذور ان از ۱۲ کمتر باشد عدد ۳ است. لذا مثلثی به اضلاع قائم ۳ و ۱رسم کرده، سپس با عمود کردن ضلع های یک واحدی بر وترها، کار را ادامه داده تا به $\sqrt{۱۲}$ برسیم.



شکل های هم نشت: اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی(تقارن،دوران و انتقال) به شکل دیگری منطبق کنیم به طوری که کاملا یکدیگر را بپوشانند، می گوییم این دو شکل هم نهشت هستند.

با دوران ۱۸۰ درجه مرکزی دو شکل مقابل بر هم منطبق می شوند پس هم نهشت اند.

$\overline{AB}=\overline{MN}, \overline{AD}=\overline{PN}, \overline{BC}=MQ, \hat{A}=\hat{M}, \hat{B}=\hat{M}, \hat{C}=\hat{Q}, \hat{D}=\hat{P}, \overline{DC}=PQ$



دو مثلث زیر هم نهشت اند اندازه مجهول را بیابید؟

$\overline{AB}=\overline{MN}$

$۷=۳z+۱$

$۷-۱=۳z$

$۶=۳z$

$z=\frac{۶}{۳}=۲$

$\overline{AC}=\overline{MP}$

$x+۱=۲x-۸$

$۱+۸=۲x-x$

$\boxed{x=۹}$

$\overline{BC}=\overline{NP}$

$۲y=۱۲$

$y=\frac{۱۲}{۱۲}=۶$

$\boxed{y=۶}$

حالت های هم نهشتی مثلث ها: مثلث ها به سه حالت ممکن است با هم هم نهشت باشند»»

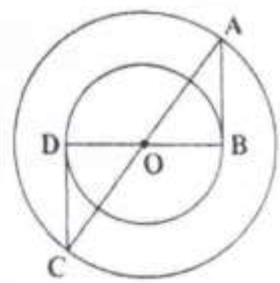
الف)اگر سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند.(ض ض ض)

ب) اگر دو ضلع و زاویه بین ان ها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین ان ها از مثلث دیگر برابر باشند.(ض ز ض)

ج)اگر دو زاویه و ضلع بین ان ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع ان ها از مثلث دیگر برابر باشند.

(ز ض ز)

مثال) حالت و دلیل هم نهشتی مثلث های زیر را بنویسید؟



شعاع دایرهٔ بزرگ: $AO = CO$

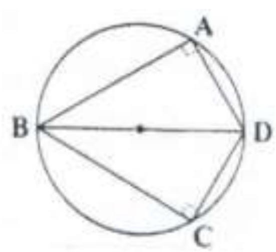
زوایای متقابل به رأس: $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

شعاع دایرهٔ کوچک: $BO = DO$

دو مثلث AOB و COD به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.

نکته:در مثلث های قائم الزاویه می توان از دو حالت خاص هم نهشتی به نام های وتر و یک ضلع زاویه قائمه (و ض) یا وتر و یک زاویه تند (و ز) استفاده کرد.

مثال) اگر بدانیم BC=AB ایا دو مثلث قائم الزاویه زیر هم نهشت اند؟



وتر مشترک: $BD = BD$

فرض سؤال: $AB = BC$

پس دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه (و ض) هم‌نهشت هستند.

فصل هفتم ریاضی هشتم: توان و جذر

ضرب عدد های توان دار:

الف) در ضرب عدد های توان دار اگر پایه ها مساوی باشند،یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ب) در ضرب عدد های توان دار اگر توان ها مساوی باشند،یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$۴^۷ \times ۴^۳ = ۴^{۷+۳} = ۴^{۱۰} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^۵ \times (۰/۵) = (۰/۵)^{۵+۱} = (۰/۵)^۶$$

$$(-۳)^{۱۱} \times (-۷)^{۱۱} = (-۳ \times -۷)^{۱۱} = ۲۱^{۱۱} \quad , \quad (\frac{۳}{۶})^{۲۰} \times ۸^{۲۰} = (\frac{۳}{۴} \times ۸)^{۲۰} = ۶^{۲۰}$$

به توان رساندن یک عدد توان دار: برای به توان رساندن یک عدد توان دار کافی است توان ها را در هم ضرب کنیم.

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \qquad (۵^۷)^۴ = ۵^۷ \times ۵^۷ \times ۵^۷ \times ۵^۷ = ۵^{۴ \times ۷} = ۵^{۲۸}$$

تقسیم اعداد توان دار:

الف) تقسیم اعداد توان دار با پایه های مساوی »در تقسیم اعداد توان دار اگر پایه ها مساوی باشند یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \qquad ۱۷^{۵۰} \div ۱۷^{۲۰} = ۱۷^{۵۰-۲۰} = ۱۷^{۳۰} \qquad (-۹)^{۱۳} \div (-۹) = (-۹)^{۱۳-۱} = (-۹)^{۱۲}$$

ب)تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی» اگر توان ها مساوی باشند، یکی از توان ها را نوشته پایه ها را برهم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m \qquad ۱۸^۷ \div ۶^۷ = (\frac{۱۸}{۶})^۷ = ۳^۷ \qquad (-۲۰)^{۱۱} \div (-۵)^{۱۱} = (\frac{-۲۰}{-۵})^{۱۱} = ۴^{۱۱}$$

نکات

اگر بخواهیم یک عدد توان دار را بدون پرانتز به توان برسانیم، باید توان را به توان برسانیم اجازه ضرب توان ها را نداریم.

$$(a^b)^c \neq a^{b^c} \qquad (۷^۵)^۲ = ۷^{۵\times۲} = ۷^{۱۰} \quad , \quad ۷^{۵^۲} = ۷^{۲۵}$$

اگر پایه یا توان مساوی نداشتیم،با تجزیه به عامل های اول می توان پایه یا توان مساوی ایجاد کرد.

$$۲۷\times۹^۴ = ۳^۳ \times (۳^۲)^۴ = ۳^۳ \times ۳^۸ = ۳^{۱۱}$$

برای ساده کردن کسرهای توان دار، ابتدا توان های مساوی یا پایه های مساوی را از هم جدا کرده،سپس حاصل هر کدام را به دست می اوریم.

$$\frac{۳^{۱۲}\times۲^۷}{۲^{۱۱}\times۳^۸} = \frac{۳^{۱۲}}{۳^۸}\times\frac{۲^۷}{۲^{۱۱}} = \frac{۳^۴}{۱}\times\frac{۱}{۲^۴} = \frac{۳^۴}{۲^۴} = (\frac{۳}{۲})^۴$$

جذر تقریبی: جذر هر عدد مقداری مثبت است. ولی ریشه های یک عدد همواره دو مقدار قرینه هم هستند.

اعداد منفی جذر ندارند.

$$\sqrt{۳۶} = ۶ \qquad , \qquad \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۱}{۵} \qquad , \qquad \sqrt{۰/۴۹} = ۰/۷$$

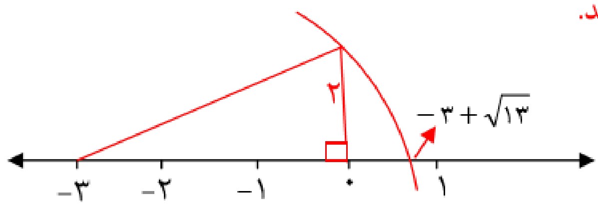
نمایش اعداد رادیکالی روی محور:

الف)نقطه شروع را که عددی صحیح بوده وهراه عدد رادیکالی می اید مشخص می کنیم.

ب)جهت رسم مثلث قائم الزاویه را تعیین می کنیم.اگر علامت رادیکال مثبت بود به سمت راست و اگر منفی بود به سمت چپ کمان می زنیم.

ج) دو عدد را پیدا کرده که مجموع مجذور های ان ها با عدد زیر رادیکال برابر باشد.

جای عدد $-۳+\sqrt{۱۳}$ را روی محور مشخص کنید.



الف) نقطه شروع ۳-

ب) جهت رسم مثلث +

ج) ضلع های مثلث ۲ و ۳

$۲^۲+۳^۲=۹+۴=۱۳$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(b\neq ۰)$$

$$\sqrt{۹۰۰}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۱۰۰}=۳\times۱۰=۳۰ \qquad \sqrt{\frac{۶۴}{۸۱}}=\frac{\sqrt{۶۴}}{\sqrt{۸۱}}=\frac{۸}{۹}$$

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\begin{cases}\sqrt{۴}+\sqrt{۹}=۲+۳=۵\\ \sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}\cong ۳/۶\end{cases}$$

محاسبه ی جذر یک عدد با ماشین حساب :

الف) ماشین حساب معمولی : دکمه $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\longrightarrow$ تایپ عدد

ب) ماشین حساب مهندسی : تایپ عدد $\longrightarrow$ دکمه $\boxed{\sqrt{\ }}$

روش محاسبه جذر تقریبی یک عدد

می خواهیم جذر تقریبی ۱۲ را حساب کنیم. مجذورهای کامل قبل و بعد از ۱۲ را تعیین می کنیم.

$$\underset{\substack{\downarrow\\ ۳}}{\sqrt{۹}} < \sqrt{۱۲} < \underset{\substack{\downarrow\\ ۴}}{\sqrt{۱۶}}$$

یعنی $\sqrt{۱۲}$ بین ۳ و ۴ قرار دارد. عدد وسط بین ۳ و ۴ عدد ۳/۵ است.

مجذور ۳/۵ می شود ۱۲/۲۵ که از ۱۲ بیش تر است پس $\sqrt{۱۲}$ از ۳/۵ کوچک تر است. حال مجذور عددهای ۳/۴ و ۳/۳ و..... را بررسی می کنیم. عددی که مجذورش به ۱۲ نزدیک تر باشد، جواب است

عدد	۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴
مجذور	۹	۹/۶۱	۱۰/۲۴	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶

$\Rightarrow \sqrt{۱۲} \cong ۳/۴$

اگر بخواهیم جذر ۱۲ را تا دو رقم اعشار حساب کنیم از عدد وسط ۳/۴ و ۳/۵ یعنی مجذور ۳/۴۵ شروع کرده و مراحل را مانند قبل تکرار می کنیم. جذر ۱۲ از ۳/۴۵ بزرگ تر است.

$(۳/۴۵)^۲=۱۱/۹۰$

عدد	۳/۴۶	۳/۴۷
مجذور	۱۱/۹۷	۱۲/۰۴

$\Rightarrow \sqrt{۱۲} \cong ۳/۴۶$

ریاضی هشتم - فصل هشتم : امار و احتمال

علم امار:امار علم جمع اوری،سازماندهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات است.به اطلاعاتی که جمع اوری میکنیم، داده های اماری می گوییم.

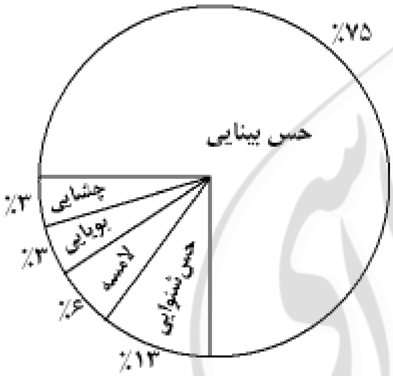
انواع نمودار:

الف)نمودار ستونی:برای مقایسه تعداد و پیدا کردن بیشترین و کمترین داده.

ب)نمودار خط شکسته:برای نشان دادن تغیرات در یک مدت مشخص کاربرد دارد.

ج)نمودار تصویری: برای مقایسه داده های تقریبی به کار می رود.

د)نمودار دایره ای:برای نشان دادن نسبت داده ها به کل و سهم هر بخش به کار می رود.



دسته بندی داده ها:

مثال)نمره های ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره به شرح زیر می باشد.جدول داده های اماری ان را در ۴ دسته تنظیم کنید؟

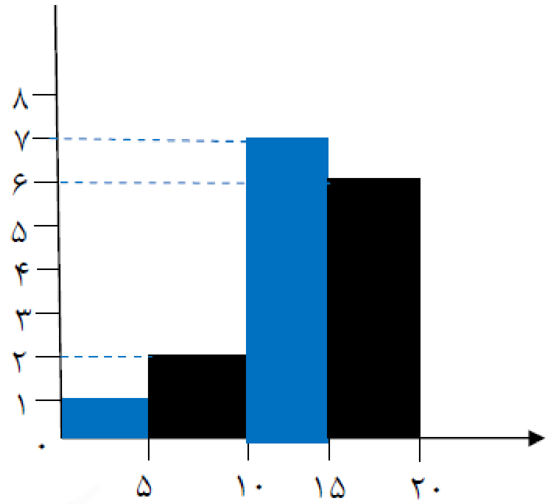
۹و ۱۱و ۲۰و ۱۲/۵و ۱۸و ۱۳و ۱۴/۵و ۱۶و ۲۰و ۸و ۲و ۱۴و ۱۷و ۱۰/۵و ۱۹و ۱۲

ابتدا دامنه تغیرات را مشخص می کنیم:فاصله بین بیشترین و کمترین داده های هر مسئله اماری را دامنه تغیرات می گوییم.در این مثال دامنه تغیرات ۱۸=۲-۲۰ می باشد. به ازای هر عدد یک چوب خط در دسته ی مربوطه رسم می کنیم.

محاسبه طول دسته ها:دامنه تغیرات را بر تعداد دسته هایی که می خواهیم داده های را طبقه بندی کنیم،تقسیم می کنیم تا حدود دسته ها به دست اید. بااین کار، داده ها با فاصله های مساوی تقسیم میشوند.

فراوانی:به تعداد داده های هر دسته، فراوانی ان دسته می گویند.که با چوب خط تعداد داده ها را مشخص می کنیم.

فراوانی	خط نشان	حدود دسته ها
۱	/	$۰ \le x < ۵$
۲	//	$۵ \le x < ۱۰$
۷	~~////~~ //	$۱۰ \le x < ۱۵$
۶	~~////~~ /	$۱۵ \le x \le ۲۰$
۲۰	-	جمع



مثال:داده های زیر جرم ۴۰ نوزاد متولد شده در یکی از بیمارستان های تهران را نشان می دهد.این داده ها را در ۵ دسته طبقه بندی کنید و برای ان جدول فراوانی و نمودار ستونی رسم کنید؟

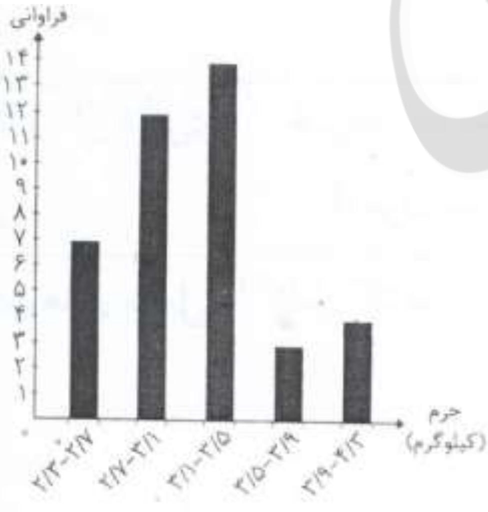
۳/۹ ۴/۳ ۳/۴ ۲/۹ ۴ ۲/۷ ۲/۶ ۲/۳
۳/۱ ۳/۵ ۳/۳ ۲/۷ ۳ ۳/۱ ۳/۲ ۲/۷

۳/۸ ۴ ۳/۴ ۲/۷ ۲/۶ ۳ ۲/۸ ۳/۲
۳/۴ ۲/۵ ۲/۴ ۳/۳ ۲/۹ ۳/۸ ۳/۱ ۲/۳
۳/۴ ۳/۲ ۲/۶ ۲/۸ ۲/۹ ۳ ۳/۱ ۳/۲

$$\left.\begin{array}{l} ۴/۳ = \text{بیش‌ترین داده} \\ ۲/۳ = \text{کم‌ترین داده} \end{array}\right] \Rightarrow \text{دامنهٔ تغییرات} = ۴/۳ - ۲/۳ = ۲$$

$$\text{طول هر دسته} = \frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

حدود دسته‌ها	فراوانی	خط‌نشان
$۲/۳ \le X < ۲/۷$	۷	~~////~~ //
$۲/۷ \le X < ۳/۱$	۱۲	~~////~~ ~~////~~ //
$۳/۱ \le X < ۳/۵$	۱۴	~~////~~ ~~////~~ ////
$۳/۵ \le X < ۳/۹$	۳	///
$۳/۹ \le X \le ۴/۳$	۴	////



میانگین داده ها:میانگین داده های اماری از تقسیم مجموع ان ها بر تعدادشان به دست می اید.

به صورت جبری $\bar{x} = \frac{S}{n}$ یا $\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$

مثال) میانگین اعداد ۱۷و۱۲و۲۰و۱۱ را به دست اورید؟

$$\text{میانگین} = \frac{11+12+2+17}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

اگر تعداد داده های اماری زیاد باشد،از دستور زیر میانگین را محاسبه می کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع ستون (مرکز دسته} \times \text{فراوانی)}}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$$

مثال) میانگین اعداد زیر را به دست اورید؟

۹و ۱۱و ۲۰و ۱۸و ۱۲/۵و ۱۶و ۱۴/۵و ۱۳و ۲۰و ۸و ۲و ۱۹و ۱۲و ۱۰/۵و ۱۴و ۱۷

نکته :

$$\text{مرکز دسته} = \frac{\text{انتهای دسته + ابتدای دسته}}{2}$$

حدود دسته	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز× فراوانی
$0 \le x < 5$	/	۱	۲/۵	۲/۵
$5 \le x < 10$	//	۲	۷/۵	۱۵
$10 \le x < 15$	~~////~~ //	۷	۱۲/۵	۸۷/۵
$0/5 \le x \le 20$	~~////~~ /	۶	۱۷/۵	۱۰۵
جمع	-	۱۶	-	۲۱۰

$$\text{میانگین} = \frac{210}{16} \cong 13/1$$

مثال)میانگین نمرات سوشیان در سه درس ریاضی،علوم و عربی ۱۸ است.اگرنمرات ریاضی و علوم او ۱۷ و ۱۹باشد،نمره عربی او چند است؟

نمره ی عربی : ۱۸=۳۶-۵۴ مجموع نمرات ریاضی و علوم : ۳۶=۱۹+۱۷ مجموع سه درس : ۵۴=۱۸×۳

احتمال یا اندازه گیری شانس:در ریاضی احتمال اتفاق افتادن هرپیشامد از رابطه زیربه دست می اید:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت های ممکن}}$$

مثال)یک تاس را پرتاب می کنیم احتمال اینکه فرد بیاید چقدر است؟

(۵ و ۳و ۱) ، ۳= تعداد حالت های مطلوب

(۶و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱) ، ۶= همه ی حالت ها

$$\text{احتمال فرد آمدن} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال) در یک کیسه ۴ مهره ابی،۵مهره قرمز و۶مهره ی سفید وجود دارد.یک مهره به تصادف خارج کرده ایم.احتمال اینکه قرمز بیاید چقدر است؟

۵= تعداد حالت مطلوب (۵ مهره قرمز)

۱۵= همه ی حالت ها (۶+۵+۴ =۱۵)

$\Rightarrow$ احتمال قرمز $= \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$

در ازمایش های مختلف یک اتفاق،نتیجه های قبلی روی ازمایش های جدید تاثیر نمی گذارند.مثلا اگر یک سکه را ۹ بار پرتاب کنیم و همگی رو بیایند،در پرتاب دهم احتمال امدن رو یک دوم واحتمال امدن پشت نیزهم یک دوم (احتمال مساوی) است و نتایج ۹ بار اول تاثیری روی بار دهم ندارد.

اگر پیشامدی به هیچ وجه رخ ندهد احتمال ان صفر است.P=۰

اگر پیشامدی به طور قطع رخ دهد احتمال ان برابر با ۱ است.P=۱

در ریاضی احتمال رخ دادن یک پیشامد،یک،صفر، یا عددی بین یک و صفر است.

احتمال رخ دادن-۱= احتمال رخ ندادن

مثال) احتمال برخورد یک دارت به هدف برابر با سه دهم (۳/۱۰) می باشد. احتمال برخورد نکردن دارت به هدف چقدر است؟

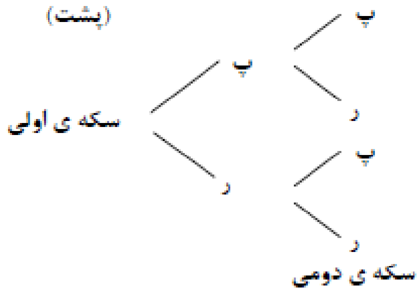
احتمال برخورد نکردن $۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}$

حالت های ممکن در یک پیشامد:برای به دست اوردن کل حالت های ممکن می توان از جدول نظام دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال) دو سکه را با هم پرتاب کرده ایم تمام حالت های ممکن را بنویسید.

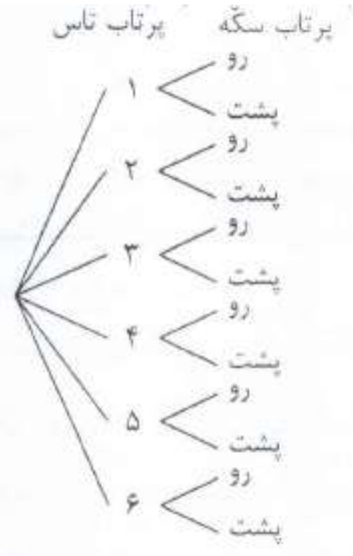
سکه ی اولی	(رو)	(پشت)	(رو)	(پشت)
سکه ی دومی	(رو)	(رو)	(پشت)	(پشت)

نمودار درختی



مثال) یک تاس و یک سکه را همزمان پرتاب می کنیم.احتمال اینکه سکه رو بیاید و تاس عدد کمتر از ۴ باشد را بنویسید؟

ابتدا نمودار درختی این دو رویداد را رسم میکنیم.در کل ۱۲ حالت روی می دهد که حالت های مورد نظر عبارتند از :



(رو - ۳)، (رو - ۲)، (رو - ۱)

احتمال $= \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

جدول نظام دار:این روش معمولا برای حالتی مناسب است که دو رویداد را مورد بررسی قرار دهیم.در این روش ابتدا حالت های یک رویداد را در ردیف افقی و حالت های رویداد بعدی را در ستون عمودی می نویسیم و سپس مانند جدول ضرب سایر خانه ها را پر می کنیم .

مثال) تمام حالت های پرتاب یک سکه و تاس را در جدول نظام دار نشان دهید و سپس مشخص کنید که اگر ۱۰۰۰ بار این کار را انجام دهیم،انتظار داریم سکه چند بار پشت بیاید و عدد تاس مرکب باشد؟

تاس / سکّه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
رو	۱-ر	۲-ر	۳-ر	۴-ر	۵-ر	۶-ر
پشت	۱-پ	۲-پ	۳-پ	۴-پ	۵-پ	۶-پ

در کل ۱۲ حالت روی داده است و حالت‌هایی که سکّه پشت و تاس عدد مرکب آمده است، عبارت‌اند از:

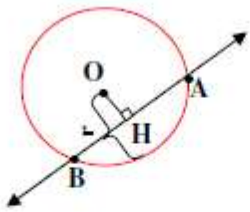
احتمال $= \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$ ⇐ (۶-پ)، (۴-پ)

ریاضی هشتم ـ فصل نهم: دایره ها

دایره:محلی است که مجموعه ای از نقاط که فاصله ان ها از نقطه ای به نام مرکز،یکسان است در ان قرار دارند.به این فاصله شعاع گفته می شود و معمولا با حرف Rیا r نشان داده می شود.

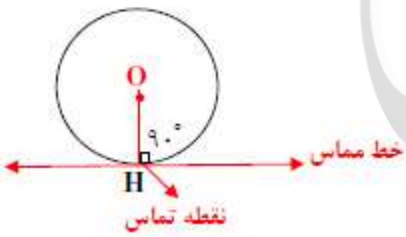
خط و دایره» یک خط و یک دایره دارای سه حالت زیر می باشند:

۱)خط، دایره را در دو نقطه قطع می کند.



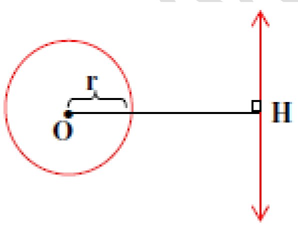
($\overline{OH} < r$ شعاع)

۲)خط دایره را در یک نقطه قطع می کند.



($\overline{OH} = r$)

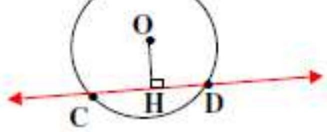
۳)خط دایره را قطع نکند.



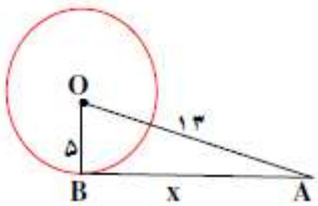
($\overline{OH} > r$)

مثال) فاصله خطی تا مرکز دایره دو سوم شعاع دایره است. وضع خط و دایره را با رسم شکل توضیح دهید؟

پاسخ : چون فاصله خط تا مرکز دایره از شعاع کوچک تر است پس خط دایره را در دو نقطه قطع می کند یعنی : $\overline{OH} < r$



مثال) در شکل زیر AB بر دایره مماس است.مقدار x را به دست اورید؟



مثلث AOB قائم الزاویه است $\Leftarrow OB \perp AB$

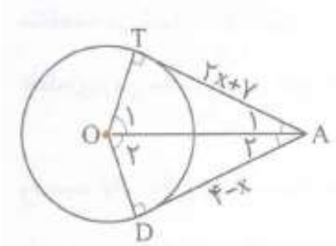
$$۱۳^۲ = x^۲ + ۵^۲$$

$$۱۶۹ = x^۲ + ۲۵$$

$$x^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow x = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

نکته:از هر نقطه خارج از دایره می توان دو خط مماس بر دایره رسم کرد.

مثال) در شکل زیر DA وAT مماس بر دایره هستند. مقدار x را بیابید؟

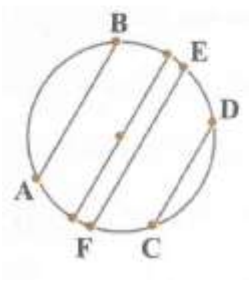


می‌دانیم طول دو مماس با هم برابر است.

$$AT = AD \Rightarrow ۲x + ۷ = ۴ - x \Rightarrow ۲x + x = ۴ - ۷ \Rightarrow ۳x = -۳ \Rightarrow x = \frac{-۳}{۳} = -۱$$

وتر:اگر روی یک دایره دو نقطه انتخاب کنیم و ان ها را با یک پاره خط به هم وصل کنیم،به این پاره خط وتر می گویند.

هر چقدر وترها به مرکز دایره نزدیک شوند بزرگتر می شوند. بزرگترین وتر همان قطر دایره است.



پیدا کردن مرکز دایره: اگر بخواهیم مرکز دایره را پیدا کنیم باید مراحل زیر را انجام دهیم:

الف) دو وتر دلخواه دایره را رسم کنیم.(وترها نباید موازی باشند)

ب)عمود منصف این دو وتر را رسم کنیم.محل برخورد این دو عمود منصف همان مرکز دایره است.

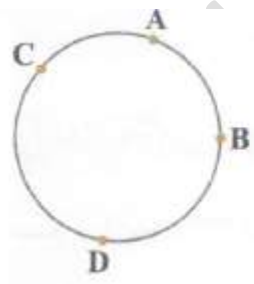
نکته:خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، ان را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند و برعکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره می گذرد بر وتر عمود است.

کمان دایره:هرگاه روی یک دایره،دو نقطه انتخاب کنیم، بین این دو نقطه قسمتی از محیط دایره قرار می کیرد که به ان کمان می گویند. البته می توان دو کمان را بین دو نقطه در نظر گرفت.

اندازه یک کمان را می توان به دو صورت بیان کرد:

۱) بر حسب درجه: می دانیم که یک دایره ۳۶۰ درجه است. در این حالت با یک تناسب می توان اندازه کمان را بر حسب درجه بیان کرد.

مثال) در شکل مقابل کمان AB برابر با یک هشتم دایره و کمان CD برابر با یک سوم دایره است.اندازه هر یک را بر حسب درجه بیان کنید؟

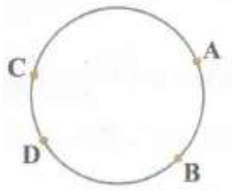


$$\widehat{AB} = \frac{۱}{۸} \times ۳۶۰^\circ = ۴۵^\circ$$

$$\widehat{CD} = \frac{۱}{۳} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

۲)بر حسب سانتی متر: در این روش ابتدا محیط دایره را محاسبه کرده و سپس طول هر کمان را از روی ان محاسبه می کنیم.

مثال) در شکل مقابل شعاع دایره برابر با ۴ است.کمان های AB و CD به ترتیب یک ششم و یک هشتم دایره هستند. طول هر یک چند سانتی متر است؟

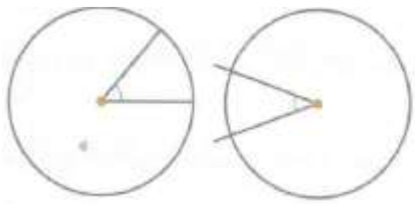


سانتی‌متر $۲۴ = ۳ \times ۴ \times ۲ =$ محیط دایره $(\pi = ۳)$

طول $\widehat{AB} = \frac{۱}{۶} \times ۲۴ = ۴$ سانتی‌متر

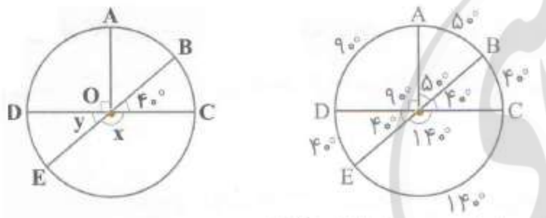
طول $\widehat{CD} = \frac{۱}{۸} \times ۲۴ = ۳$ سانتی‌متر

زاویه مرکزی:هر گاه راس یک زاویه روی مرکز دایره باشد و دو ضلع ان شعاع های دایره باشند(یا دایره را قطع کنند) به ان زاویه ،زاویه ی مرکزی می گوییم.



نکته: اندازه زاویه مرکزی با کمان روبروی ان بر حسب درجه مساوی است.

مثال) در شکل مقابل موارد خواسته شده را به دست اورید؟

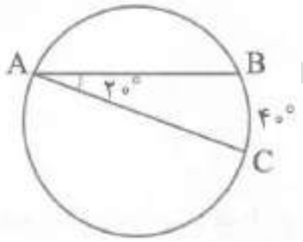


$\hat{x} =$ $\hat{y} =$ $\widehat{AD} =$ $\widehat{AB} =$ $\widehat{EC} =$

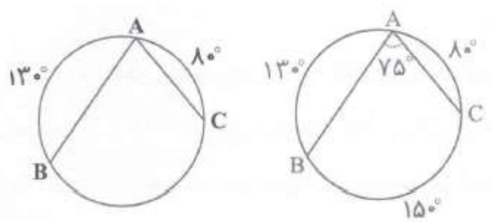
زاویهٔ $AOD = ۹۰°$ است، پس $\widehat{AD} = ۹۰°$ می‌باشد. زاویهٔ $AOB = ۵۰°$ خواهد بود (این زاویه و زاویهٔ BOC متمم هستند)، پس $\widehat{AB} = ۵۰°$ است. زاویهٔ y با زاویهٔ $۴۰°$ متقابل به رأس است $(\hat{y} = ۴۰°)$.

زاویهٔ x با زاویهٔ y مکمل است، پس زاویهٔ $x = ۱۴۰°$ است. کمان EC با زاویهٔ x برابر است، پس $EC = ۱۴۰°$ است.

زاویه محاطی:هر گاه راس یک زاویه روی دایره باشد و ضلع های ان دو وتر از دایره باشند به ان، زاویه محاطی می گوییم. اندازه زاویه محاطی، نصف کمان روبروی ان است.

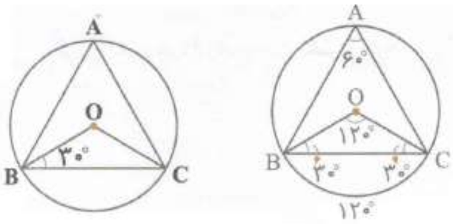


مثال) در شکل های زیر اندازه زاویه A را محاسبه کنید؟



جمع کمان‌های دایره $۳۶۰°$ است، پس کمان BC باید $۱۵۰°$ باشد.

$\Rightarrow A = ۱۵۰° \div ۲ = ۷۵°$

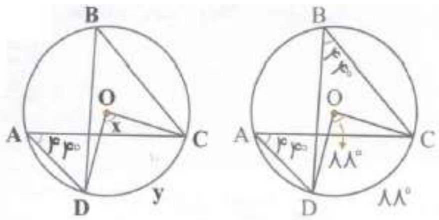


مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس زاویهٔ C هم برابر با 30° و زاویهٔ O برابر با 120° است. کمان BC روبه‌روی زاویهٔ مرکزی O است، پس آن هم 120° است.

$\widehat{A} = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$

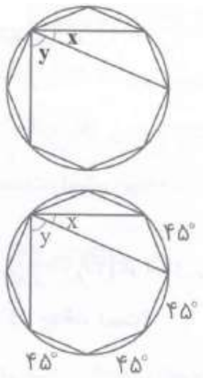
نکته» زاویه های محاطی که رویروی یک کمان قرار دارند با هم برابرند.

در شکل زیر اندازه زاویه و کمان مجهول را محاسبه کنید؟



در این شکل، زاویه‌های B و A روبه‌روی کمان DC هستند، پس این دو زاویه با هم برابرند $(\widehat{A} = \widehat{B} = 44^\circ)$، بنابراین $\widehat{DC}$ دو برابر این زاویه‌ها یعنی، 88° است و زاویهٔ مرکزی O که روبه‌روی این کمان است هم، 88° است.

مثال) ۸ ضلعی زیر منتظم است. اندازه زاویه های x وy را محاسبه کنید؟



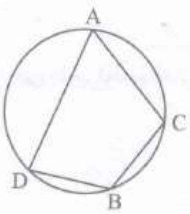
۸ضلعی منتظم، دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم می‌کند، پس اندازهٔ هر کمان کوچک $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ است. روبه‌روی زاویهٔ x، یک کمان 45° و روبه‌روی زاویهٔ y، سه کمان 45° قرار دارد.

$\hat{x} = 45^\circ \div 2 = 22/5^\circ$

$\hat{y} = 135^\circ \div 2 = 67/5^\circ$

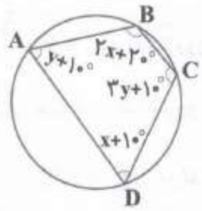
نکته» اگر همه راس های یک چهار ضلعی روی دایره قرار داشته باشند ان گاه زاویه های روبروی ان مکمل هم هستند.

کمان روبه‌روی زاویهٔ C، کمان ADB است و کمان روبه‌روی زاویهٔ D، کمان ACB است. جمع این دو کمان برابر با کلّ دایره، یعنی 360° است. می‌دانیم که زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌روی آن است، پس جمع این دو زاویه، برابر با نصف کلّ دایره، یعنی $360^\circ \div 2 = 180^\circ$ است.



$$\hat{D} + \hat{C} = \frac{\widehat{ACB}}{2} + \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

مثال) در شکل زیر مقدار x وy را پیدا کنید؟



زاویه‌های A و C روبه‌روی هم هستند، پس جمع آن‌ها °۱۸۰ است.

$$y+10^\circ+3y+10^\circ=180^\circ \Rightarrow y+3y=180^\circ-10^\circ-10^\circ \Rightarrow 4y=160^\circ \Rightarrow y=\frac{160^\circ}{4}=40^\circ$$

زاویه‌های B و D ، روبه‌روی هم هستند، پس جمع آن‌ها °۱۸۰ است.

$$2x+20^\circ+x+10^\circ=180^\circ \Rightarrow 2x+x=180^\circ-20^\circ-10^\circ \Rightarrow 3x=150^\circ \Rightarrow x=\frac{150^\circ}{3}=50^\circ$$