



هم کلاسی
Hamkelasi.ir

فصل اول

راهبردهای حل مسئله

هر یک از راهبردهای زیر در فصل اول برای حل مسئله استفاده می شود .

راهبرد رسم شکل

راهبرد الگو سازی

راهبرد حذف حالت های مطلوب

راهبرد الگویابی

راهبرد حدس و آزمایش

راهبرد زیر مسئله

راهبرد حل مسئله ساده تر

راهبرد روش های نمادین .

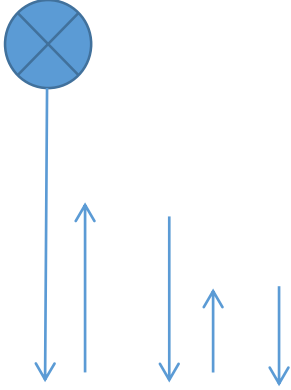
۱- راهبرد رسم شکل

خیلی ساده سعی کنید مسئله را خیلی ساده نقاشی کنید یعنی شکلش را بکشید .

توجه : نگفتم با دوازده رنگ گل و بلبل برایش بکشید ساده نقاشی کنید !

مثال : توپی از ارتفاع ۱۸ متری سطح زمین رها می شود و پس از زمین خوردن ، نصف ارتفاع قبلی خود را بالا می آید . این توپ از لحظه ی رها شدن تا سومین مرتبه ای که به زمین می خورد چند متر حرکت کرده است ؟

حل : از رسم شکل کمک بگیریم :



$$18 + 9 + 9 + 4,5 + 4,5 = 45$$

مجموع حرکت این توپ برابر:

۴۵متر حرکت می کند .

۲- راهبرد الگو سازی

تمام حالت های ممکن را بررسی می کنیم البته با روشی منظم .

مثال : دو عدد طبیعی بنویسید که حاصل ضرب آنها ۲۴ و حاصل جمع آنها کمترین باشد .

اولین عدد	دومین عدد	حاصل جمع
۱	۲۴	$1+24=25$
۲	۱۲	$2+12=14$

۳	۸	$۳+۸=۱۱$
۴	۶	$۴+۶=۱۰$

در بین این اعداد بیشترین حاصل جمع اولی و کمترین آخری می باشد .

۳- راهبرد حذف حالت های نامطلوب

تمام حالت ها را طبق نظم خاص یمی نویسیم و سپس حالت های نامطلوب را حذف می کنیم .

مثال : مجموع سن سه نفر ۱۴ سال و حاصل ضرب سن آنها ۷۰ است . سن بزرگ ترین نفر چقدر است ؟

حل : ضرب سه عدد که ۷۰ باشد و جمعشان ۱۴ ؟

در جدول عدد هایی که ضرب ۷۰ را را می سازد ۱۰ و ۷ و ۵ و ۲ و ۱ می باشد

بزرگ ترین عدد	ضرب ۷۰	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
ندارد	ندارد	۱۰	۲	۲
۷	دارد	۷	۵	۲
ندارد	ندارد	۱۰	۳	۱

بنابراین با عدد های ۲ و ۵ و ۷ می توان مجموع ۱۴ و حاصل ضرب ۷۰ را ساخت که حالت های نامطلوب عدد هایی هستند که شمارنده های عدد ۷۰ نیستند یعنی نمی توان با ضرب آن سه عدد ۷۰ را ساخت .

۴- راهبرد الگویابی

یا یک نظم بر اساس شکل ها (هندسی) پیدا می کنیم یا یک نظم بر اساس عدد ها و با آن خواسته ی مسئله را بدست می آوریم .

مثال : سه عدد بعدی الگوهای زیر را بدست آورید .

۱،۴،۹،۱۶،.....

شماره الگو n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹
n^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2

یعنی در الگوی ما هر عددی در خودش ضرب می شود (مجذور هر عدد) یا توان دوم آن را داریم .

۵- راهبرد حدس و آزمایش

سعی می کنیم حدس بنزیم حدس هایی که به جواب نزدیک تر شویم .

مثال : ۲۰ دستگاه دوچرخه و سه چرخه در یک پارکینگ وجود دارد اگر تعداد کل چرخ های آنها ۴۵ باشد چند دوچرخه و چند سه چرخه در پارکینگ وجود دارد ؟

حل : قبل از اینکه جواب بدیم آخه چه خبره این همه دوچرخه و سه چرخه شاید مهدکودک !

خوب نهند !

حدس اول را از ۱۰ دوچرخه و ۱۰ سه چرخه شروع کنیم چرا ؟ خوب چون ضرب تعداد چرخ ها در ۱۰ ساده تر است .

تعداد دوچرخه	تعداد سه چرخه	بررسی و آزمایش
۱۰	۱۰	$10 \times 2 + 10 \times 3 = 20 + 30 = 50$
۹	۹	$9 \times 2 + 9 \times 3 = 18 + 27 = 45$

ایست ! خاطره

در سال های اول تدریس در یکی از روستاهای با صفای البرز با دانش آموزان سوم راهنمایی درس ریاضی داشتم در یکی از روزهای بهار تدریس ریاضی را در کلاس داشتیم که وقتی پای تابلو مشغول نوشتن بودم وقتی برگشتم با صحنه عجیبی برخورد کردم ! یک موش باغچه ای یعنی موشی با دم و بدن بلند در وسط کلاس از باغچه و باغ های اطراف مدرسه به داخل کلاس آمده بود و تمام قد داشت من و دانش آموزان را برانداز می کرد . شاید برای بعضی از شما عجیب باشد که نگران این بودم که دانش آموزان از این موش برای موش دواندن استفاده خواهند کرد و برای تفریح هم شده نفری یک ترسی از خودشان نشان خواهند داد ولی در این موقعیت کلاس کاملا ساکت و یکی از دانش آموزان قبل از اینکه من حرفی بزنم اجازه گرفت و آقای موش را با یک لگد کاملا حرفه ای به حیاط هدایت کرد و درس را ادامه دادیم .

۶- راهبرد زیر مسئله

سعی می کنیم چند پله را تصور کنیم که هر پله ما را به جواب نزدیک تر می کند .

مثال : پس انداز هفتگی محمد ۳۰۰۰ هزار تومان است او حساب کرد ۵ هفته پس انداز او نصف قیمت کیفی است که دوس دارد بخرد . قیمت کیف چقدر است ؟

حل : پله اول : هر هفته ۳۰۰۰ هزار تومان

پله دوم : ۵ هفته پس انداز می شود $۳۰۰۰ \times ۵ = ۱۵۰۰۰$ هزار تومان

پله سوم : دو برابر پس انداز برابر قیمت کیف = ۳۰۰۰۰ هزار تومان .

۷- راهبرد حل مسئله ساده تر

می توانیم مسئله شبیه همین مسئله ای که به ما داده اند را حل کنیم و جواب تقریبی مسئله را بدست آوریم و برای این مسئله هم یک الگو شبیه آن پیدا کنیم .

مثال : قطر خورشید ۱۳۹۲۵۳۰ کیلومتر و قطر کره زمین $۱۲۷۵۶/۶$ کیلومتر است . قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است ؟

حل : از اعداد تقریبی برای ساده تر شدن مسئله استفاده کنیم :

$$۱۳۹۲۵۳۰ = ۱۰۰۰۰,۰۰۰$$

$$۱۲۷۵۶/۶ = ۱۰,۰۰۰$$

پس با تقسیم اعداد تقریبی می توانیم جواب مسئله را بدست آوریم .

$$\frac{۱۰۰۰۰,۰۰۰}{۱۰,۰۰۰} = ۱۰۰$$

بنابراین قطر خورشید ۱۰۰ برابر قطر زمین است .

۸- راهبرد روش های نمادین

مسئله ها را می توانیم به معادله و عبارت های جبری تبدیل کنیم و سپس با حل معادله به جواب مسئله اصلی برسیم .

مثال : احمد ۳۰۰۰ تومان پول داشت او ۴ دفتر خرید و ۲۰۰۰ تومان برایش باقی ماند . قیمت هر دفتر چقدر است ؟

حل : سعی می کنیم مسئله را به معادله تبدیل کنیم یعنی جواب مسئله را به صورت جای خالی در نظر بگیریم و جواب جای خالی را بدست آوریم .

$$4 \times \square + 2000 = 3000$$

از راهبرد جدول نظام دار برای پیدا کردن جواب جای خالی استفاده کنیم و هر بار جواب را حدس می زنیم .

س

درستی حدس	مقدار جواب جای خالی	جای خالی □
×	$4 \times 500 + 2000 = 4000$	۵۰۰
×	$4 \times 400 + 2000 = 3600$	۴۰۰
×	$4 \times 300 + 2000 = 3200$	۳۰۰
✓	$4 \times 250 + 2000 = 3000$	۲۵۰

پس جواب درست جای خالی به کمک حدس برابر ۲۵۰ شد .

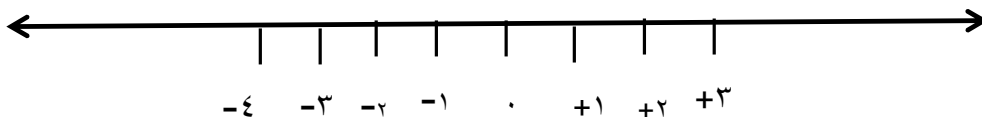
فصل دوم

عدد های صحیح

هر عددی که علامت دارد عدد صحیح گفته می شود مانند اینکه شما در اخبار هواشناسی شنیده اید هوای استان البرز در روز زمستانی ۲- درجه است یعنی دو درجه زیر صفر است
توجه : لطفا ۳- را منفی سه بخوانید نه سه منفی ! یعنی اول از چپ علامت و سپس عدد .

مهمترین مطلب در این فصل این است که شما درست محور را رسم کنید

محور اعداد صحیح یک صفر یا مبدأ در وسط و اعداد مثبت در دست راست و اعداد منفی در دست چپ را دارد .



اشتباه رایج این است که بعضی از دانش آموزان از ۴- شروع می کنند و سپس ۱- را به جای ۴- می نویسند یعنی برعکس از کوچک به بزرگ می نویسند .

صفر نقطه ی بدون علامت است

هرچقدر به سمت راست برویم اعداد بزرگتر و هرچقدر به سمت چپ برویم اعداد کوچکتر می شود.

مثال : اعداد زیر را از لحاظ اندازه با هم مقایسه می کنیم

$+2$ از $+3$ کوچکتر است . $+3$ از $+4$ کوچکتر است . صفر از تمام اعداد مثبت

کوچکتر است . صفر از -10 بزرگتر است .

صفر از -10000 بزرگتر است .

صفر از تمام اعداد منفی بزرگتر است .

جمع و تفریق اعداد علامت دار (اعداد صحیح)

برای جمع و تفریق اعداد صحیح یک راه بسیار ساده وجود دارد کافی است روی محور قدم بزنید

قدم بزنید ! اما روی محور با این شرط که دست راست با علامت مثبت و دست چپ با علامت منفی است .

مثال : حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید .

۱) $+3 + 4 =$

۲) $-3 - 4 =$

۳) $+7 - 3 =$

۴) $-8 - 3 =$

جواب اول : در ذهن خود یک محور بکشید مثبت - صفر - منفی ها

از نقطه ی ۳+ الان در دست راست هستیم حالا ۴ قدم برمی داریم به سمت دست راست چون علامت ۴ مثبت است پس از ۳ به اندازه ۴ قدم به دست راست قدم برداشتیم پس الان روی ۷ هستیم در دست راست پس ۷+

$$+۳ + ۴ = +۷$$

جواب دومی : دست چپ ۳- . از ۳- به اندازه ۴ قدم به دست چپ می رویم به ۷ می رسیم

در دست چپ هستیم پس ۷-

$$-۳ - ۴ = -۷$$

جواب سومی :

$$+۷ - ۳ =$$

برای جواب دادن ابتدا از دست راست ۷+ به اندازه ۳ واحد به دست چپ حرکت می کنیم پس به ۴+ می رسیم .

جواب چهارمی :

$$-۸ - ۳ =$$

از دست چپ ۸- به اندازه ی ۳ واحد به دست چپ حرکت می کنیم به ۱۱- می رسیم .

سوال : حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید .

۱) $-۳ - ۶ = -۹$

۲) $+۷ - ۹ = -۲$

۳) $-۱۱ + ۳ = -۸$

قرینه اعداد

قرینه هر عدد با عوض شدن علامت آن انجام می شود .

مثال :

$$-(+2) = -2$$

جمله ی بالا به این معناست : قرینه عدد مثبت دو برابر منفی دو است .

قرینه ی هر عدد مثبت عددی منفی است .

قرینه ی هر عدد منفی عددی مثبت است .

قرینه ی صفر خودش می شود .

در جمع و تفریق اعداد اگر علامت پرانتز داشتیم از قرینه کمک می گیریم . به مثال دقت کنید.

$$3 - (+2) = 3 - 2 = 1$$

در این مثال قرینه ی $+2$ را بدست آوردیم و سپس با قدم زدن روی محور از 3 به اندازه دو واحد به چپ به 1 رسیدیم .

سوال) حاصل عبارت های زیر را به کمک مفهوم قرینه بدست آورید .

$$1) -2 - (-3) = -2 + 3 = +1$$

$$2) (-4 + (-3)) - 2 = -4 - 3 - 2 = -9$$

ضرب و تقسیم عدد های صحیح :

در ضرب ابتدا اعداد را ضرب می کنیم و سپس از جمله ی زیر استفاده می کنیم .

مثبت علامت مثبتی است و در ضرب (جنگ) علامت ها دخالتی ایجاد نمی کند یعنی

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

اما منفی !

کلا اهل قرینه کردن است! کوتاه نمی آید.

$$- \times - = +$$

$$- \times + = -$$

مثال :

$$۱) (+۲) \times (+۳) = ۲ \times ۳ = ۶, + \times + = + \rightarrow +۶$$

$$۲) (+۲) \times (-۳) = -۶$$

$$۳) (-۴) \times (-۳) = +۱۲$$

$$۴) (-۳) \times (+۷) = -۲۱$$

در تقسیم اعداد علامت دار ابتدا تقسیم اعداد و سپس مانند ضرب تکلیف علامت ها را مشخص می کنیم .

مثال :

$$۱) (+۱۲) \div (+۳) = ۱۲ \div ۳ = ۴, + \div + = + \rightarrow +۴$$

$$۲) (+۱۸) \div (-۳) = -۶$$

$$۳) (-۲۴) \div (-۳) = +۸$$

$$۴) (-۷۲) \div (+۹) = -۸$$

سوال های ترکیبی :

قانون : در سوال های ترکیبی ابتدا جواب داخل پرانتز و سپس ضرب و تقسیم و در آخر نوبت جمع و تفریق است .

سوال

$$۱) (-۳ - (-۴)) \times (-۴ - ۷) = (+۱) \times (-۱۱) = -۱۱$$

$$-۳ - (-۴) = -۳ + ۴ = +۱$$

$$-4 - 7 = -11$$

$$2) (-4 - 3 + 17) \div (-6 + 1) = (+10) \div (-5) = -2$$

$$-4 - 3 + 17 = -7 + 17 = +10$$

$$-6 + 1 = -5$$

مساله : دمای هوای استان البرز در یک روز سرد زمستانی ۵ درجه زیر صفر است اگر دمای

هوای استان هرمزگان ۱۳ درجه گرمتر باشد دمای هوای استان هرمزگان چند درجه است ؟

جواب :

$$-5 + 13 = +8$$

از ۵ درجه زیر صفر (۵-) به اندازه ی ۱۳ قدم به سمت راست می رویم (چون گرمتر است

دست راست اگر سردتر بود به دست چپ حرکت می کنیم).

تمرین های بیشتر و سوالات امتحانی :

$$1) ((-2) + (+3)) \times (-5) =$$

$$2) -5 \times (-4 - (-3)) =$$

$$3) (-18 \div 2) \times (-3 - 7) + (-6) = (-9) \times (-10) - 6 = +90 - 6 = +84$$

$$-18 \div 2 = -9$$

$$(-3 - 7) = -10$$

$$+(-6)$$

فصل ۳

جبر و معادله :

در این فصل با مفهوم عبارت جبری آشنا می شویم .

یک عبارت جبری شامل اعداد و حروف است و برای اینکه به زبان ریاضی نزدیک شویم استفاده می شود

مثلا : حاصل جمع هر عددی با صفر برابر خود آن عدد می شود را می توانیم به شکل

$$a + 0 = a$$

می نویسیم که a می تواند هر عددی باشد مثلا

$$2 + 0 = 2$$

$$4 + 0 = 4$$

بنابراین عبارت بالا که از اعداد و حروف تشکیل شده یک عبارت جبری است .

مثال بیشتر : مساحت یک مربع یک ضلع ضرب در خودش می شود ← اگر ضلع a باشد

$$s = a \times a$$

عبارت های جبری دیگر مانند

$$a \text{ و } 2(2x - 3) + 2 \text{ و } 4x - 3 \text{ و } 2a - 3 \text{ و } b + 1$$

هر عبارت جبری را می توانیم

ساده کنیم

برای آن مقدار عددی بدست آوریم

با ساده کردن شروع می کنیم

منظور از ساده کردن عبارت جبری یعنی استفاده از چهار عمل اصلی مخصوصا ضرب و جمع و تفریق برای اینکه دیگر حروف مشابه تکراری نداشته باشیم! یعنی! در هر عبارت جبری که نیاز به ساده کردن دارد ابتدا عدد پشت پرانتز را داخل پرانتز پخش (ضرب) می کنیم و در نهایت که همه ی عبارت ها بصورت خطی شدند حروف مشابه را با هم مانند درس عدد های صحیح جمع یا تفریق می کنیم .

خوب چند مثال ساده :

$$۱) ۳a + ۲a = ۵a$$

$$۲) ۳b - ۴ - ۳b + ۳ = ۰b - ۱ = -۱$$

$$۳) ۴(۲x - ۳) = ۸x - ۱۲$$

$$۴) -۲(۲x - ۱) + ۳(۴x + ۲) = -۴x + ۲ + ۱۲x + ۶ = +۸x + ۸$$

مثال : هر یک از عبارت های جبری زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید .

$$۱) ۳a - ۸ + ۷a + ۶b = ۱۰a - ۸ + ۶b$$

$$۲) ۴(۲x - ۱) + ۳x - ۷ = ۸x - ۴ + ۳x - ۷ = +۱۱x - ۱۱$$

یه توضیح ، جواب آخر عبارت بالا صفر نمیشه! چرا؟ چون که $+۱۱x - ۱۱$ از دو عبارت

نامشابه تشکیل شده یکی x داره و اون یکی نداره پس حق نداریم از هم تفریق کنیم .

$$۳) ۲x - ۷ - (۴x + ۸) = ۲x - ۷ - ۴x - ۸ = -۲x - ۱۵$$

مقدار عددی یک عبارت جبری

هر عبارت جبری مثل چند ظرف هست که می شه با مقدار مشخص هر ظرفش رو پر کرد مثلا :

$$a + b$$

که از دو ظرف a و b تشکیل شده حالا اگر بگویند ظرف اول a را با عدد ۲ و ظرف b را با ۱ پر کنید مقدار عددی این عبارت می شود

$$a + b$$

$$2 + 1 = 3$$

(مثال) مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای مقدار های داده شده بدست آورید .

الف) مقدار $2a + 3b$ به ازای $a=2$ و $b=1$ را به دست آورید .

$$2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7$$

دقت کنید که عدد هایی که با رنگ دیگر مشخص شده اند مقدار هستند و عدد های مشکی

مربوط به تعداد ظرف ها (ضریب های خود مساله) هستند علامت ضرب هم بخاطر تعداد

ظرف ها است که مثلا ۲ تا ظرف a و ۳ تا ظرف b در این جا داشتیم .

ب) مقدار $-2a + 3b + 1$ را به ازای $a=2$ و $b=3$ بدست آورید .

$$-2a + 3b + 1 = -2 \times 2 + 3 \times 3 + 1 = -4 + 9 + 1 = +6$$

پ) مقدار عددی عبارت جبری $2(x+1) + 2y$ به ازای $x=1$ و $y=-1$ را بدست آورید .

$$2(x+1) + 2y = 2x + 2 + 2y = 2 \times 1 + 2 + 2 \times -1 = 2 + 4 - 2 = +4$$

معادله

منظور از یک معادله یک مساوی است که در دو طرف آن عبارت جبری وجود داشته باشد .

$$2x = 4$$

منظور از عبارت بالا که یک معادله است این است که یک معما حل کنید با این جمله فارسی که

$$۲ \text{ برابر چه عددی برابر } ۴ \text{ می شود ساده است } ۲ \text{ چون } ۲ \times ۲ = ۴ \text{ یا } ۲ \div ۲ = ۴$$

همه معادله ها جواب گم شده ی ساده ای مانند بالایی ندارند مثل $۲x + ۳ = ۷$ یعنی دو برابر

چه عددی را با ۳ جمع کنیم تا جواب ۷ شود ؟

یک سوال ساده ؟ اگر شما وسیله ای را گم کنید چگونه آن را پیدا می کنید ؟ خوب از آخرین جایی که رفته بودید تا اولین مکان را برعکس می آید یعنی جلو را به عقب می روید همان راه با جهت قرینه!

ما هم در جواب گم شده معادله مان همان کار را می کنیم .

$$\text{جواب: از آخرین جا که هستیم یعنی } ۷ \text{ سه قدم بر می گردیم می شود } ۴ = ۷ - ۳$$

حالا داریم $۲x$ را

$$\text{تا اینجا } ۴ \text{ و } ۲x \text{ را فقط می بینیم یعنی } ۲ \text{ برابر چه عددی می شود } ۴ (۲x = ۴).$$

جواب قبلی می شود ۲ .

مراحل بالا را به صورت خلاصه ریاضی می نویسیم ←

$$۲x + ۳ = ۷ \rightarrow$$

$$۲x = ۷ - ۳ = ۴ \rightarrow$$

$$۲x = ۴ \rightarrow x = ۴ \div ۲ = ۲$$

سوال) هر یک از معادله های زیر را حل کنید .

$$۱) ۳x + ۱ = ۷$$

$$۳x = ۷ - ۱ = ۶ \rightarrow$$

$$۳x = ۶ \rightarrow x = ۶ \div ۳ = ۲$$

$$۲) ۴x - ۶ = -۲$$

$$4x = -2 + 6 = +4 \rightarrow$$

$$4x = +4 \rightarrow x = +4 \div 4 = +1$$

بعضی از معادله ها دو گم شده یکسان دارند یعنی دو تا x در دو طرف مساوی مانند

$$2x + 3 = 3x$$

برای حل :

این مساله ها هم همه گمشده ها یا x ها را با هم یکجا دنبالشان می گردیم ولی برای این کار حواسمان هست در عبارت های جبری که حروف یکسان دارند اول ساده می کنیم یعنی حروف مشابه را با هم در نظر می گیریم

$$2x + 3 = 3x$$

عبارت بالا را به صورت زیر می نویسم

$$2x - 3x = -3$$

جای دو عبارت و علامت هایشان عوض شد!؟

چون وقتی در حال برگشت بودم باید از یک عدد شروع می کردم عدد در سمت راست نداشتم برای همین $+3$ را به سمت راست آوردم و شد -3 چون در جهت برعکس میروم (عدد از مساوی عبور کند علامتش عوض می شود) و $-3x$ هم به سمت راست رفت و علامتش عوض شد .

همیشه در حل معادله عدد ها را به سمت راست و حروف را به سمت چپ می بریم و علامت آنهایی که جاییشان عوض شد هم عوض می شود .

$$2x - 3x = -3 \rightarrow$$

$$-1x = -3 \rightarrow x = -3 \div (-1) = +3$$

(سوال)

$$3x - 1 = 2x$$

جواب :

$$3x - 1 = 2x \rightarrow$$

$$3x - 2x = +1 \rightarrow$$

$$1x = +1 \rightarrow x = 1 \div 1 = 1$$

تصمیم منطقی گرفتن بهترین هدیه ریاضیات به انسان ها است .

ریاضیات تنها درسی است که با اطمینان می دانیم دروغ نمی گوید .

ریاضیات دروغ گوی خوبی نیست !

با آرزوی سلامتی و تلاش برای شما دانش آموزان عزیز برای فصل هندسه آماده می شویم .با

سپاس ابراهیمی

یادداشت :.....

معماری

فصل ۴

هندسه

در این فصل اول چند تا تعریف داریم

پاره خط : خطی که از دو طرف بسته باشد . (دو طرف نقطه باشد) .



نیم خط: خطی است که از یک طرف باز و از طرف دیگر بسته باشد . (یک طرف نقطه)



زاویه نیم صفحه : زاویه 180° درجه را نیم صفحه می نامند .

زاویه های متمم : اگر جمع دو زاویه با هم 90° درجه باشد متمم می نامند

زاویه مکمل : به دو زاویه که جمع شان 180° درجه باشد مکمل می گویند .

زاویه متقابل به رأس : یعنی دو زاویه که مانند دسته و لبه قیچی با هم برابر و روبه روی هم باشند .

تبدیل های هندسی : تبدیل های هندسی شامل انتقال ، دوران و تقارن هستند .

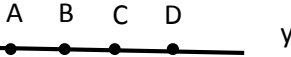
شکل های هم نهشت : اگر با تبدیل های هندسی دو شکل را بتوانیم دقیقاً روی هم قرار دهیم آن دو

شکل هم نهشت هستند .

چندضلعی محدب : به چند ضلعی که زاویه ی بزرگ تر از 180° درجه نداشته باشد .

چندضلعی مقعر : چندضلعی که حداقل یک زاویه بزرگ تر از 180° درجه دارد .

سوال ۱) در شکل زیر نام یدو پاره خط و نیم خط را بنویسید . و رابطه زیر را کامل کنید .



$$AB + BC =$$

$$AD - CD =$$

جواب : نام دو پاره خط AB و BC و نام دو نیم خط XA و DY .

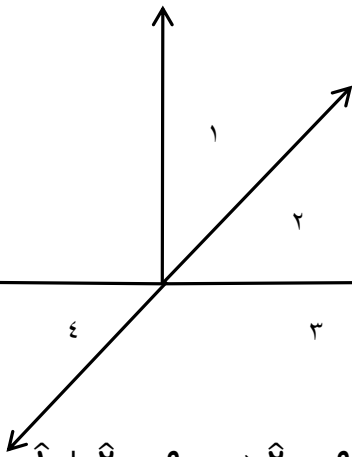
$$AB + BC = AC$$

$$AD - CD = AC$$

برای قسمت آخر کافی است حروف شبیه هم را حذف کنید . تا به جواب برسید و یا از شکل کمک بگیرید .

سوال ۲) در شکل زیر اندازه زاویه ۱ برابر 30° درجه است اندازه های دیگر را بدست آورید .

جواب :



در شکل زاویه های ۲ و ۴ متقابل به رأس هستند و برابر

زاویه های ۳ و ۴ مکمل هستند و جمعشان 180° درجه می شود .

زاوی های ۱ و ۲ متمم هستند پس :

$$\hat{1} + \hat{2} = 90 \rightarrow \hat{2} = 90 - 30 = 60$$

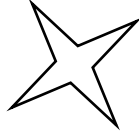
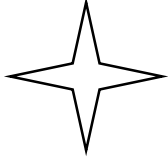
$$\hat{2} = \hat{4} = 60$$

$$\hat{3} + \hat{4} = 180 \rightarrow \hat{3} = 180 - 60 = 120$$

علامت \hat{A} به معنای زاویه ی یک است .

سوال ۳) آیا شکل های زیر هم نهشت هستند ؟ (شکل ها از نوع مقعر هستند چون زاویه ی بزرگتر

از 180° درجه دارند)



جواب : بله چون با تبدیل هندسی دوران و انتقال می توان آنها را روی هم قرار دارد .

ممکن است

فصل ۵

شمارنده ها و اعداد اول

تمام اعداد طبیعی (اعدادی که در طبیعت هستند مانند ۱ و ۲ و ۳ و ... بجز صفر) را می توان در دو دسته ی اعداد اول و مرکب دسته بندی کرد .

اعداد اول : اعدادی که در جدول ضرب جایی برای آنها نداریم و فقط از ضرب عدد یک در خودش بدست می آیند مانند

$$۳ = ۱ \times ۳$$

آیا دو عدد دیگر می توانید مثال بزنید که ضرب شان ۳ بشود ؟ نه پس اول است
مانند $۱۳ = ۱ \times ۱۳$ که ضرب دیگری برای آن نداریم.

اعداد زیر همگی اول هستند .

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ...

کم نیستند !

اعداد مرکب : یعنی ترکیبی از ضرب اعداد دیگر هستند .

$$۴۹ = ۷ \times ۷ \text{ و } ۲۱ = ۳ \times ۷ \text{ و } ۶ = ۲ \times ۳$$

اعدادی که رقم یکان آنها زوج باشد (مانند ۶ و ۱۲ و ۲۰)

اعدادی که جمعشان بر ۳ بخش پذیر باشد (۱۲ و ۱۸ و ۳۳)

اعدادی که رقم یکانشان ۵ باشد (مانند ۵ و ۱۰ و ۱۰۵)

جزو اعداد مرکب محسوب می شوند .

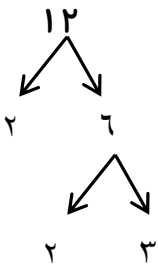
توجه : هر عدد مرکب از شمارنده های اول تشکیل شده است .

مانند $۶ = ۲ \times ۳$ که شمارنده های اول آن ۲ و ۳ هستند .

مانند $۲۱ = ۳ \times ۷$ که شمارنده های اول آن ۳ و ۷ هستند .

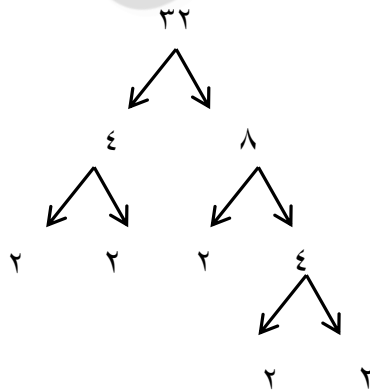
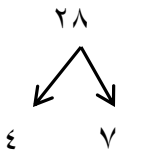
برای مشخص شدن شمارنده های اول از نمودار درختی استفاده می کنیم .

شمارنده های اول ۱۲ اعداد ۲ و ۳ هستند (اعداد انتهایی هر شاخه که دیگر تجزیه نمی شوند).



می نویسیم $۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$

سوال : شمارنده های اول ۲۸ و ۳۲ را بدست آورید .



می نویسیم $۲۸ = ۴ \times ۷$ و $۳۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$

بنابراین شمارنده های اول ۲۸ عبارت اند از ۴ و ۷ و شمارنده های اول ۳۲ عبارت اند از ۲ .

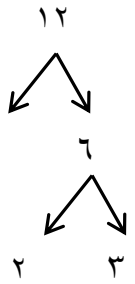
ب.م.م :

بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد

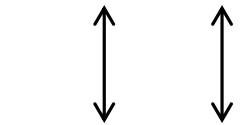
بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد را به این منظور که دو عدد مورد نظر چه عدد مشترکی دارند که این عدد بزرگ ترین عدد بین آنها است پیدا می کنیم .

مثال : بزرگ ترین شمارنده ی مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ را بدست آورید

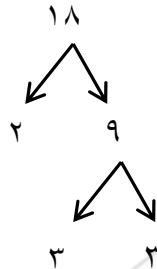
حل :



$$12 = 2 \times 2 \times 3$$



$$18 = 2 \times 3 \times 3$$



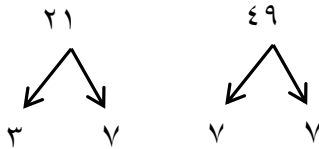
ب.م.م عبارت است از ضرب اعداد مشترک $2 \times 3 = 6$

سوال (حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

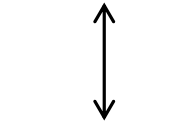
$$(21, 49) =$$

$$(12, 24) =$$

$$(21, 49) = 7$$



$$21 = 3 \times 7$$



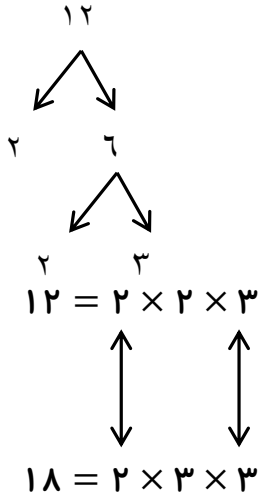
$$49 = 7 \times 7$$

ک.م.م

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد :

کوچکترین مضرب را به کمک نمودار درختی بصورت ضرب اعداد مشترک در اعداد غیر مشترک بدست می آوریم .

مثال :



$$\text{م.م.ک.} 36 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 =$$

رنگ قرمز اعداد مشترک و اعداد مشکی اعداد غیر مشترک (بدون فلش) هستند .

توجه علامت ک.م.م بصورت [] می باشد یعنی مثلا $[12, 18] = 36$

سوال حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

$$(12, 32) =$$

$$[12, 32] =$$

فصل ۶

سطح و حجم

مساحت شکل های پایه مانند مربع و مستطیل ، مثلث ، دوزنقه ، لوزی ، دایره را یادآوری می کنیم .

مربع : یک ضلع ضرب در خودش

مستطیل : طول ضرب در عرض

مثلث : (ارتفاع ضرب در قاعده) تقسیم بر دو

دوزنقه : (مجموع قاعده ها ضرب در ارتفاع) تقسیم بر دو .

لوزی : قطر بزرگ ضرب در قطر کوچک تقسیم بر دو .

دایره : شعاع \times شعاع \times عدد $۳,۱۴$.

حجم های هندسی : حجم ها را به سه دسته تقسیم می کنیم :

منشوری ، کره و هرمی

حجم های منشوری بین دو سطح موازی قرار می گیرند به این دو سطح قاعده می گویند و به سطح

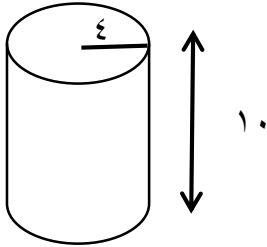
های اطراف آن وجه های جانبی می گویند به محل برخورد سطح ها یال می گویند و به محل برخورد

سه سطح رأس می گویند .

محاسبه حجم های منشوری :

مساحت قاعده را حساب می کنیم و در عدد ارتفاع ضرب می کنیم .

سوال : حجم هر یک از شکل های زیر را بدست آورید .



حجم شکل :

۱- محاسبه مساحت قاعده : دایره ← $4 \times 4 \times 3.14 = 50.24$

۲- محاسبه حجم ← مساحت قاعده \times ارتفاع

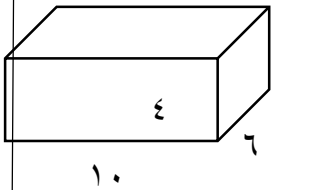
$50.24 \times 10 = 502.4$ سانتی متر مکعب.

(شکل ۲)

۱- محاسبه مساحت قاعده : مستطیل ← $10 \times 6 = 60$

۲- محاسبه حجم ← مساحت قاعده \times ارتفاع ← $60 \times 4 = 240$ سانتی متر مکعب

شکل ۳) در این شکل مساحت جانبی و مساحت کل شکل را بدست آورید .



برای محاسبه مساحت جانبی قاعده ها را حساب نمی کنیم

در این شکل وج های جانبی دو تا جلو و عقب و دو تا در کنار های چپ و راست داریم .

۱- مساحت وجه جلو و عقب $40 = 10 \times 4$ دو تا ۴۰ داریم پس ۸۰

۲- مساحت وجه چپ و راست $24 = 4 \times 6$ دو تا ۲۴ داریم پس ۴۸ .

۳- مجموع ۱ و ۲ می شود $128 = 80 + 48$

مساحت کل : جانبی + قاعده ها ←

مساحت قاعده $۶۰ = ۶ \times ۱۰$ دو تا قاعده داریم پس ۱۲۰

مساحت کل: $۲۴۸ = ۱۲۸ + ۱۲۰$ سانتی متر مربع.

توجه در شکل های ترکیبی (چندتایی) دقیقاً شبیه مراحل بالا پیش می رویم و هر شکل را جداگانه بدست می آوریم اگر کنار هم بودند حجم یا مساحت را با هم جمع و اگر در داخل هم بودند از هم کم می کنیم.



فصل ۷

توان و جذر

تعریف توان را یادآوری می کنیم :

$$2 \times 2 = 2^2, \quad 3 \times 3 = 3^2, \quad 4^2 = 4 \times 4 = 16, \quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

دو تعریف : ۱- مجذور : توان دوم هر عدد را مجذور آن عدد می نامیم

۳- مکعب توان سوم هر عدد را مکعب آن می نامیم .

مثال : مجذور عدد ۳ برابر ۹ است چون $3^2 = 3 \times 3 = 9$ و مکعب عدد ۳ برابر ۲۷ است چون

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

نکته اول : هر عدد به توان یک برابر خودش می شود . $a^1 = a$ مثال $2^1 = 2$

نکته دوم : یک به توان هر عدد برابر یک خواهد بود $1^b = 1$ مثال $1^0 = 1$

نکته سوم : صفر به توان هر عدد برابر صفر می شود $0^c = 0$ مثال $0^2 = 0$

نکته چهارم : هر عدد به توان صفر یک می شود . $a^0 = 1$ مثال $2^0 = 1$

نکته پنجم : اعداد کسری را هم می توانیم به توان برسانیم برای این کار اگر کل عدد یعنی صورت

و مخرج پراتنز داشت هم صورت و هم مخرج را به توان می رسانیم ولی اگر بدون پراتنز بود خوب

فقط اون قسمتی که توان دارد را به توان می رسانیم مثال :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$(. / 1)^2 = . / 1 \times . / 1 = . / . 1$$

محاسبه حاصل عبارت های توان دار (چهار عمل اصلی جمع و تفریق و ضرب و تفریق)

سوال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

$$1) 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$2) 4^2 - 2^3 = 16 - 8 = 8$$

$$3) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$4) 5^1 + 1^5 + 2^0 = 5 + 1 + 1 = 7$$

نکته ششم : اگر عددی منفی را به توان برسانیم وضعیت چگونه ؟

$$\text{مثال (۱) } (-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4 \quad \text{و} \quad -2^2 = - 2 \times 2 = -4$$

نکته هفتم : هر عدد را می توان بصورت گسترده و یک عدد توان دار نوشت.

مثال : گسترده هر یک از اعداد زیر را بنویسید .

$$1368 = 1000 + 300 + 60 + 8 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

$$1404 = 1000 + 400 + 0 + 4 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

$$1373 = 1000 + 300 + 70 + 3 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

ساده کردن عبارت های توان دار :

در ساده کردن عبارت های توان دار اگر در ضرب اعداد توان دار پایه ها برابر باشند یکی از پایه

های برابر را می نویسیم و توان ها را با هم جمع می کنیم .

اگر در ضرب اعداد توان دار با توان های مساوی را داشته باشیم یکی از توان های مساوی را می

نویسیم و پایه ها را در هم ضرب می کنیم .

سوال) حاصل هر یک از عبارت های زیر را بصورت توان دار بنویسید .

$$۱) ۵^۲ \times ۵^۳ = ۵^۵$$

$$۲) ۷^۳ \times ۷^۶ = ۷^۹$$

$$۳) ۵^۳ \times ۴^۳ = ۲۰^۳$$

$$۴) ۷^۳ \times ۲^۳ = ۱۴^۳$$

$$۵) ۲^۳ \times ۶^۳ \times ۳^۷ \times ۴^۷ = ۱۲^۳ \times ۱۲^۷ = ۱۲^{۱۰}$$

$$۶) ۳^۳ \times ۲^۴ \times ۳^۱ \times ۳^۴ = ۳^۴ \times ۶^۴ = ۱۸^۴$$

جذر و ریشه :

مجذور چی بود ؟ توان دوم هر عدد .

حالا اگر توان دوم عددی را داشته باشیم می توانیم خود عدد را بدست بیاوریم به این کار بدست آوردن جذر یا ریشه آن عدد می گویند .

مثال : جذر عدد ۱۶ برابر ۴ است چون توان دوم ۴ می شود ۱۶ .

$$\text{جذر } ۳۶ \text{ برابر } ۶ \text{ است چون } ۶ \times ۶ = ۳۶ = ۶^۲$$

جذر عدد ۲۵ می شود ۵

عبارت های بالا را با علامت رادیکال یا جذر $\sqrt{\quad}$ نمایش می دهیم پس:

$$\sqrt{۱۶} = ۴ \quad \text{و} \quad \sqrt{۳۶} = ۶ \quad \text{و} \quad \sqrt{۲۵} = ۵$$

از جذر اعداد کسری هم صحبت کنیم .

$$\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \frac{\sqrt{۱۶}}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$$

$$\sqrt{۰./۰۱} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{۱}{۱۰}$$

حالا جذر عدد ۱۸ چند است؟ عددی را مثال بزنید که در خودش ضرب شود و حاصل ۱۸ شود
برای این کار از جدول زیر کمک می‌گیریم.

۴	۴/۱	۴/۲	۴/۳	۴/۴	۴/۵	۴/۶	۴/۷	۴/۸	۴/۹	۵
۱۶	۱۶/۸۱	۱۷/۶۴	۱۸/۴۹	۱۹/۳۶	---	---	---	---	---	۲۵

خوب عدد ما ۱۸ بود در جدول بالا جواب ما عدد ۴/۲ است چون از عدد ۱۸ مجذورش عبور
نکرده و نزدیک ترین عدد تقریبی به عدد ۱۸ است. جاهای خالی را نیز دیگر ادامه نمی‌دهیم چون
دیگر جواب ما پیدا شده و نیازی به محاسبه آنها نیست.

پس به این جذرها که نیاز به جدول دارد جذرهای تقریبی می‌گوییم.

سوال) جذر عدد ۲۳ را بصورت تقریبی بدست آورید.

۴	۴/۱	۴/۲	۴/۳	۴/۴	۴/۵	۴/۶	۴/۷	۴/۸	۴/۹	۵
۱	۱۶/۸	۱۷/۶	۱۸/۴	۱۹/۳	۲۰/۲	۲۱/۱	۲۲/۰	۲۳/۰	---	۲
۶	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۹		۵

جواب جذر برابر ۴/۷ است چون مجذورش در ردیف پایین به ۲۳ نمی‌رسد.

شاید بهتر این باشد که اول وسط این دو عدد یعنی ۴/۵ را مجذورش را پیدا می‌کردیم تا نصف
راست جدول را که به آن نیازی نداریم محاسبه نمی‌کردیم یعنی فقط جدول زیر را می‌نوشتیم

۴/۵	۴/۶	۴/۷	۴/۸	۴/۹	۵
۲۰/۲۵	۲۱/۱۶	۲۲/۰۹	۲۳/۰۹	---	۲۵

فصل ۸

بردار و مختصات

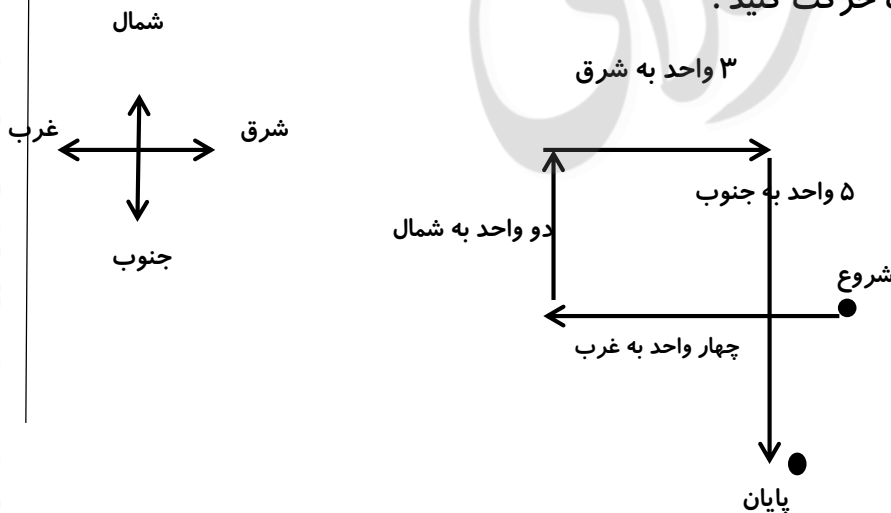
مهمترین مطلبی که باید یاد بگیریم این است که هر صفحه مانند کاغذ را می توان بصورت شطرنجی در دو محور افقی یا x (محور طول ها) و محور عمودی یا y (محور عرض ها) تقسیم بندی کرد.

هر بردار پاره خطی جهت دار است که دارای **راستا**، **جهت** و **اندازه** است.

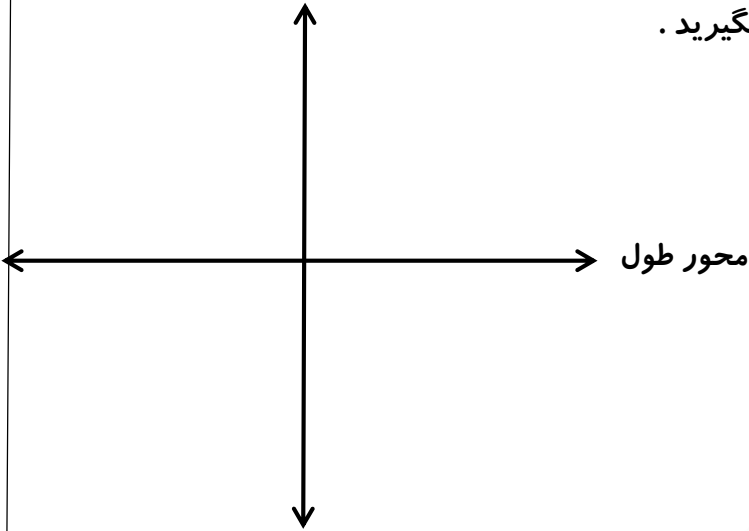
هر بردار روی صفحه دستوری است که شما را برای جهت و اندازه و راستا راهنمایی می کند یک

مثال: از نقطه روبه رو به اندازه چهار واحد به غرب و سپس دو واحد به شمال و سپس ۳ واحد به

شرق و در آخر ۵ واحد به جنوب حرکت کنید.



محور عرض



مختصات : محور مختصات زیر را در نظر بگیرید .

دست راست (شرق) مثبت

دست چپ (غرب) منفی

بالا (شمال) مثبت

پایین (جنوب) منفی

هر نقطه را با دو مختصه (قسمت) طول (افقی) و عرض (عمودی) مشخص می کنیم .

محور افقی
محور عمودی

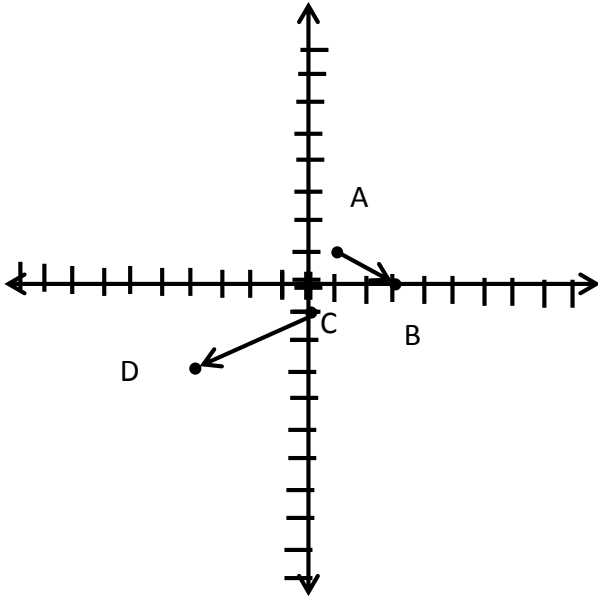
هر بردار را نیز با دو قسمت حرکت افقی و حرکت عمودی نشان می دهیم .

حرکت افقی
حرکت عمودی

مثال : نقطه $A = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +3 \\ . \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} . \\ -1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ را روی محور نمایش دهید

بردارهای \vec{AB} و \vec{CD} را رسم کنید .

برای بردار \vec{CD} یک بنویسید .



پاسخ :

برای رسم نقاط $A = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} +3 \\ . \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} . \\ -1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ از مفهوم

$\begin{bmatrix} \text{محور افقی} \\ \text{محور عمودی} \end{bmatrix}$

استفاده می کنیم

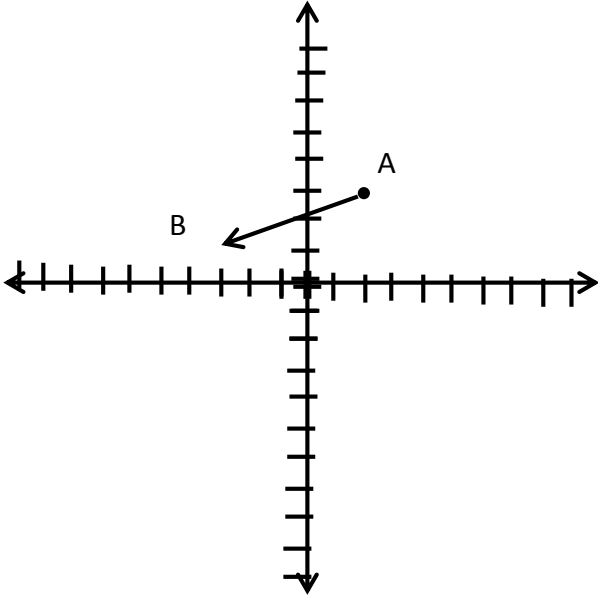
برای نوشتن جمع از فرمول ابتدا + طول = انتها استفاده می کنیم ابتدای بردار CD در نقطه ی C می باشد و اندازه یا طول بردار ۴ واحد در جهت غرب یا -۴ و دو واحد به جنوب یا -۲ می باشد و نقطه انتها D می باشد پس

$$\begin{bmatrix} . \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

همان طور که در بالا دیده می شود برای بدست آوردن حاصل جمع اندازه طول ها با هم و اندازه عرض ها هم نیز با هم جمع شده است .

سوال ۲) بردار $AB = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ابتدا در $\begin{bmatrix} +2 \\ +3 \end{bmatrix}$ را رسم کنید .

$$\begin{bmatrix} +2 \\ +3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ +1 \end{bmatrix} \text{ می بینیم که}$$



در این فصل با مفهوم مختصات آشنا شدیم

قابل توجه دانش آموزان عزیز که این فصل هم در آینده در قسمت های زیادی کاربرد خواهد داشت و حرکت کلا بر اساس سه بعد طول برای اجسام متحرک تعریف می شود که در درس فیزیک با آن بیشتر آشنا خواهید شد

فصل ۹

آمار و احتمال

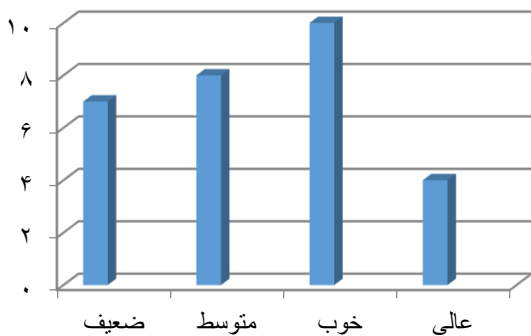
آمار درس جمع بندی تفسیر و تحلیل اطلاعات برای تصمیم گیری و پیش بینی می باشد.

از انواع نمودارها می توان برای نمایش و تفسیر نتیجه ها می توان استفاده کرد .

به مثال داریم :

در کلاس ریاضی نمرات زیر را برای یک درس داریم می خواهیم نتایج ممکن از این کلاس را

بررسی کنیم . این نمودار یک نمودار ستونی است که ۴ گروه برای آن داریم



در گروه ضعیف ۶ نفر

در گروه متوسط ۸ نفر

در گروه خوب ۱۰ نفر

در گروه عالی ۴ نفر

این کلاس $۶ + ۸ + ۱۰ + ۴ = ۲۸$ نفر دانش آموز داریم

بیشترین گروه دانش آموزان در گروه خوب قرار دارند .

نمودار های دیگری نیز برای نمایش اطلاعات داریم

نمودار ستونی

نمودار خط شکسته

نمودار تصویری

احتمال یا اندازه گیری شانس :

احتمال: کسر حالت های مطلوب (خواسته شده) برای رخ دادن

به کل حالت های ممکن برای رخ دادن

مثال : احتمال اینکه در پرتاب یک سکه رو بیاید .

کل حالت های ممکن دو حالت رو و پشت می باشد و حالت مطلوب یک حالت . پس $\frac{1}{2}$

مثال ۲) اگر در یک کیسه ۱۰ مهره باشد که ۳ تا آبی ۴ تا قرمز و بقیه سیاه باشد .

الف) احتمال اینکه آبی از کیسه خارج شود ؟

ب) احتمال اینکه قرمز از کیسه خارج شود ؟

پ) احتمال اینکه آبی نیاید ؟

ت) احتمال اینکه سیاه بیاید ؟

ث) احتمال اینکه آبی یا قرمز بیاید ؟

ج) احتمال اینکه سبز بیاید ؟

چ) احتمال اینکه مهره ظاهر شده آبی ، قرمز و یا سیاه باشد چقدر است ؟

جواب : کل حالت ها ۱۰ مهره

الف) آبی ۳ تا آبی $\frac{۳}{۱۰}$

ب) قرمز ۴ تا مهره $\frac{۴}{۱۰}$

پ) آبی نیاید؟ ۷ تا مهره داریم که آبی نیستند پس $\frac{۷}{۱۰}$ احتمال آبی نیامدن.

می توانستیم کل حالت ها که ۱ است را از $\frac{۳}{۱۰}$ کم کنیم. یعنی: $\frac{۷}{۱۰} = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰}$

ت) سیاه بیاید $\frac{۳}{۱۰}$

ث) آبی یا قرمز بیاید $\frac{۷}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰}$

ج) سبز بیاید ۰ است چون سبز نداریم.

چ) احتمال ۱ است چون تمام رنگ های موجود در کیسه می تواند خارج شود.

نکته: احتمال سه قسمت است: یا صفر است یا ۱ یا عددی کسری بین صفر و یک.

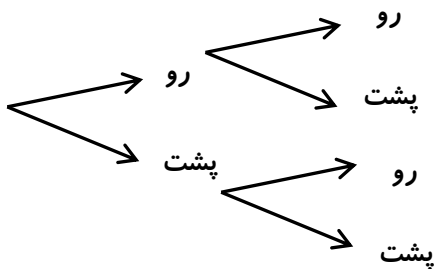
مثال ۳) اگر دو سکه را با هم پرتاب کنیم:

الف) احتمال اینکه هر دو سکه رو بیاید؟

ب) احتمال اینکه هر دو پشت بیاید؟

پ) احتمال اینکه یکی رو و یکی پشت بیاید؟

جواب: از رسم شکل استفاده کنیم نمودار درختی



کل حالت ها (رو، رو)، (رو، پشت)، (پشت، رو)، (پشت، پشت) می باشد ۴ حالت .

الف) احتمال اینکه هر دو رو بیاید $\frac{1}{4}$

ب) احتمال اینکه هر دو پشت بیاید $\frac{1}{4}$

پ) احتمال یکی رو یکی پشت ۲ حالت از ۴ حالت $\frac{2}{4}$.

یادداشت:

