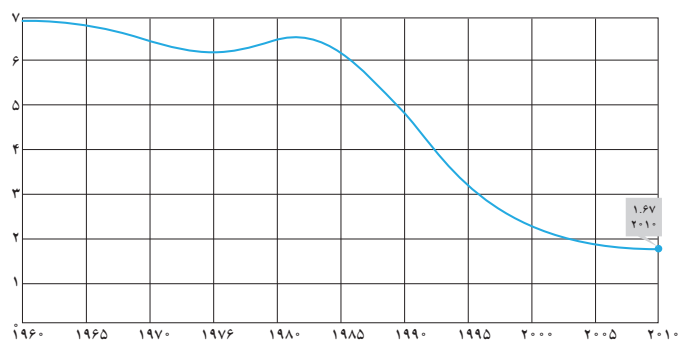
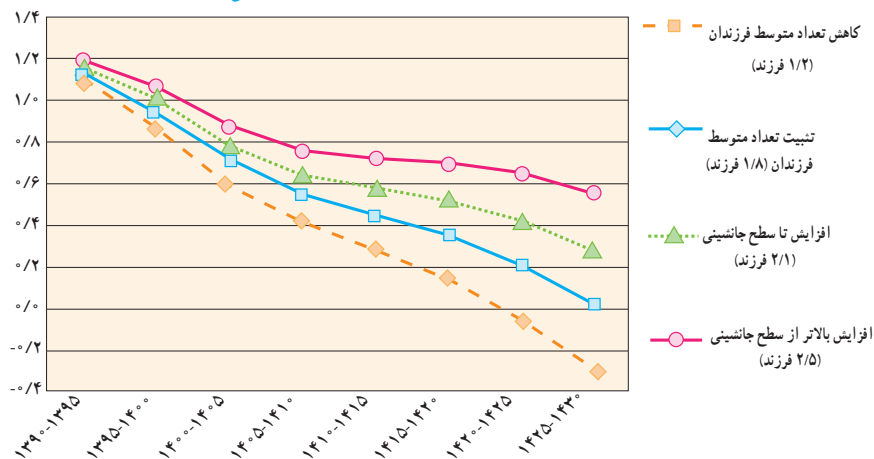


تابع



تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به‌طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد در آن موقع، حدود ۳٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در پی دارد.

نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران

نمودار پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در دوره‌های پنج ساله در چهار وضعیت مختلف
تعداد متوسط فرزندان تا افق ۱۴۳۰ شمسیدرس اول
مفهوم تابع و بازنمایی‌های آندرس دوم
دامنه و برد توابعدرس سوم
سویچ توابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن



فعالیت ۱

بسیاری از پدیده های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می شود. به مثال های زیر توجه کنید :

دمایی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می شود.

قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می شود.

نمره هایی که به یک دانش آموز در دروس مختلف تعلق می گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می شود.

در جدول های زیر مثال های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می توان به آن نسبت داد. درباره بقیه جدول ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

به یک ساعت معین فقط یک دما را می توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط کش	
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	

به یک کالای معین فقط یک قیمت را می توان نسبت داد.

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	

به یک درس مشخص فقط یک نمره را می توان نسبت داد.

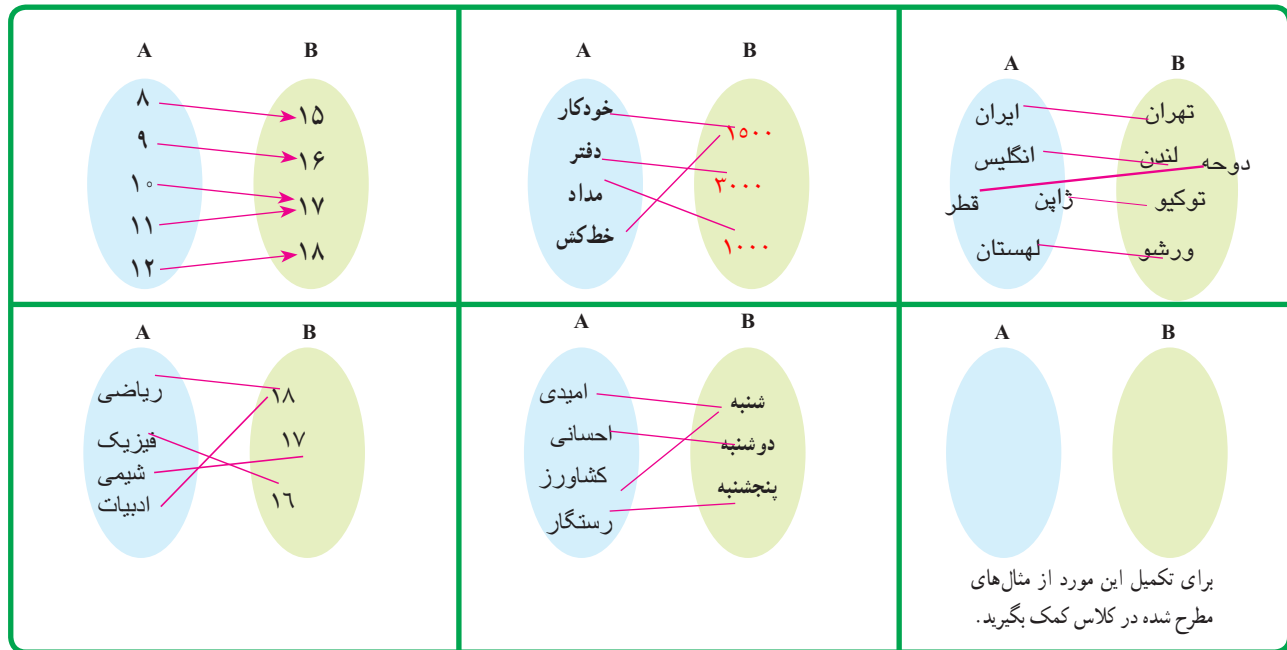
فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه	

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

کشور	ایران	انگلیس	ژاپن	قطر	لهستان
پایتخت	تهران	لندن	توکیو	دوحه	ورشو

به یک کشور مشخص فقط یک شهر را به عنوان پایتخت نسبت دادیا هر مثالی که چنین رابطه ای در آن وجود داشته باشد.

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گوئیم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



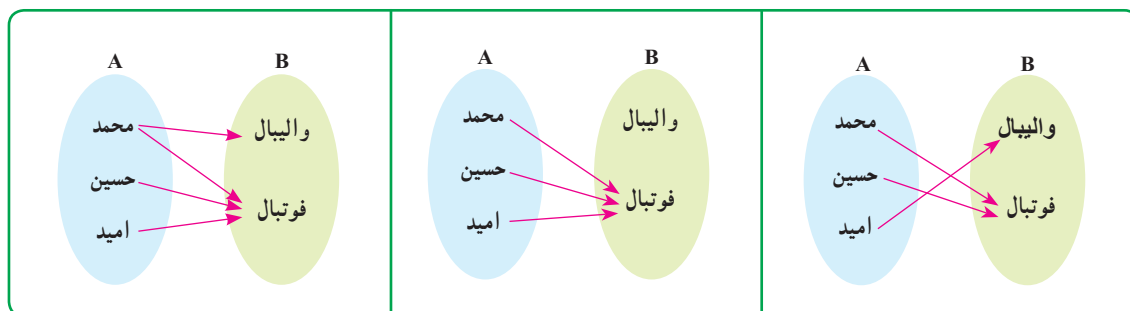
توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

در فعالیت ۱، همه مثال های ارائه شده تابع هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده اند.

کار در کلاس

۱ مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



تابع نیست

تابع است

تابع است

درس اول: مفهوم تابع و بازتابی های آن

۲ از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



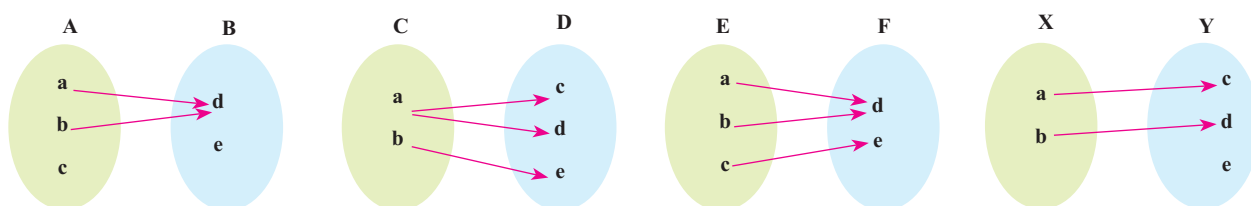
بله در یک زمان مشخص، افراد دارای سن مشخص و وزن مشخص می باشند.

۳ الف) آیا رابطه ای که به افراد سن آنها را نسبت می دهد، یک تابع است؟ رابطه ای که به افراد وزن آنها را نسبت می دهد، چطور؟

ب) آیا رابطه ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید. **خیر زیرا ممکن است یک فرد**

چند نوع غذا را دوست داشته باشد.

۴ کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



تابع نیست

تابع نیست

تابع است

تابع است

فعالیت

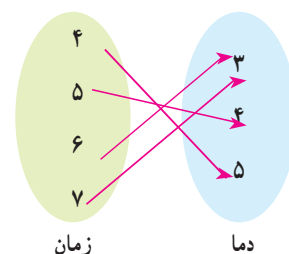
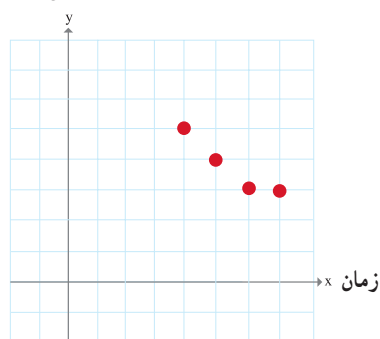
نمایش تابع به صورت زوج های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می دهد.

رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



دما (سانتی گراد)



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 3)$

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های (۴, ۵) و (۵, ۴) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج مرتب» می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$$f = \{(4,5), (5,4), (6,3), (7,3)\}$$

در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفه اول» و عضو دوم را «مؤلفه دوم» می‌نامیم. به طور مثال در زوج مرتب (۳ و ۶)، مؤلفه اول ۶ و مؤلفه دوم ۳ است. مجموعه f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

کار در کلاس

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت	۸۰۰۰۰۰۰	۲۷۰۰۰۰۰	۱۷۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۱۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰۰۰

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟ **بله تابع است.**



کرمان — باغ شازده



شیراز — باغ جهان نما

روان‌شناسی و روان‌شناسی‌های آن

۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
مانند نمونه رسم شود.		$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$	به اعداد ۲ و ۳ و ۴، مربع آنها را نسبت می‌دهد.
مانند نمونه رسم شود.		$\{(4,2), (4,-2), (7,\sqrt{7}), (7,-\sqrt{7})\}$	به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.
مانند نمونه رسم شود.		$\{(-1,-2), (0,0), (1,2)\}$	به اعداد -۱ و ۰ و ۱، دو برابر آنها را نسبت می‌دهد.
			مثال دلخواه

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

گ) تابع نیست زیرا در آن عدد ۲ به دو عدد

۹ و ۵ نظیر شده است.

$$g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$$

$$f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$$

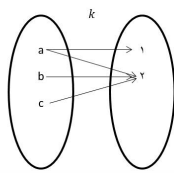
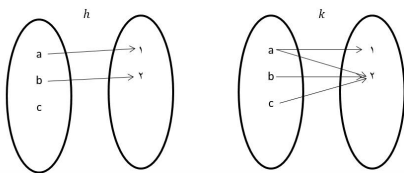
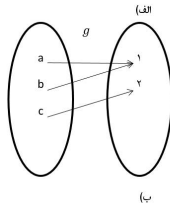
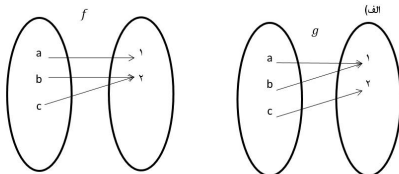
آ) تابع است.

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مولفه‌های اول یکسان نباشند.

-۱

- (الف) تابع است؛ به ضلع یک مربع فقط یک محیط را می توان نسبت داد.
 (ب) تابع است؛ در یک زمان معین به هر فرد فقط می توان یک دمای بدن را نسبت داد.
 (ج) تابع است؛ چون به هر فرد فقط یک گروه خونی می توان نسبت داد.
 (د) تابع نیست؛ ممکن است دانش آموزی بیش از یک دوست داشته باشد.
 (ه) تابع نیست؛ اعداد مثبت دارای دو ریشه ی دوم هستند.
 (و) تابع است؛ هر عدد حقیقی فقط دارای یک ریشه ی سوم است.



$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

$$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$$

- ۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.
 (الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.
 (ب) رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد.
 (ج) رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.
 (د) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.
 (ه) رابطه ای که به هر عدد، ریشه های دوم آن عدد را نسبت می دهد.
 (و) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

۲ مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده اند.

- (الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.
 (ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.
 (ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج های مرتب و نمودار نمایش دهید.

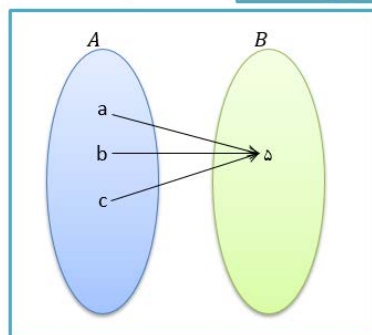
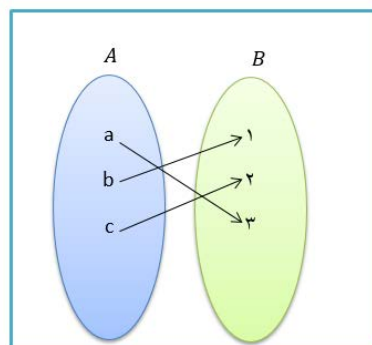
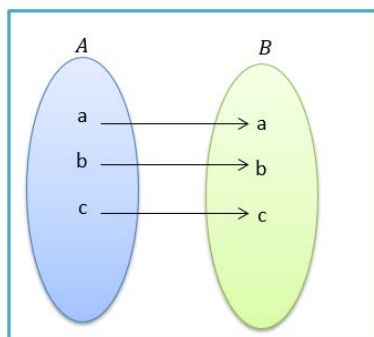
۳ کدام یک از مجموعه های زیر یک تابع است؟

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

$$k = \{(2, 5)\}$$

$$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

۴ A و B مجموعه هایی غیر عددی اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لاقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.



درس دوم: دامنه و برد تابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

پنج ضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چندضلعی
۵۴۰	۳۶۰	۳۶۰	۱۸۰°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{(540, \text{پنج ضلعی}), (360, \text{لوزی}), (360, \text{مربع}), (180, \text{مثلث})\}$$

چرا f یک تابع است؟ زیرا زوج های مرتب آن، مولفه اول یکسان ندارند.

مجموعه همه مؤلفه های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه های دوم را «برد» آن تابع می نامند. در فعالیت بالا :

$$f \text{ دامنه} = \{\text{پنج ضلعی, لوزی, مربع, مثلث}\}$$

$$f \text{ برد} = \{180^\circ, 360^\circ, 540^\circ\}$$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳	۵
محیط	۲	۴	۶	۸	۱۲	۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه: $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 5\}$

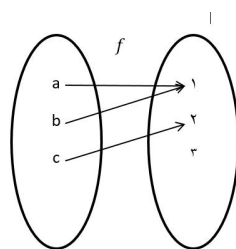
تابع است زیرا مولفه اول یکسان ندارد. برد: $\{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$

$$\{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر زیرا شرط تابع بودن برقرار نمی شود.

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید. خیر، همیشه برابر نیست.



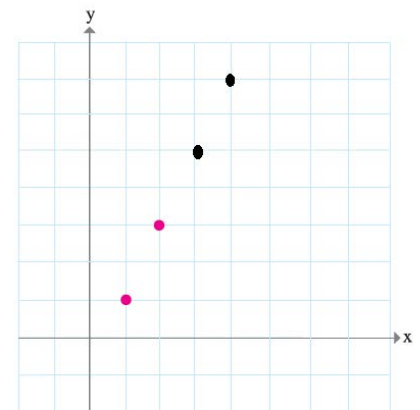
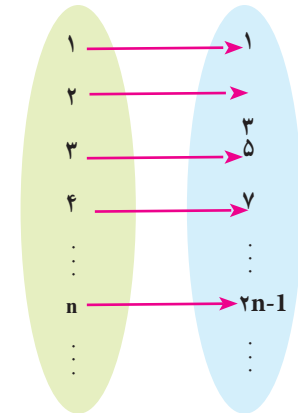
فعالیت

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید :



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	$2n-1$	...



چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع : زیرا مولفه اول یکسان ندارد

$$\{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100,199), \dots, (n, 2n-1)\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید. دامنه: $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید. برد: $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$. دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد فرد است.

همان‌گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند $f(1)=1$ و $f(2)=3$ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت :

$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$$

رابطه بین دامنه و برد تابع f را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنه تابع f مجموعه اعداد طبیعی است.

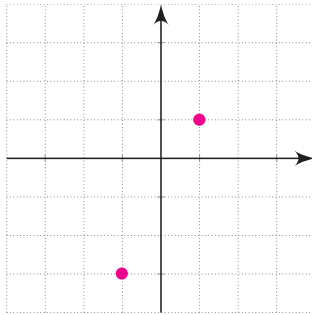
در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

کاردر کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد،

برد تابع f را به دست آورید.

$$\{2, 5, 10, 17\}$$



جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	1	2	3	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	0	-3	-1	.	-2	-0

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول

هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید. شباهت: رابطه بین اعضای دامنه و برد است. تفاوت: دامنه قبلی اعداد طبیعی است و دامنه این تابع اعداد حقیقی تابع است زیرا دارای مولفه اول یکسان نیست.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ این نمودار، نمودار یک خط است. نمودار قبلی نقطه ای بود.

دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید.

جاهای خالی را کامل کنید.

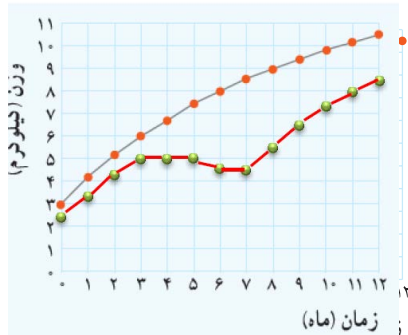
$$g\left(-\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{\gamma}{\omega} \quad g(\circ) = -1 \quad g\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{\gamma} \quad g(\sqrt{\omega}) = \gamma\sqrt{\omega-1} \quad g(1 \circ) = 19$$

نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = 2x - 1$.

در اینجا x یک عدد حقیقی ... است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

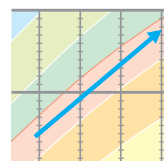
شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد^۱. وزن یک کودک تابعی از زمان است.



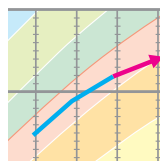
شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن
یک کودک طبیعی

۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

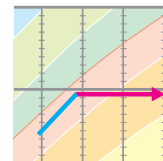
هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



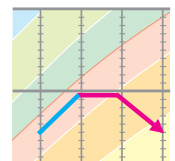
الف) رشد مطلوب



(ب) کندی رشد



(ب) توقف رشد



(ت) اُفت رشد

شکل ۲

فعاليات

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ رشد مطلوب

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ ۳ تا ۵ ماهگی

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

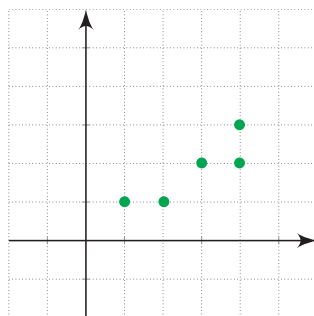
وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

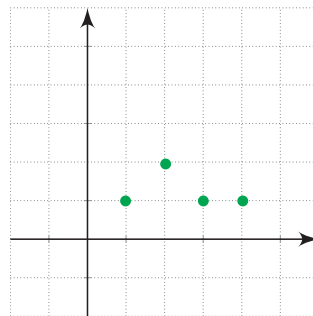
$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad R = \{2/8, 3/3, 4/2, 5/4, 6/8, 7/5, 8/6, 9/7, 10/2, 11/8, 12/5\}$$

کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.



تابع نیست



تابع است

می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

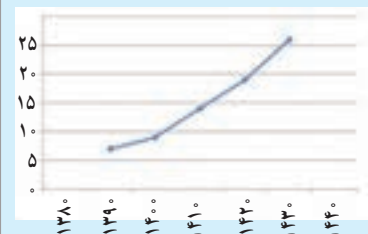
$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{1, 2\}$$

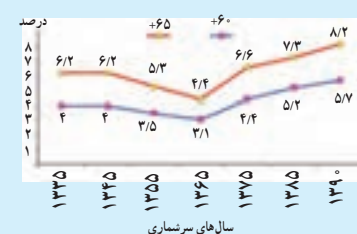
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالمندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالمندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت تثبیت وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیرترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش‌بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات حجم جمعیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

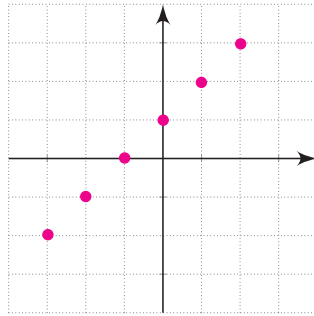
نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۶۰ سال و بالاتر



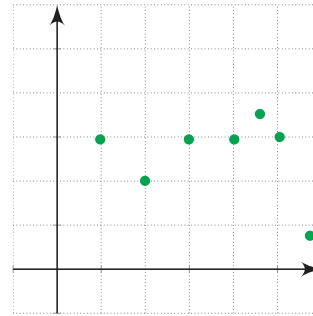
نسبت جمعیت سالمند ایران در طی سال‌های سرشماری



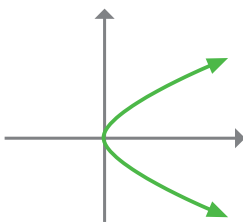
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



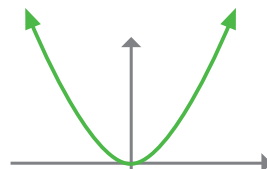
تابع است



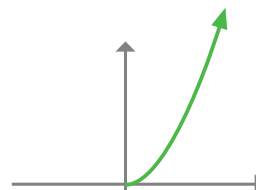
تابع است



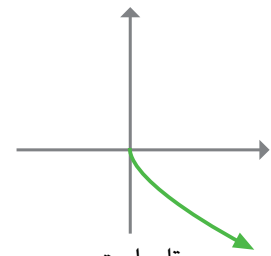
تابع نیست



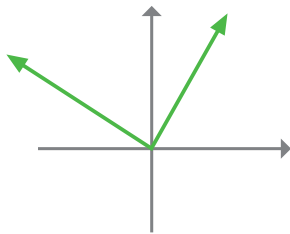
تابع است



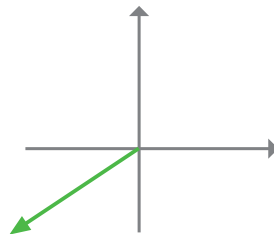
تابع است



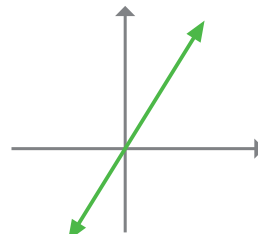
تابع است



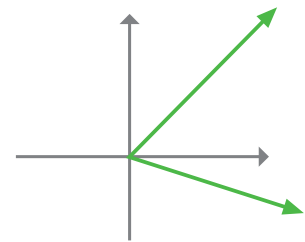
تابع است



تابع است



تابع است

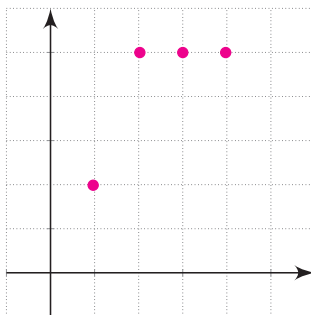


تابع نیست

تمرین

۱ کدام یک تابع است؟

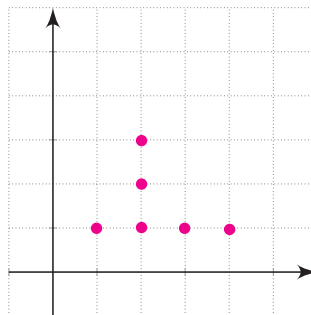
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



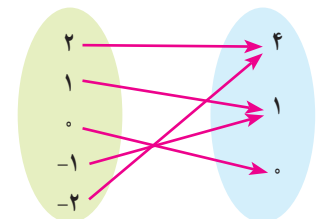
تابع است

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{2, 5\}$$



تابع نیست



تابع است

$$D = \{1, 2, 0, -2, -1\}$$

$$R = \{4, 1, 0\}$$

۲ تابعی مثال بزنید که :

(الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد. $\{(2,1), (3,4)\}$

(ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد. $\{(1,1), (2,1)\}$

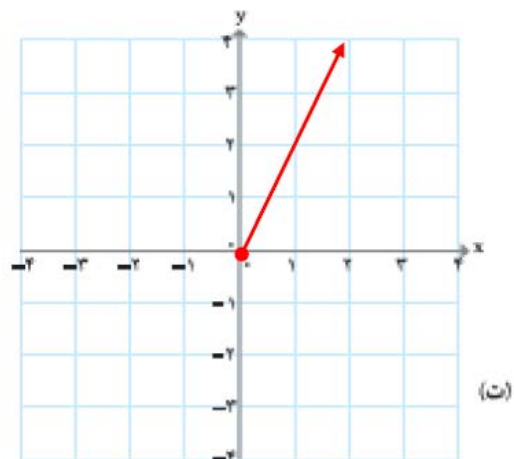
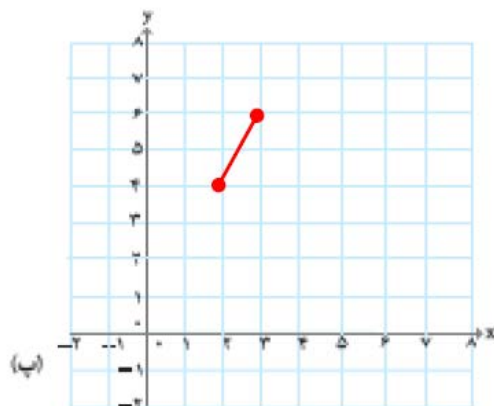
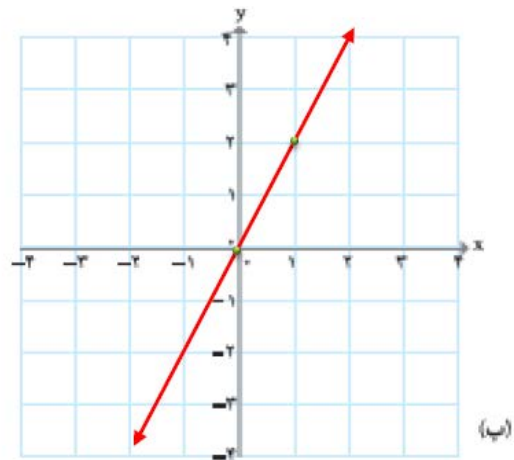
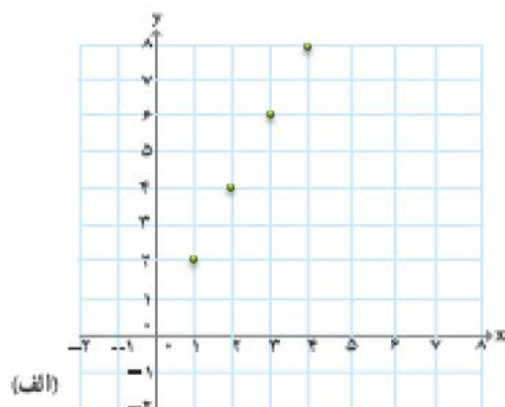
(پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد. $\{(5,1)\}$

(ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. $\{(1,1), (2,1), (3,1), \dots\}$

(ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. $\{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$

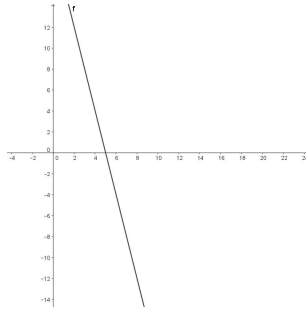
۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[4, 6]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی



دوم: دایره و خط و تابع

۴ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.



x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن، خط راست است.

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان

یک تابع نیز در نظر گرفت؟ بله زیرا خط موازی محور عرض ها است، این خط را در یک نقطه قطع می کند. یک خط اگر موازی محور عرض ها نباشد تابع است.

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ هرتعداد که بخواهیم.

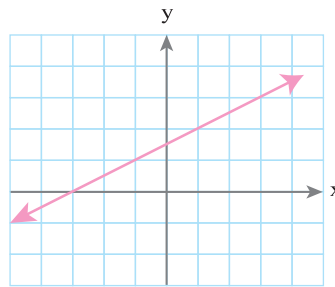
$$f(x) = 2x + 4, D_f = [-3, 5]$$

$$g(x) = x - 3, D_g = [-3, 5]$$

$$h(x) = -3x + 2, D_h = [-3, 5]$$

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟ نمایش جبری



$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

۸ جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

$$f(x) = 35x + 20$$

$$f(10) = 35 \times 10 + 20 = 370$$

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.

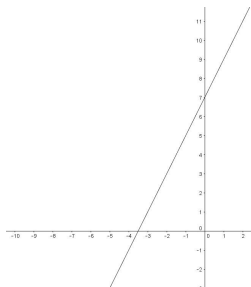
پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(10)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

چون تابع ثابت است، تمام مقادیر برابر ۳- است.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید. همان شکل فوق

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.



۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟ زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

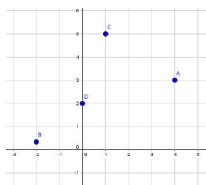
۱۲ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟ قسمت ب

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

پ) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

ت) $f(t) = \frac{1}{2} - t$



۱۳ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$; g را به صورت مجموعه‌ای از زوج بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$\left\{ (4, 3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), (1, 5), (0, 2) \right\}$$

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) 20° درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟ -4 درجه

ب) 104° درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟ 40 سانتی گراد

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی گراد را برحسب فارنهایت به دست دهد.

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟ بله، یک تابع خطی است.

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow F - 32 = \frac{9}{5}C \rightarrow 5(F - 32) = 9C$$

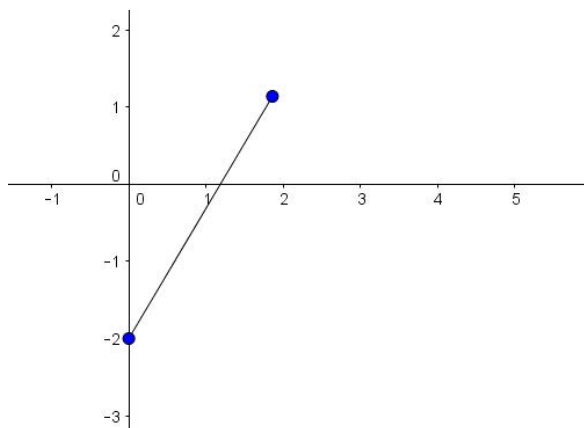
$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

$$P = 2(x + y) = 2(x + 3 + x) = 2(2x + 3) = 4x + 6$$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توان رسم کرد؟ هر تعداد که بخواهیم.



حل ۱۷:

$$f = \left\{ (2, 1), (3, 4) \right\}$$

$$g = \left\{ (3, 1), (2, 4) \right\}$$

حل ۱۶:

درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می شویم.

فعالیت

۱ جدول های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۴	۲/۵	۱۰	۱۲	x
مساحت آن	۰/۰۱	۰/۲۵	۱	۹	۱۶	۶/۲۵	۱۰۰	۱۴۴	x^2

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	۱۰	r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π	9π	25π	100π	$r^2\pi$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x) = x^2\pi$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به صورت $g(r) = r^2\pi$ قابل نمایش است. چون f و g به صورت یک چند جمله ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده اند، آنها را توابع درجه دوم می نامیم. حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید :

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله ای های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله ای می نامیم.

توابع زیر همگی توابع چند جمله ای اند :

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

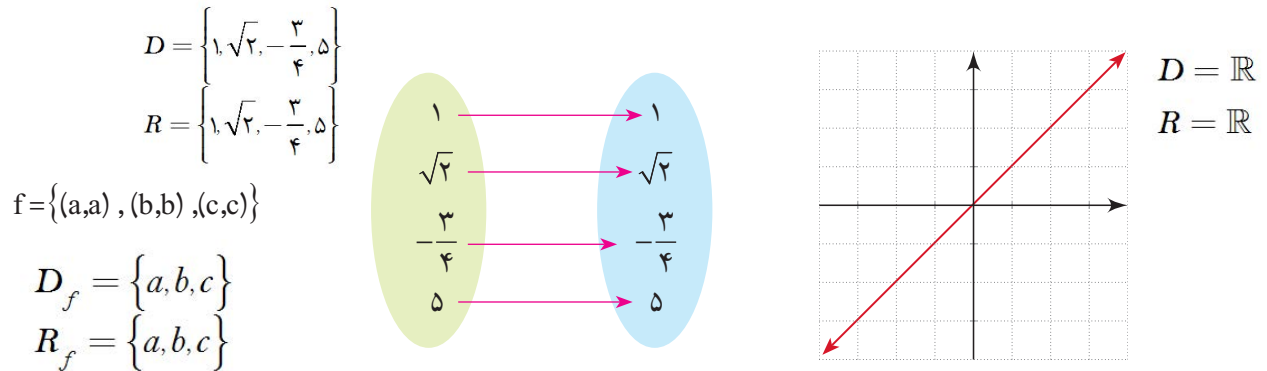
$$h(a) = a^2 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می دهند. بقیه توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

شباهت : هر عدد دامنه به همان عدد نسبت داده می شود.

دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟ تفاوت: دامنه ها و در نتیجه بردها متفاوت هستند.



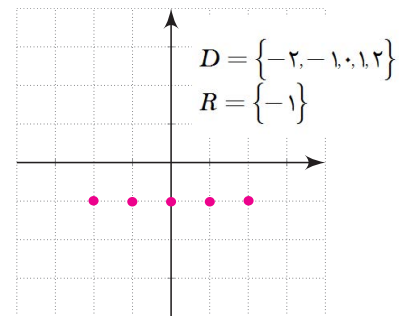
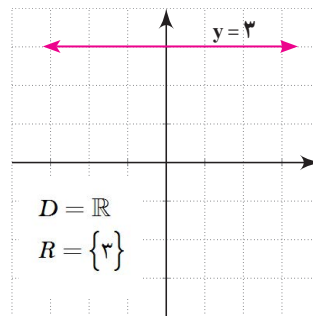
اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند. اگر دامنه تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می شود.

سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی ای مشترک اند؟ در هر سه تابع، اعضای دامنه به یک عدد ثابت نسبت داده می شود.

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

$$D = \{8, 9, 10\}$$

$$R = \{19\}$$



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می دهیم.

کار در کلاس

$$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$$

$$\{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (2, 2), (5, 5)\}$$

$$\{(1, 3), (3, 1)\}$$

$$\{(4, 1), (3, 1), (-2, 1), (2, 1), (5, 1)\}$$

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله ای ارائه کنید.

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

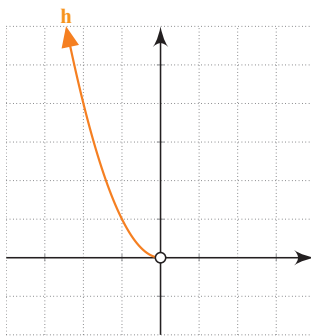
مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

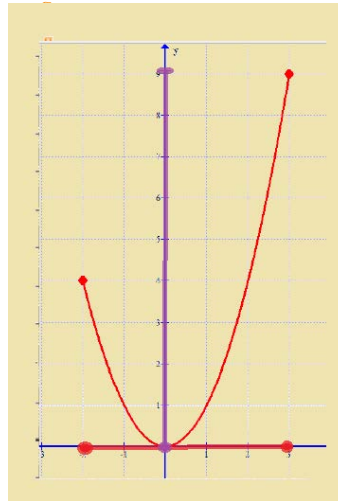
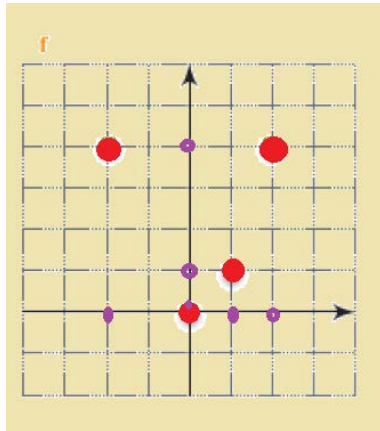
تابعی که دامنه اش افراد یک کلاس درس پایه دهم باشند و بردش دبیر ریاضی آن کلاس باشد.

سوره عن تابع

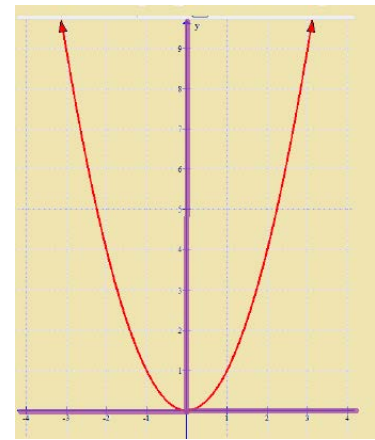
۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x)=x^2$	$g(x)=x^2$	$h(x)=x^2$	$t(x)=x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد	$R = \{4, 0, 1\}$	$[0, 9]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$



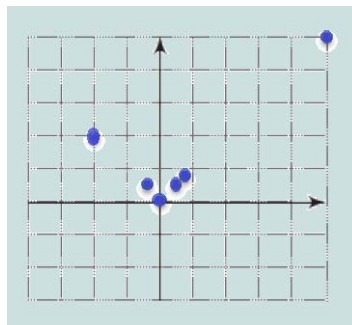
دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع $f(x)=x^2$ را مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

شعالت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید. دامنه این تابع اعداد سطر اول و برد آن اعداد سطر دوم جدول زیر می‌باشند.



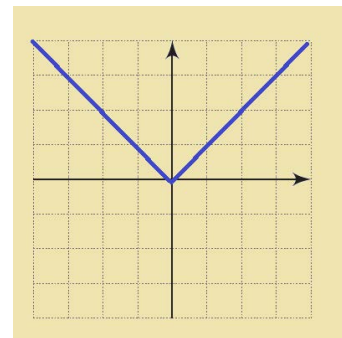
x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$\text{تابع قدرمطلق را به صورت } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ نیز نمایش می دهند.}$$

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه ای (قطعه ای) نامیده می شود.

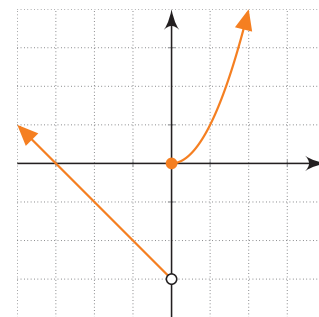


مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

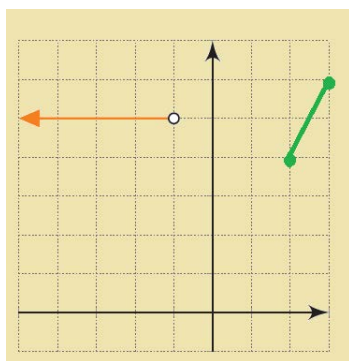


فعالیت

توابع f , g , h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

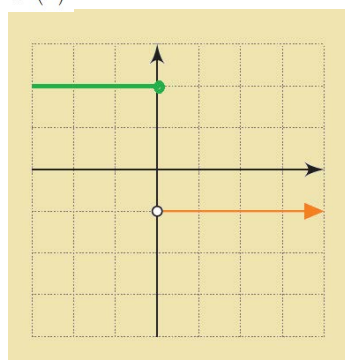
$h(x)$



$$D_h = (-\infty, -1) \cup [2, 3] \\ R_h = [2, 6]$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

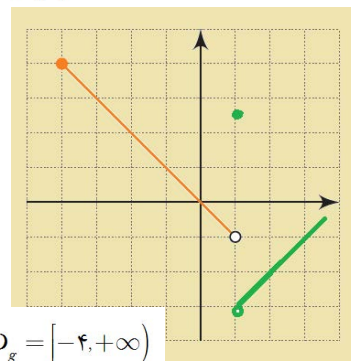
$f(x)$



$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ R_f = \{-1, 2\}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

$g(x)$

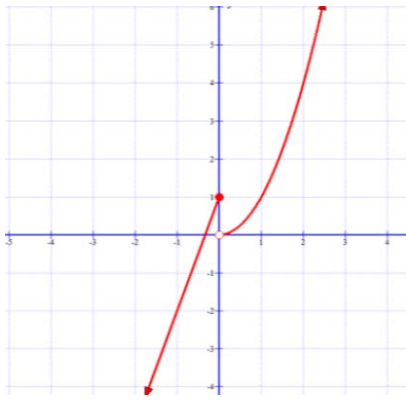


$$D_g = [-4, +\infty) \\ R_g = [-2, +\infty)$$

مقادیر $f(3)$, $g(-2)$, $f(-\frac{1}{5})$, $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.

$$f(3) = -1 \quad g(-2) = 2 \quad f\left(-\frac{1}{5}\right) = 2$$

$$h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \quad g(0) = 0$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = (-1, +\infty)$$

۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

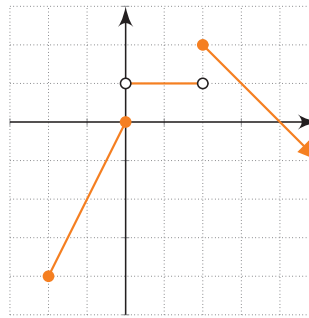
مقادیر $f(0)$, $f(5)$, $g(2)$, $f(-2)$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.

$$f(0) = 1 \quad g(0) = 1 \quad g(-\frac{1}{5}) = 1$$

$$f(5) = 25 \quad g(2) = 1 \quad f(-2) = -5$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & 2 \leq x \end{cases}$$



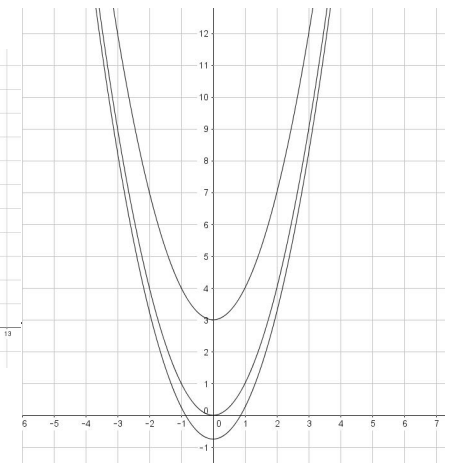
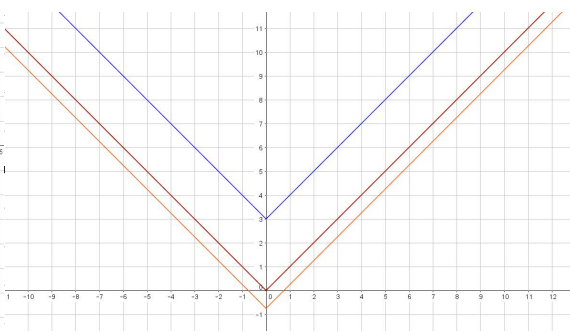
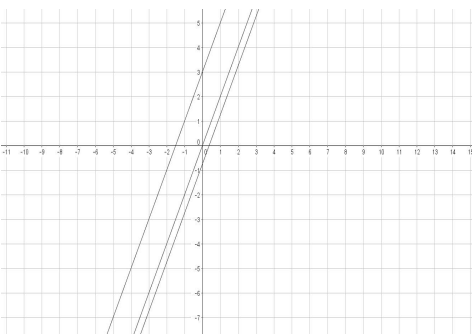
$$D_f = [-2, +\infty)$$

$$R_f = [-4, 2]$$

رسم برخی توابع به کمک انتقال

شعاعیت

نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = |x| + 3$ و $h(x) = x^2 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید. سه واحد در راستای محور عرض‌ها در جهت مثبت انتقال داده شده‌اند.



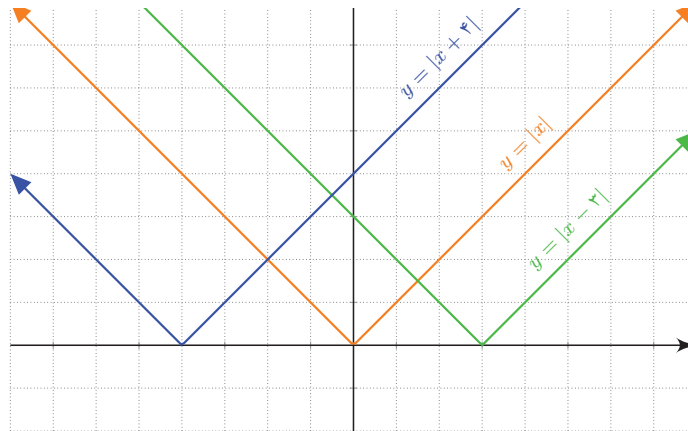
با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y به دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

کار در کلاس

۱ در شکل زیر دامنه و برد تابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟ برای رسم نمودار تابع $|x - 3|$ ، نمودار تابع $|x|$ را به اندازه ۳ واحد در راستای محور طول‌ها در جهت راست انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع $|x + 4|$ ، نمودار تابع $|x|$ را به اندازه ۴ واحد در راستای محور طول‌ها در جهت چپ انتقال می‌دهیم.

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [0, +\infty)$$

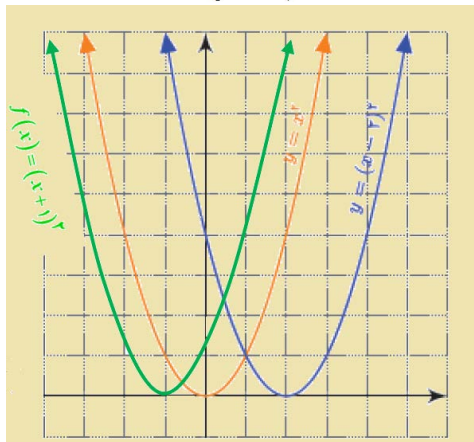


برای رسم نمودار تابع $f(x) + k$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x ‌ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود. اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار

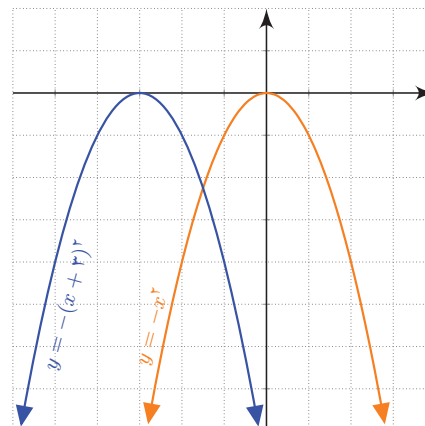
$$D = \mathbb{R}$$

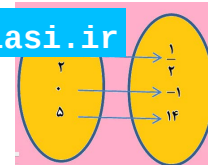
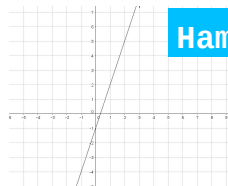
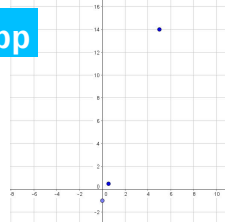
$$R = [0, +\infty)$$



$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, 0]$$





در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f , g , h و t رسم شده‌اند.

$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

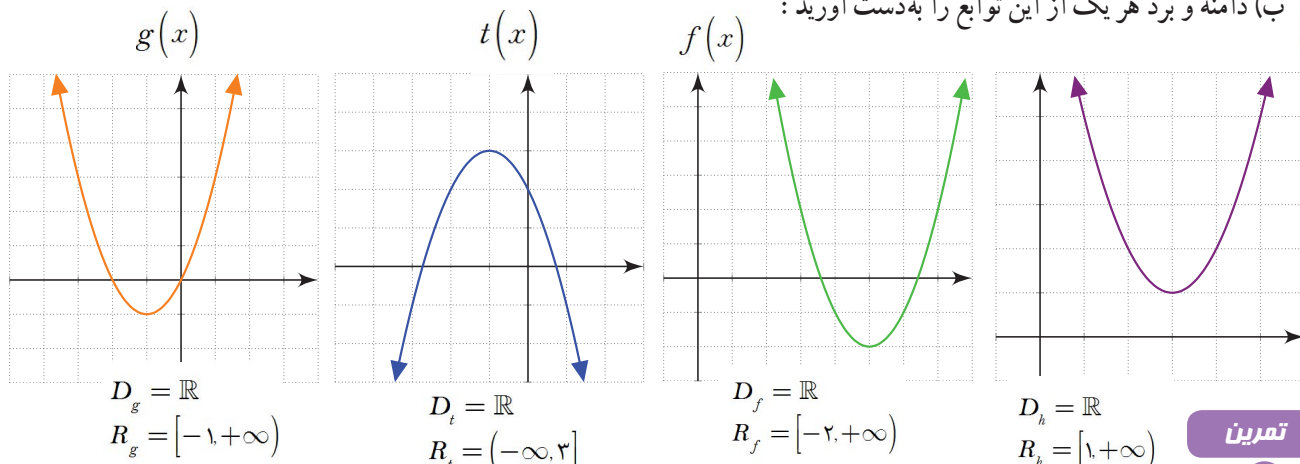
$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:

$h(x)$



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = [-1, +\infty)$$

$$D_t = \mathbb{R}$$

$$R_t = (-\infty, 3]$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [-2, +\infty)$$

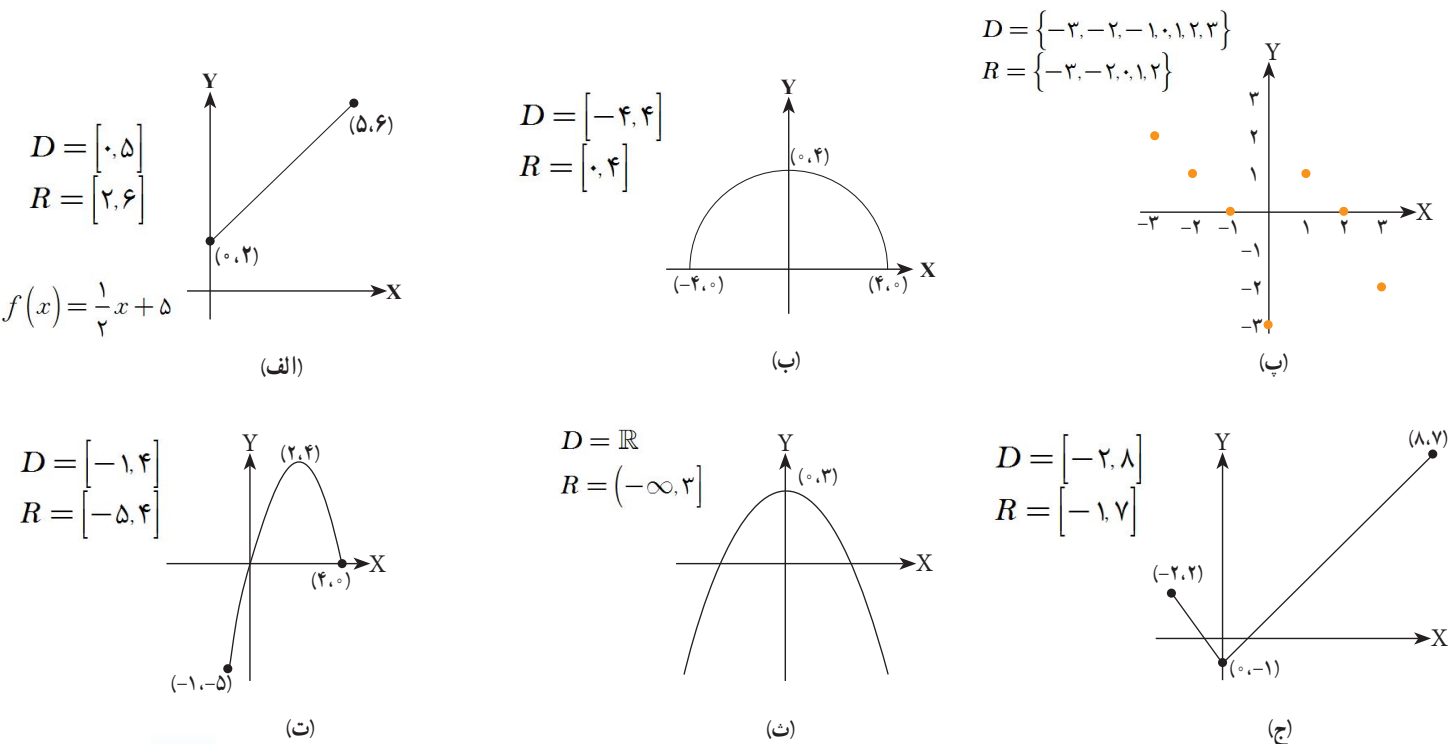
$$D_h = \mathbb{R}$$

$$R_h = [1, +\infty)$$

تمرین

۱) تابع $1(x) - 1x - 1$ را به دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟ برد نیز اعداد حقیقی خواهد بود.

۲) در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



$$D = [0, 5]$$

$$R = [2, 6]$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 2$$

(الف)

$$D = [-4, 4]$$

$$R = [0, 4]$$

(ب)

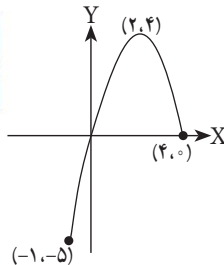
$$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$R = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$$

(پ)

$$D = [-1, 4]$$

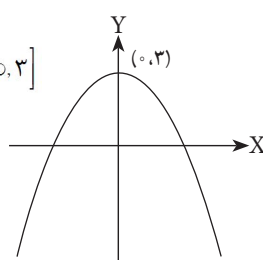
$$R = [-5, 4]$$



(ت)

$$D = \mathbb{R}$$

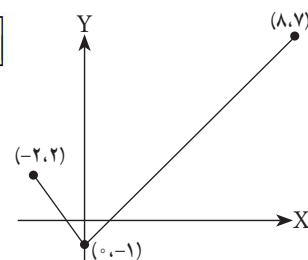
$$R = (-\infty, 3]$$



(ث)

$$D = [-2, 8]$$

$$R = [-1, 7]$$



(ج)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & 0 < x \leq 8 \end{cases}$$

۳) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است. نادرست

ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است. نادرست

پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است. درست

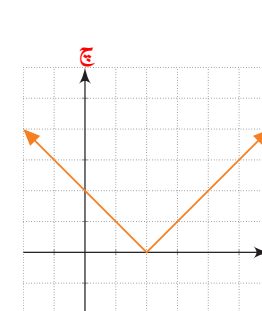
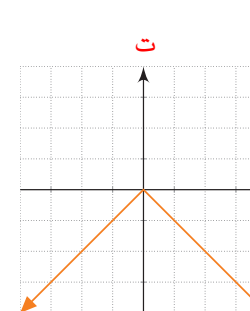
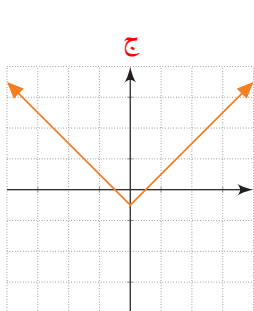
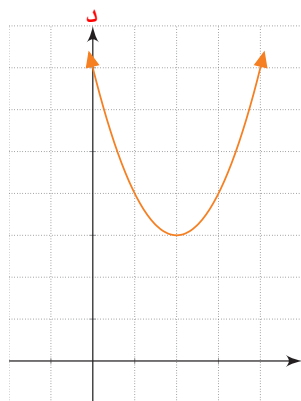
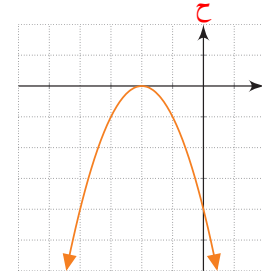
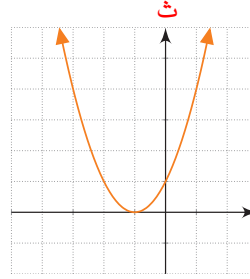
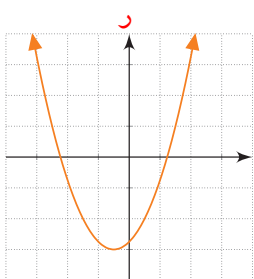
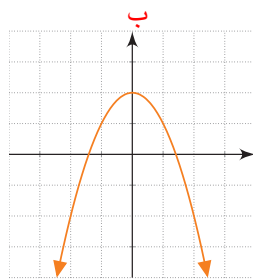
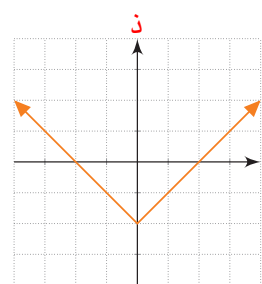
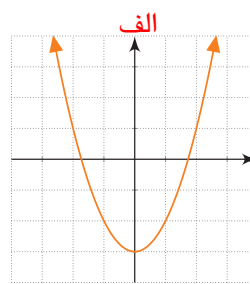
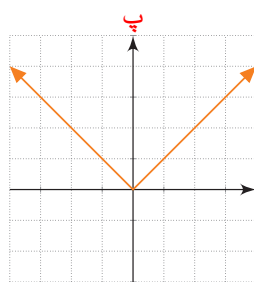
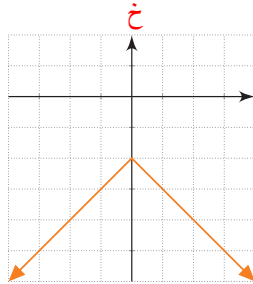
ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$. نادرست

۴) یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 3° متر باشد، حجم

تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + 3 \cdot \pi r^2$$

۵) هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ث) $y = (x + 1)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$

د) $y = (x - 2)^2 + 3$

پ) $y = |x|$

چ) $y = |x - 2|$

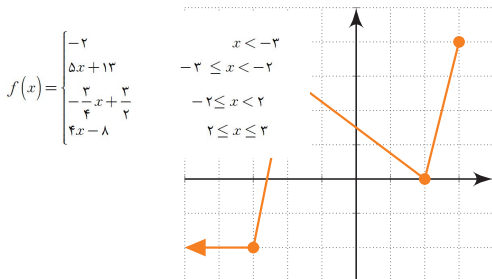
ذ) $y = |x| - 2$

ت) $y = -|x|$

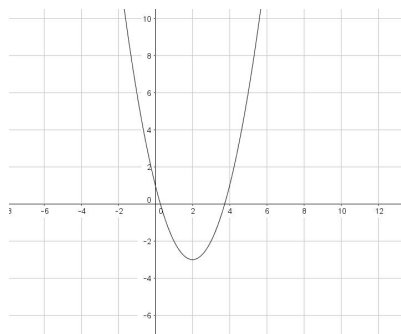
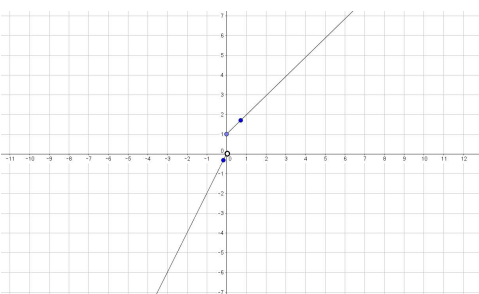
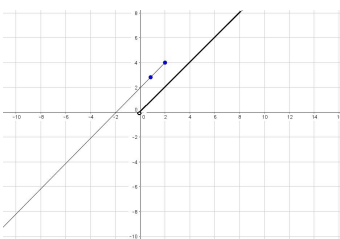
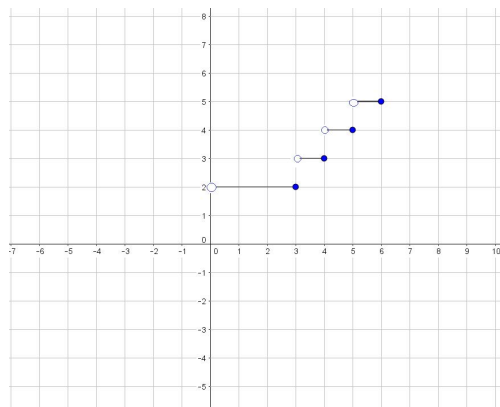
ح) $y = -(x + 2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

$$\begin{aligned} \text{الف} \quad & \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ x < -2 \\ -2 \leq x < 2 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \\ \text{ب} \quad & \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ x < -2 \\ -2 \leq x < 2 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \\ \text{ج} \quad & \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ x < -2 \\ -2 \leq x < 2 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$



$$f(x) = 3, f(-4) = 3, f(-1) = 3$$



۶ فرض کنیم دامنه هریک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-2, 3]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید. تعریف نشده: $f(6)$

$$f(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} - 8, f(3) = 4, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

$$f(0) = \frac{3}{2}, f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

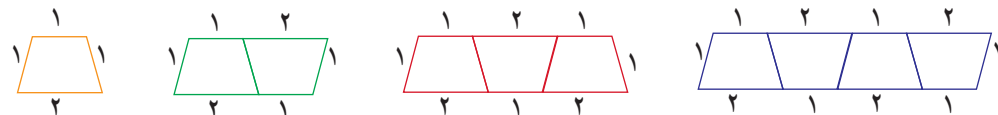
۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 3)$ می‌گذرد. $f(-1)$ و $f(-4)$ را به دست آورید.

۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۱۰ کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید. $f(x)$ تابع نیست زیرا اگر خطی به موازات محور عرض‌ها رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$

ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید زیرا سطر اول، اعداد تکراری ندارد. دامنه اعداد سطر اول و برد اعداد سطر دوم است.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-2, 1)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-3, +\infty)$$